Aplikace matematiky

Ján Pidany

Об одном из способов номографирования системы частного вида четырех уравнений

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 3, 248–257

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103167

ОБ ОДНОМ ИЗ СПОСОБОВ НОМОГРАФИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТНОГО ВИДА ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ

ЯН ПИДАНИ (JÁN PIDANY)

(Поступило в редакцию 27/IV 1967 г.)

Одним из важных случаев основной канонической формы [2]

$$f_{1,2} - f_{7,8} = f_{3,4} - f_{9,10} = f_{5,6} - f_{11,12}, \quad g_{1,2} - g_{7,8} = g_{3,4} - g_{9,10} = g_{5,6} - g_{11,12}, \tag{1}$$

допускающем построение номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом, является каноническая форма

$$A_{1,2} + A_{3,4} = A_{7,8} - A_{5,6} = A_{9,10} - A_{11,12}, \quad B_{1,2} + B_3 = B_{7,8} - B_5 = B_{9,10} - B_{11}. \tag{2}$$

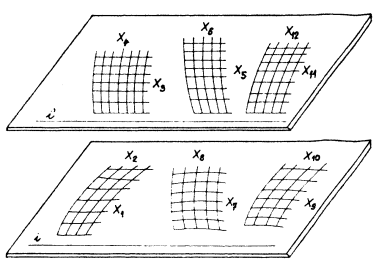
Простейшие уравнения элементов номограммы, принадлежащие канонической форме (2) будут:

неподвижная плоскость

$$\xi_1 = A_{1,2}, \quad \eta_1 = B_{1,2}, \quad \xi_2 = A_{7,8}, \quad \eta_2 = B_{7,8}, \quad \xi_3 = A_{9,10}, \quad \eta_3 = B_{9,10}, \tag{3}$$

транспарант

$$\xi'_1 = -A_{3,4}, \quad \eta'_1 = -B_3, \quad \xi'_2 = A_{5,6}, \quad \eta'_2 = B_5, \quad \xi'_3 = A_{11,12}, \quad \eta'_3 = B_{11}. \tag{4}$$



Ключ: $(x_1, x_2) \models (x_3, x_4)$, $i \| i'$, $(x_5, x_6) \mapsto (x_7, x_8)$, $(x_{11}, x_{12}) \mapsto$ $\mapsto (x_9, x_{10})$.

Рис. 1.

Схема номограммы приведена на рис. 1.

Каноническая форма (2), как следует из уравнений элементов номограммы (4), интересна тем, что линии x_3, x_5, x_{11} бинарных полей (x_i, x_{i+1}), $i = 3, 5, 11$ на транспаранте представляют собой семейство параллельных горизонтальных прямых, которые можно использовать в качестве направляющих.

Теорема. *Пусть дана система уравнений*

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_7 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \\ x_8 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \\ x_9 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,, \\ x_{10} &= l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,, \end{aligned}$$

где f, g, h, l в области G достаточно гладкие и в $G_1 \subset G$ $f'_{x_i} g'_{x_i} h'_{x_i} l'_{x_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $k = 1, 2, 3, 4, 11, 12$.

Для того, чтобы систему уравнений (5) можно было представить в виде

$$(6)\qquad \begin{aligned} A_{1,2} + A_{3,4} &\equiv A_{7,8}(f, g) - A_{5,6} \equiv A_{9,10}(h, l) - A_{11,12}\,, \\ B_{1,2} + B_3 &\equiv B_{7,8}(f, g) - B_5 \equiv B_{9,10}(h, l) - B_{11}\,, \end{aligned}$$

причом $A_{i,k}$, $B_{i,k}$, B_i достаточно гладки и

$$(7)\qquad \frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0\,, \quad i = 1, 7, 9\,,$$

$$(8)\qquad \frac{D(A_{i,i+1}, B_i)}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0\,, \quad i = 3, 5, 11\,,$$

необходимо и достаточно

$$(9)\qquad l'_{x_i} : h'_{x_i} = H(h, l)\,, \quad i = 4, 12\,,$$

$$(10)\qquad \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}} : \frac{\partial h}{\partial x_{12}} = L(h, l)\,,$$

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 A_{9,10}(h, l)}{\partial x_i\, \partial x_{11}} = \frac{\partial^2 B_{9,10}(h, l)}{\partial x_k\, \partial x_{11}} = 0\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,,\ k = 1, 2, 3\,,$$

$$(12)\qquad \frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} : \frac{D(h, l)}{D(x_2, x_3)} = \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} : \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_3)} = \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} : \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)}\,.$$

Примечание. Условия (7), (8) означают невырожденность бинарных полей (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость условий. Предположим, что система тождеств (6) существует и удовлетворяет условиям (6), (7).

