

Aplikace matematiky

Nikolai Nikolaevich Yanenko

Метод слабой аппроксимации для произвольного расщепления

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 148–151

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103146>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО
РАСЩЕПЛЕНИЯ

Н. Н. ЯНЕНКО

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u,$$

где $u = \{u_1, \dots, u_q\}$ – вектор-функция с q компонентами от $m + 1$ переменных $t, x = \{x_1, \dots, x_m\}$, \mathcal{L} – оператор. Для уравнения (1) может быть поставлена задача Коши в полупространстве $t \geq t_0, |x| < \infty$:

$$(1a) \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

Здесь $u(x, t), u_0(x)$ – элементы некоторого банахова пространства B , \mathcal{L} – оператор в B , вообще говоря неограниченный.

Пусть

$$(2) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_p,$$

где $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p$ – операторы в B . Поставим в соответствие задаче (1), (1a) задачу

$$(3) \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial t} = \mathcal{L}_\tau u, \quad u_\tau(x, t_0) = u_0(x),$$

где

$$(4) \quad \mathcal{L}_\tau = \alpha_1(t, \tau) \mathcal{L}_1 + \alpha_2(t, \tau) \mathcal{L}_2 + \dots + \alpha_p(t, \tau) \mathcal{L}_p,$$

$$(5) \quad \alpha_i(t, \tau) = p\delta_{ij}, \quad \text{если } t \in \left[\left(n + \frac{j-1}{p} \right) \tau, \left(n + \frac{j}{p} \right) \tau \right],$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, \dots, p$.

В работах [1–3] исследовались задачи (1, 1a), (3) в предположении, что каждая из задач

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = p\mathcal{L}_i u, \quad u(x, t_0) = u_0(x); \quad i = 1, \dots, p$$

равномерно корректна в некотором банаховом пространстве B . Мы покажем, что можно освободиться от этого требования. Для простоты мы ограничимся случаем однородных операторов \mathcal{L} , \mathcal{L}_i , т. е. будем предполагать их перестановочность с операторами сдвига (но не между собой):

$$(7) \quad \mathcal{L}T_j = T_j\mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_i T_j = T_j\mathcal{L}_i; \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 0, \dots, m,$$

где операторы сдвига T_0, T_j по t, x определяются равенствами:

$$(8) \quad \begin{aligned} T_0 f(x, t) &= f(x, t + \tau), \\ T_i f(x_1, \dots, x_m, t) &= f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_m, t). \end{aligned}$$

В этом случае гармоники

$$(9) \quad u(x, t) = v(k, t) e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m)} = v(k, t) e^{ikx}$$

являются собственными функциями операторов $\mathcal{L}, \mathcal{L}_i$, пространство B становится пространством Гильберта периодических функций и возможно преобразование Фурье задач (1, 1a), (3), (6) после которого приходим к задачам

$$(10) \quad \frac{\partial v(k, t)}{\partial t} = l v(k, t), \quad v(k, t_0) = v_0(k),$$

$$(11) \quad \frac{\partial v_i(k, t)}{\partial t} = l_\tau v_i(k, \tau), \quad v_i(k, t_0) = v_0(k),$$

$$(12) \quad \frac{\partial v(k, t)}{\partial \tau} = l_s v(k, t), \quad (k, t_0) = v_0(k); \quad s = 1, \dots, p,$$

где l, l_τ, l_s — Фурье-образы операторов $\mathcal{L}, \mathcal{L}_\tau, \mathcal{L}_s$, которые являются $q \times q$ матрицами в пространстве E_q компонент $\{u_1, \dots, u_q\}$ зависящими от k .

Введем обозначения (см. [3]):

$$(13) \quad s(t_2 - t_1), \quad s_i(t_2 - t_1), \quad s_i(t_2 - t_1)$$

для операторов перехода задач (1, 1a), (3), (6),

$$(14) \quad \sigma(t_2 - t_1), \quad \sigma_\tau(t_2 - t_1), \quad \sigma_i(t_2 - t_1)$$

для операторов перехода задач (10), (11), (12) соответственно. Очевидны соотношения

$$(15) \quad \sigma(t) = e^{lt}, \quad \sigma_i = e^{l_i t}, \quad \sigma_\tau = e^{l_\tau \tau} e^{l_\tau^{-1} t} \dots e^{l_i \tau}, \quad i = 1, \dots, p,$$

где $e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}^k / k!)$ есть экспоненциал матрицы \mathbf{A} .

Дадим эффективное определение корректности задач (1, 1a), (3), (6). Задача (3) корректна, если

$$(16) \quad \|s_\tau(m\tau)\| = \sup_k \|\sigma_\tau(m\tau)\|_q = \sup \|\sigma_\tau^m(\tau)\|_q \leq M(T)$$

для всех m, τ удовлетворяющих условию $m\tau \leq T$; равномерно корректна, если

$$(17) \quad \|s_\tau(m\tau)\| \leq l^{\alpha(T)m\tau}.$$

Здесь $\|f\|_q$ означает норму вектора $f = \{f, \dots, f_q\}$. Аналогично определяется корректность (1, 1a), (6). В дальнейшем мы будем всегда предполагать корректность (3), но не обязательно корректность (1, 1a) и (6).

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. $\|\sigma_\tau(\tau) - \sigma(\tau)\|_q \leq c(k) \tau^2, \quad \tau \rightarrow 0.$

Лемма 2. *Имеет место аппроксимация*

$$(18) \quad \|[s_\tau(\tau) - s(\tau)] u_0\| \leq \tau^2 c(N)$$

для

$$(19) \quad u_0(x) = P_N(x) = \sum_{k=-N}^N v(k) e^{ikx}.$$

Лемма 3.

$$(20) \quad \sigma_\tau(n\tau) = \sigma_\tau^n(\tau) \rightarrow \sigma(\tau) = e^{t\tau}, \quad \tau \rightarrow 0, \quad n\tau = t,$$

k — фиксировано.

Теорема 1. *Если задача (1, 1a) корректна, то для сходимости в сильном смысле:*

$$(21) \quad \|[s_\tau(\tau) - s(\tau)] u_0\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0,$$

где $u_0 \in L_2$, необходимо и достаточно, чтобы (3) была корректна.

Теорема 2. *Если корректна задача (5), то корректна задача (1, 1a) и имеет место сильная сходимость в смысле (21).*

Теорема 3. *Пусть условие (2) заменено на условие аппроксимации*

$$(22) \quad \mathcal{L} \sim \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_p,$$

где операторы $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p$ могут зависеть от τ , а аппроксимация имеет место по Лаксу.

Тогда справедливы теоремы 1, 2.

Теорема 4. Пусть

$$(23) \quad A_{s_1} + A_{s_0} = \mathcal{L}_s, \quad s = 1, \dots, p$$

и выполняется условие (2).

Если схема

$$(24) \quad \frac{u^{n+(s/p)} - u^{n+((s-1)/p)}}{\tau} = A_{s_1} u^{n+(s/p)} + A_{s_0} u^{n+((s-1)/p)}$$

устойчива на целых шагах, то решение (24) сходится в B к решению (1).

Литература

- [1] Н. Н. Яненко: Сибирский математический журнал, т. V, № 6 (1964).
- [2] Г. В. Демидов, Н. Н. Яненко: ДАН СССР, т. 167, № 6 (1966).
- [3] Н. Н. Яненко: Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1966.

Н. Н. Яненко, Вычислительный центр СОАН, Новосибирск 90, СССР.