Jan Kouba; Zbyněk Nádeník

Geodätische Linie und Gegennormalschnitte. II

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 3, 264–269

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103169`

GEODÄTISCHE LINIE UND GEGENNORMALSCHNITTE II

JAN KOUBA und ZBYNĚK NÁDENÍK

(Eingelangt am 26. Mai 1967.)

Diese Note knüpft eng an [7] an. Besonders behalten wir alle Voraussetzungen und Bezeichnungen aus dem Anfang der Einleitung in [7].

Wir bezeichnen noch mit v (bzw. v^*) denjenigen Winkel im Punkt O zwischen der Geodätischen g und dem Normalschnitt n (bzw. n^*), welcher für $Q \to O$ (d.h. $s \to 0$) gegen Null strebt. Infolge der schon in [7] erklärten Gründe ist die Reduktion des Azimuts des Normalschnittes auf das Azimut der Geodätischen eine wichtige Aufgabe der höheren Geodäsie. Im Zusammenhang mit dieser Reduktion ist das Studium der Beziehungen zwischen den Winkeln v und v^*. Es gelten diese Sätze:

1. *Falls im Punkt O die Konstante* (1) *aus* [7] *von Null verschieden ist, so gilt*

$$\lim_{s \to 0} v/v^* = \tfrac{1}{2}\,.$$

2. *Der Punkt O sei nichtparabolisch und kein Nabelpunkt. Geht von ihm die Geodätische g in Richtung einer solchen Krümmungslinie aus, welche im Punkt O die von Null verschiedene geodätische Krümmung besitzt, so ist*

$$\lim_{s \to 0} v/v^* = \tfrac{1}{5}\,.$$

3. *Der Punkt O sei ein isolierter Nabelpunkt. Wenn die geodätische Krümmung der Krümmungslinie, welche in O die Geodätische g berührt, in O von Null verschieden ist und wenn ebenfalls die Ableitung in O in Richtung von g des Unterschiedes der Hauptkrümmungen nicht verschwindet, dann ist*

$$\lim_{s \to 0} v/v^* = \tfrac{1}{9}\,.$$

Der Inhalt des Satzes 1 ist in den Büchern über höhere Geodäsie – unter Beschränkung auf das Rotationsellipsoid, welche wieder ganz unwesentlich ist – in der Regel durch die nicht völlig korrekte Behauptung erfasst, dass „die Geodätische die Winkel zwischen den Gegennormalschnitten drittelt". Die Ungenauigkeit dieser Behauptung, ja sogar ihre offensichtliche Unrichtigkeit, falls die Gegennormalschnitte in den Punkten eines Parallelkreises konstruiert sind, hat den zweiten Verfasser in [5] zu einer genauen im Satz 1 angeführten Formulierung angeregt. In [5] ist auch der Satz 2 (in einer anderen Form) hergeleitet worden, und zwar mittels der einfachsten Methoden der Differentialgeometrie, was begreiflich längere Rechnungen zur Folge gehabt hat. In [6] ist ein anderes Verfahren zum Beweis des Satzes 1 benutzt worden: Die Anwendung der Pfaffschen Formen hat eine kurze Herleitung der kanonischen Gleichungen einer Geodätischen ermöglicht und aus diesen ergibt sich der Grenzwert im Satz 1.

In der vorliegenden Note beweisen wir auf ähnliche kurze Weise auch den Satz 2 und als ein neues Ergebnis noch den Satz 3. Zum Schluss untersuchen wir die Situation auf dem dreiachsigen Ellipsoid (vgl. dazu [5], Abschn. 7).

1. Für den Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ und das Darboux-Dreibein $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{N}$ unserer Fläche Π gilt in der üblichen Cartanschen Symbolik

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} = \omega_1\mathbf{t}_1 + \omega_2\mathbf{t}_2\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{t}_1 &= \phantom{-\omega_{12}\mathbf{t}_1} + \omega_{12}\mathbf{t}_2 + \omega_{13}\mathbf{N}\,, \quad \omega_{13} = R_1^{-1}\omega_1\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{t}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{t}_1 \phantom{+ \omega_{12}\mathbf{t}_2} + \omega_{23}\mathbf{N}\,, \quad \omega_{23} = R_2^{-1}\omega_2\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{N} &= -\omega_{13}\mathbf{t}_1 - \omega_{23}\mathbf{t}_2\,;
\end{aligned}$$

wo alle ω gewisse Pfaffsche Formen in u, v sind und R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien bezeichnen.