Из системы тождеств (6) можно выделить подсистему

$$(13)\qquad \begin{aligned} A_{1,2} + A_{3,4} &\equiv A_{7,8}(f, g) - A_{5,6}\,, \\ B_{1,2} + B_3 &\equiv B_{7,8}(f, g) - B_5\,. \end{aligned}$$

В работе [4] была решена следующая задача:

Для того, чтобы система двух уравнений с восемью переменными

$$x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \qquad x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \tag{14}$$

f и g в области G достаточно гладкие, $G_1 \subset G$ $f'_{x_i} g'_{x_i} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ можно было представить в виде (13), необходимо и достаточно

$$g'_{x_i} : f'_{x_i} = Q(f, g)\,, \quad i = 4, 6\,, \tag{15}$$

$$f'_{x_4} : f'_{x_6} = T(x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \lg \left(f'_{x_4} : f'_{x_6}\right) = P(x_3, x_4)\,, \tag{17}$$

$$\frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : f'_{x_4} = R(f, g)\,, \tag{18}$$

$$\frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 A_{7,8}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 B_{7,8}}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \quad j = 3, 5\,. \tag{20}$$

Предположим, что эти условия выполнены; тогда функции $A_{i,k}$, $B_{i,k}$, B_i можно определить с точностью до произвольных функций и систему (6) привести к виду

$$A_{9,10}(h, l) \equiv u(x_1, x_2, x_3, x_4) + A_{11,12}\,, \qquad B_{9,10}(h, l) = v(x_1, x_2, x_3) + B_{11}\,, \tag{21}$$

где

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_{1,2} + A_{3,4}\,, \qquad v(x_1, x_2, x_3) = B_{1,2} + B_3\,. \tag{22}$$

Дифференцируя (21) получим

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv u'_{x_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_i}\,, \quad i = 11, 12\,, \tag{24}$$

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv v'_{x_i}\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{25}$$

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} h'_{x_{11}} + \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l} l'_{x_{11}} \equiv B'_{11}\,, \tag{26}$$

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv 0\,, \quad i = 4, 12\,. \tag{27}$$

Из (27) получим

$$l'_{x_i} : h'_{x_i} = -\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} : \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l}. \tag{28}$$

Обозначив правую часть (28) через $H(h, l)$, получим условие (9). Взяв во внимание (28) для (23) и (24), находим

$$\left[\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + H(h, l)\frac{\partial A_{9,10}}{\partial l}\right] h'_{x_4} \equiv u'_{x_4} \tag{29}$$

$$\left[\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + H(h, l)\frac{\partial A_{9,10}}{\partial l}\right] h'_{x_{12}} \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}}. \tag{30}$$

Разделив почленно тождество (30) на тождество (29), находим

$$h'_{x_{12}} : h'_{x_4} = \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}} : u'_{x_4}. \tag{31}$$

Прологарифмировав (31) и взяв производную по x_{12}

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}} \lg (h'_{x_{12}} : h'_{x_4}) = \frac{\partial}{\partial x_{12}} \lg \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}}. \tag{32}$$

Обозначив правую часть (32) через $K(x_{11}, x_{12})$, получим

$$\frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}} = \varphi(x_{11})\, e^{\int K(x_{11}x_{12})\mathrm{d}x_{12}}, \tag{33}$$

$\varphi(x_{11})$ – произвольная функция.

Зная $\partial A_{11,12}/\partial x_{12}$, потом (30) можем записать в виде

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + H(h, l)\frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}} : h'_{x_{12}}. \tag{34}$$

Для того, чтобы (34) можно было рассматривать как дифференциальное уравнение с частными производными относительно $A_{9,10}(h, l)$, должно выполниться условие (10).

Продифференцировав первое тождество (21) по x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), второе по x_k ($k = 1, 2, 3$), потом обе по x_{11} получим условие (11).

Из тождества (23) находим

$$\frac{D(h, l)}{D(x_2, x_3)} u'_{x_1} - \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_3)} u'_{x_2} + \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)} u'_{x_3} \equiv 0. \tag{35}$$

По предположению условия существования системы (13) выполнены, следовательно, условие (35) должно выполниться также и для функций f и g

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} u'_{x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} u'_{x_2} + \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} u'_{x_3} \equiv 0\,. \tag{36}$$

Условие совместности системы (33), (34) относительно u имеет вид (12).

б) Доказательство достаточности. Предположим, что условия (9)–(12) выполнены. Так как функции h и l даны, из условия (9) определим $H(h, l)$; из (10) и (33) определим $L(h, l)$. Зная функции $H(h, l)$, $L(h, l)$ — составим уравнение

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} = L(h, l)\,. \tag{37}$$

Пусть уравнение (37) имеет решение

$$A_{9,10}(h, l) = A(h, l) + \Phi[B(h, l)]\,, \tag{38}$$

где $A(h, l)$ — частное решение (37); $\Phi[B(h, l)]$ — общее решение соответствующее однородному уравнению

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} = 0\,. \tag{39}$$

Используя условие (10) для решения (38), уравнение (37) запишем в виде (34) и спомощью условия (9) в виде (24), или

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}} [A_{9,10}(h, l)] \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{12}}\,. \tag{40}$$

Интегрируя (40) по x_{12}, получаем

$$A_{9,10}(h, l) \equiv n(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}) + A_{11,12}\,. \tag{41}$$

Из (11) и (41) вытекает, что

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \alpha_{11} = n(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11})\,; \tag{42}$$

обозначив $\alpha_{11} + A_{11,12}$ через $A_{11,12}$, получим

$$A_{9,10}(h, l) \equiv \bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) + A_{11,12}\,. \tag{43}$$

Пусть будет общим решением уравнения

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l} = 0\,, \tag{44}$$

$$B_{9,10}(h, l) = \Phi_1[B(h, l)]\,. \tag{45}$$

Взяв во внимание условие (9), уравнение (44) запишем в виде (27), или

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[B_{9,10}(h, l)] \equiv 0\,, \quad i = 4, 12\,. \tag{46}$$

Из (11) и (46) вытекает

$$B_{9,10}(h, l) \equiv \bar{v}(x_1, x_2, x_3) + B_{11}\,. \tag{47}$$

Продифференцировав (43) по x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} l'_{z_i} \equiv \bar{u}_{x_i}\,, \tag{48}$$

откуда

$$\frac{D(h, l)}{D(x_2, x_3)} \bar{u}'_{x_1} - \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_3)} \bar{u}'_{x_2} + \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)} \bar{u}_{x_3} \equiv 0\,. \tag{49}$$

Из (12) и (49) получим

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} \bar{u}'_{x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} \bar{u}'_{x_2} + \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)} \bar{u}'_{x_3} \equiv 0\,. \tag{50}$$

Из (35), (36) и (49), (50) вытекает, что

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)\,. \tag{51}$$

Аналогично получим

$$\bar{v}(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{52}$$

Подставляя правые части (51), (52) в (43) и (44), получим тождество (21). Теорема доказана.

Из теоремы следует метод определения неизвестных функций, если условия представимости выполнены.

Пример. Рассмотрим систему уравнений.

$$\begin{aligned}
x_7 &= 1 : 4[x_1(x_1 - 4) + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5(x_6 + 10x_5)]^2\,, \\
x_8 &= 1 : \sqrt{2}[(-x_1^2 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5(x_6 - 10x_5)]^{1/2}\,, \\
x_9 &= x_{11}e^{-2x_1 - x_3 + x_4 + \operatorname{sh} x_{12}}\,, \\
x_{10} &= \sqrt{(-x_1^2 - x_2 + x_3 + x_4 + \lg x_{11} + \operatorname{sh} x_{12} - x_{11} - 1)^3}\,.
\end{aligned} \tag{53}$$

Легко проверить, что условия теоремы выполнены и $Q(h, l) = 1 : 4g\sqrt{f}$, $R(f, g) = 1 : 2\sqrt{f}$, $H(h, l) = 3\sqrt[3]{l} : 2h$, $L(h, l) = 1 : h$.