Für eine Geodätische g mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, mit dem Tangentenvektor $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cos A + \mathbf{t}_2 \sin A$ und mit der Bogenlänge s gilt $\omega_1 = \cos A\, \mathrm{d}s$, $\omega_2 = \sin A\, \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}A + \omega_{12} = 0$; dem Punkt $O \in g$ ordnen wir freilich den Ortsvektor $\mathbf{r}(0)$ zu.

Die Krümmung des Normalschnittes in Richtung von $\mathbf{t}$ ist $R^{-1} = R_1^{-1} \cos^2 A + R_2^{-1} \sin^2 A$. Weiter ist $\omega_{12} = (g_1 \cos A + g_2 \sin A)\, \mathrm{d}s$, wo g_1, g_2 die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien sind. Die Ableitung in Richtung von $\mathbf{t}$ ist im folgenden stets mit einem Strich bezeichnet.

Nach einer längeren, aber sonst mechanischen Rechnung erhalten wir fortschreitend auf Grund der vorangeführten Beziehungen, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \mathbf{t}_1 \cos A + \mathbf{t}_2 \sin A\,,\\
\mathbf{r}'' &= \mathbf{N}\frac{1}{R}\,,\\
\mathbf{r}''' &= -\mathbf{t}_1 \frac{\cos A}{RR_1} - \mathbf{t}_2 \frac{\sin A}{RR_2} + \mathbf{N}\left(\frac{1}{R}\right)',\\
\mathbf{r}^{\mathrm{IV}} &= \mathbf{t}_1(.) + \mathbf{t}_2\left\{\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}\frac{\cos A}{R}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + (.)\sin A\right\} +\\
&\quad + \mathbf{N}\left\{\left(\frac{1}{R}\right)'' - \frac{1}{R}\left(\frac{\cos^2 A}{R_1^2} - \frac{\sin^2 A}{R_2^2}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}^{\mathrm{V}} = \mathbf{t}_1\,(.) + \mathbf{t}_2 \left\{(.)\sin A + \left[\frac{2\omega_{12}}{R_1\,\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{3}{R}\right)' + \left(\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}\right)'\frac{1}{R}\right)\right]\cos A\right\} +$$

$$+ \boldsymbol{N}\left\{\left(\frac{1}{R}\right)''' + \left[-\frac{3}{R_1^2}\left(\frac{1}{R}\right)' - \frac{3}{RR_1}\left(\frac{1}{R_1}\right)'\right]\cos^2 A + (.)\sin^2 A + (.)\sin 2A\right\};$$

die Koeffizienten $(.)$ werden uns nicht interessieren. Fussend auf diese Gleichungen kann man sofort die kanonischen Gleichungen einer Geodätischen aufschreiben (vgl. [4], S. 45).

2. Die Gleichungen einer Geodätischen in dem durch das Darboux-Dreibein $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\boldsymbol{N}$ im Punkt O mit der Bogenlänge $s = 0$ bestimmten Koordinatensystem (die Achse x bzw. y bzw. z ist die Trägergerade des Vektors $\mathbf{t}_1$ bzw. $\mathbf{t}_2$ bzw. $\boldsymbol{N}$, mit welchem sie gleichsinnig orientiert ist) sind deshalb nach Abschn. 1 für $A = 0$ (der Kürze halber setzen wir $[\ldots]|_{s=0} = [\ldots]_0$)

(2,1)

$$x = s - \frac{s^3}{3!}\left[\frac{1}{R_1^2}\right]_0 + [4],$$

$$y = \frac{s^4}{4!}\left[\frac{g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right]_0 + \frac{s^5}{5!}\left[\frac{2g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)' + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(.)\right]_0 + [6],$$

$$z = \frac{s^2}{2!}\left[\frac{1}{R_1}\right]_0 + \frac{s^3}{3!}\left[\left(\frac{1}{R}\right)'\right]_0 + \frac{s^4}{4!}\left[\left(\frac{1}{R}\right)'' - \frac{1}{R_1^3}\right]_0 + [5].$$

Die Hauptnormale unserer Geodätischen (folglich auch die Flächennormale) in ihrem Punkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, dessen Koordinaten in (2,1) gegeben sind, hat die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{X}(\lambda) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty). \tag{2,2}$$