Из уравнения

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + \frac{1}{4g\sqrt{f}} \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = \frac{1}{2\sqrt{f}}, \tag{54}$$

находим функцию

$$A_{7,8}(f, g) = \sqrt{f} + g^2 . \tag{55}$$

Подобно получим функцию

$$B_{7,8}(f, g) = \sqrt{f} - g^2 , \tag{56}$$

из уравнения

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + \frac{1}{4g\sqrt{f}} \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} = 0 ;$$

функцию

$$A_{9,10}(h, l) = \lg h , \tag{57}$$

из уравнения

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial h} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{l}}{h} \frac{\partial A_{9,10}}{\partial l} = \frac{1}{h} ;$$

функцию

$$B_{9,10}(h, l) = \lg h - \sqrt[3]{l^2} , \tag{58}$$

из уравнения

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial h} + \frac{3\sqrt[3]{l}}{2h} \frac{\partial B_{9,10}}{\partial l} = 0 .$$

Из (55)–(58) следует

$$\begin{aligned}
-2x_1 - x_3 + x_4 &= \sqrt{x_7} + x_8^2 - x_5 x_6 , \\
x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \sqrt{x_7} - x_8^2 - 10x_5^2 , \\
-2x_1 - x_3 + x_4 &= \lg x_9 - \lg x_{11} - \operatorname{sh} x_{12} , \\
x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \lg x_9 - \sqrt[3]{x_{10}^2} - x_{11} + 1 ,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{gathered}
-2x_1 - x_3 + x_4 = \sqrt{x_7} + x_8^2 - x_5 x_6 = \lg x_9 - \lg x_{11} - \operatorname{sh} x_{12} , \\
x_1^2 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \sqrt{x_7} - x_8^2 - 10x_5^2 = \lg x_9 - \sqrt[3]{x_{10}^2} - x_{11} + 1 .
\end{gathered} \tag{59}$$

После введения параметров перобразования в (59), получим уравнения элементов номограммы:

неподвижная плоскость

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -2x_1 , & \eta_1 &= x_1^2 - 2x_1 + x_2 , \\
\xi_2 &= \sqrt{x_7} - x_8^2 , & \eta_2 &= \sqrt{x_7} - x_8^2 + 5 , \\
\xi_3 &= 15 + \lg x_9 , & \eta_3 &= 5 + \lg x_9 - \sqrt[3]{x_{10}^2} ,
\end{aligned}$$

транспарант

$$\xi_1' = x_3 - x_4\,, \qquad \eta_1' = 2x_3\,,$$

$$\xi_2' = x_5 x_6\,, \qquad \eta_2' = 10x_5^2 + 5\,,$$

$$\xi_3' = 15 + \lg x_{11} + \operatorname{sh} x_{12}\,, \quad \eta_3' = 6 + x_{11}\,.$$

Номограмма приведена на рис. 2*а*, *б*.

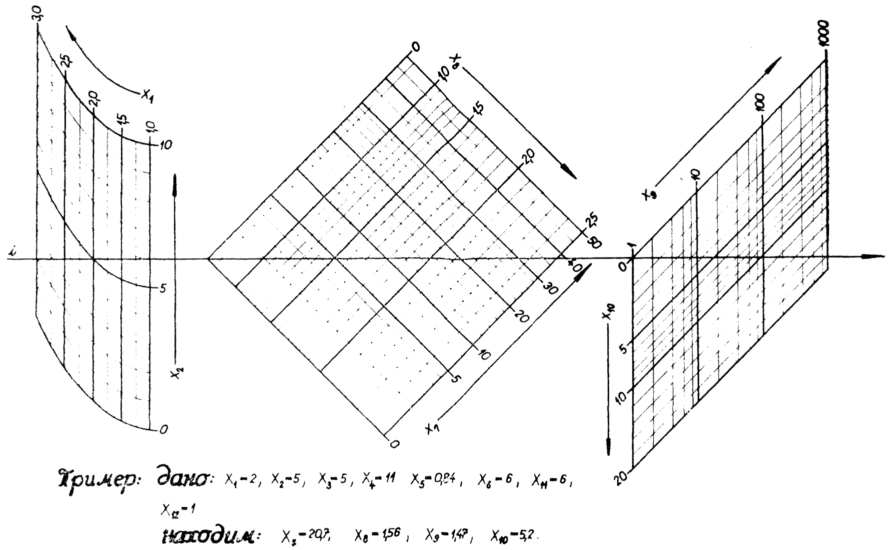


Рис. 2а — Неподвижная плоскость.