Die dritte Gleichung (2,1) ermöglicht, den Parameter λ_0 des Schnittpunktes Q^* der Geraden (2,2) mit der Tangentenebene τ im Punkt O (d.h. mit der von den in O gebundenen Vektoren $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ aufgespannten Ebene) auszurechnen:

$$\lambda_0 = -z : \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\left[R_1\left(\frac{1}{R}\right)'\right]_0 + [4]. \tag{2,3}$$

Das Einsetzen aus (2,3) in (2,2) und die Benutzung der zwei ersten Gleichungen (2,1) liefert die Koordinaten x^*, y^* des Schnittpunktes Q^*:

(2,4)

$$x^* = s + \frac{s^3}{3!}\left[\frac{1}{R_1^2}\right]_0 + [4],$$

$$y^* = -\frac{5s^4}{4!}\left[\frac{g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right]_0 - \frac{s^5}{5!}\left[\frac{18g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)' + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(.)\right]_0 + [6].$$

Infolge (2,1) ist für genügend kleines $|s|$

$$\text{(2,5)} \qquad \operatorname{tg} v = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{s^3}{4!}\left[\frac{g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right]_0 + [4]\right|.$$

Weil die Verbindungslinie OQ^* die Tangente von $\bar{n}^*$ im Punkt O ist, so ist nach (2,4)

$$\text{(2,6)} \qquad \operatorname{tg} v^* = \left|\frac{y^*}{x^*}\right| = \left|\frac{5s^3}{4!}\left[\frac{g_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right]_0 + [4]\right|.$$

Aus (2,6) und (2,5) folgt der Satz 2.

3. Behufs des Beweises des Satzes 3 bedenken wir: Zufolge seiner Voraussetzungen existiert die Grenzlage im Punkt O des Darboux-Dreibeins, dessen Scheitel längs der Geodätischen g gegen O strebt, und diese Grenzlage bestimmt – ähnlich wie im Beweis des Satzes 2 – ein orthogonales Koordinatensystem mit dem Aufpunkt O, mit der x-Achse in der Tangente der Geodätischen g und mit der z-Achse in der Flächennormale von Π. Wir erhalten die Gleichung der Geodätischen g in diesem System, wenn wir $R_1|_{s=0} = R_2|_{s=0}$ in (2,1) setzen. (Die eingehende Durchführung des angedeuteten Grenzüberganges kann ausgelassen werden.) Wenn wir dann auf ganz ähnliche Weise wie im Beweis des Satzes 2 verfahren, finden wir für die Winkel v und v^* die Beziehungen

$$\operatorname{tg} v = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{s^4}{5!}\left[\frac{2}{R_1} g_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)'\right]_0 + [5]\right|,$$

$$\operatorname{tg} v^* = \left|\frac{y^*}{x^*}\right| = \left|\frac{s^4}{5!}\left[\frac{18}{R_1} g_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)'\right]_0 + [5]\right|.$$

Der Satz 3 ist ihre einfache Folge.

4. Jetzt sei die Fläche Π ein dreiachsiges Ellipsoid. Falls die Punkte O und Q in seiner Symmetrieebene sind, so ist die Situation ganz trivial; deshalb werden wir diese Lage ausschliessen. Das Ellipsoid mit den Halbachsen $a > b > c > 0$, auf dem die Krümmungslinien als Parameterkurven u, $v =$ konst. $(a^2 > u > b^2 >$

$> v > c^2$) eingeführt sind, hat 1) in dem Grundkoordinatensystem die Parametergleichungen

$$(4,1) \qquad x = \pm \left[\frac{a^2(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{cycl.} \quad (x \to y \to z,\ a \to b \to c)\,,$$

2) die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$(4,2) \quad E = \frac{u(u - v)}{4(a - u)(b - u)(c - u)}\,, \quad F = 0\,, \quad G = \frac{v(v - u)}{4(a - v)(b - v)(c - v)}$$

und 3) die Hauptkrümmungen

$$(4,3) \qquad R_1^{-1} = abc(u^3 v)^{-\frac{1}{2}}\,, \quad R_2^{-1} = abc(uv^3)^{-\frac{1}{2}}$$

(siehe [2], S. 229); folglich in den Nabelpunkten $u = b = v$. Schliesslich die geodätische Krümmung der Parameterlinien ist bekanntlich

$$(4,4) \qquad -(EG)^{-\frac{1}{2}} \,.\, \partial\sqrt{G}/\partial u \quad \text{bzw.} \quad -(EG)^{-\frac{1}{2}} \,.\, \partial\sqrt{E}/\partial v\,.$$

Falls O kein Nabelpunkt ist und falls die Geodätische g nicht in einer Hauptrichtung von ihm ausgeht, so ist die Konstante α aus (1) in [7] offensichtlich von Null verschieden. Daher gilt der Satz 1.

Wenn O kein Nabelpunkt ist, d.h. für $u > v$, ergibt sich aus (4,2) und (4,4), dass die geodätische Krümmung der Krümmungslinien in O nicht verschwindet. Für eine von O in einer Hauptkrümmungsrichtung ausgehende Geodätische gilt demnach der Satz 2.

Endlich sei O ein Nabelpunkt. Weiter seien $u = u(s)$, $v = v(s)$ die Gleichungen der von ihm ausgehenden Geodätischen, folglich $b = u(0)$, $b = v(0)$. Unter Zuhilfenahme von (4,1) ist leicht einzusehen, dass die Richtung $\mathrm{d}u|_{s=0} : \mathrm{d}v|_{s=0} = 1$ in der Symmetrieebene $y = 0$ unseres Ellipsoids ist. Wenn wir also den obenerwähnten trivialen Fall vermeiden, so ist $\mathrm{d}u/\mathrm{d}s|_{s=0} \neq \mathrm{d}v/\mathrm{d}s|_{s=0}$. Aus (4,3) folgt nach einer elementaren Rechnung

$$\partial(R_1^{-1} - R_2^{-1})/\partial u|_{u=v=b} = -\partial(R_1^{-1} - R_2^{-1})/\partial v|_{u=v=b} \neq 0\,,$$

so dass $\mathrm{d}(R_1^{-1} - R_2^{-1})/\mathrm{d}s|_{s=0} \neq 0$. Aber die geodätische Krümmung der Krümmungslinie im Punkt P unserer Geodätischen wird für $P \to O$ uneigentlich; dies folgt leicht aus (4,2) und (4,4) und stimmt mit der Tatsache zusammen, dass die Krümmungslinien die geodätischen Ellipsen und Hyperbeln mit dem Brennpunkt O sind (siehe [2], S. 236). Folglich genügt der Satz 3 nicht zur Beherrschung der Situation in einer Umgebung eines Nabelpunktes auf einem dreiachsigen Ellipsoid.

Literatur

[1] *C. F. Baeschlin:* Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.
[2] *L. P. Eisenhart:* A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. New York 1960.
[3] *F. R. Helmert:* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Bd. I, Leipzig 1880 und 1962.
[4] *F. Hopfner:* Grundlagen der höheren Geodäsie. Wien 1949.
[5] *Z. Nádeník:* O úhlech mezi geodetickou čarou a protějšími normálními řezy. Geodetický a kartografický sborník, Bd. 9, Praha 1963, 71—75.
[6] *Z. Nádeník:* Über Gegenvertikalschnitte und geodätische Linie. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, *63* (1965), 401—405.
[7] *Z. Nádeník und L. Zajíček:* Geodätische Linie und Gegennormalschnitte I. Apl. mat. *13* (1968), 258—263.

Výtah

GEODETICKÁ ČÁRA A PROTĚJŠÍ NORMÁLNÍ ŘEZY II

JAN KOUBA a ZBYNĚK NÁDENÍK

Jsou vyšetřovány limitní vztahy úhlů mezi geodetikou a protějšími normálními řezy v bodech O a Q při $Q \to O$ i v případech, kdy geodetika jde z bodu O v hlavním směru nebo kdy bod O je kruhový.

Резюме

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И ВЗАИМНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ II

ЯН КОУБА (JAN KOUBA) и ЗБЫНЕК НАДЕНИК (ZBYNĚK NÁDENÍK)

Изучаются предельные соотношения углов между геодезической линией и взаимными нормальными сечениями в точках O и Q для $Q \to O$ тоже в случаях, когда геодезическая линия идет из точки O в главном направлении или когда точка O омбилическая.

Anschrift der Verfasser: Ing. Jan Kouba, Doc. dr. *Zbyněk Nádeník* CSc., Praha 2, Trojanova 13, České vysoké učení technické.