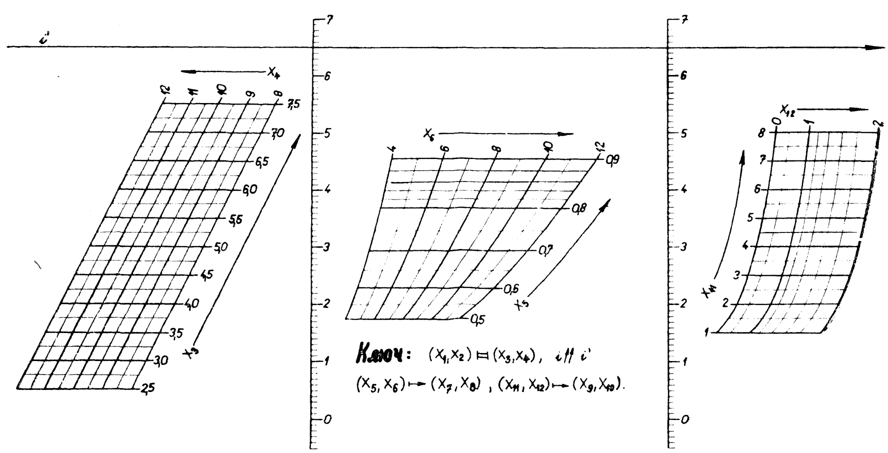


Рис. 2б — Транспарант.

Литература

[1] *Боголюбов Ю. И.:* О представимости системы четырех уравнений с девятью переменными в виде, допускающей построение номограммы с ориентированным транспарантом. Номографический сборник № 3. АН СССР 1965.

[2] *Хованский Г. С.:* Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом. Вычислительная математика № 7. АН СССР 1961.

[3] *Pleskot V.:* Nomografie. SNTL, Praha 1963.

[4] *Pidany J.:* O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc s osmimi neznámymi na tvar $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, ktorý môžeme zostrojiť pomocou nomogramov s priesvitkou o dvoch stupňoch voľnosti. Aplikace matematiky *2*, 1967.

Výtah

O JEDNOM ZE ZPŮSOBŮ NOMOGRAFICKÉHO ŘEŠENÍ SOUSTAVY ČTYŘ ROVNIC VE SPECIÁLNÍM TVARU

JÁN PIDANY

V práci jsou dány nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo možno transformovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_7 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ x_8 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ x_9 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12}) \\ x_{10} &= l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12}) \end{aligned}$$

na tvar

$$\begin{aligned} A_{1,2} + A_{3,4} &= A_{7,8} - A_{5,6} = A_{9,10} - A_{11,12}\,, \\ B_{1,2} + B_3 &= B_{7,8} - B_5 = B_{9,10} - B_{11}\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice je možno řešit pomocí nomogramu s orientovanou průsvitkou.

Summary

NOMOGRAPHICAL REPRESENTATION OF THE SYSTEM OF FOUR EQUATIONS IN PARTICULAR FORM

JÁN PIDANY

This paper derives the necessary and sufficient conditions for the system of equations

$$\begin{aligned} x_7 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \\ x_8 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,, \\ x_9 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,, \\ x_{10} &= l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,, \end{aligned}$$

to be transformable into the form

$$\begin{aligned} A_{1,2} + A_{3,4} &= A_{7,8} - A_{5,6} = A_{9,10} - A_{11,12}\,, \\ B_{1,2} + B_3 \quad &= B_{7,8} - B_5 \quad = B_{9,10} - B_{11}\,. \end{aligned}$$

These equations can be constructed with the help of nomograms with oriented transparency.

Адрес автора: Ján Pidany, Katedra Matematiky SFVŠT, Nám. Februárového víť. č. 9, Košice.