Aplikace matematiky

Jaroslav Záhora

Номограммы с ориентированным транспарантом, с контактами касания и круговыми системами помеченных линий

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 376–387

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103184

SVAZEK 13 (1968) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 5

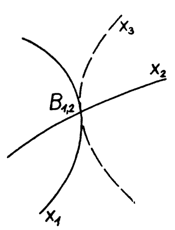
НОМОГРАММЫ С ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ, С КОНТАКТАМИ КАСАНИЯ И КРУГОВЫМИ СИСТЕМАМИ ПОМЕЧЕННЫХ ЛИНИЙ

ЯРОСЛАВ ЗАГОРА (JAROSLAV ZÁHORA)

(Поступило в редакцию 3/VII 1967 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья приводит номограммы с неподвижным листом π и с одним ориентированным прозрачным транспарантом π'. Предполагают, что положение транспаранта на неподвижном листе можно провести с помощью помеченных фигур на листах π и π', не применяя дальнейших фигур на третьем листе и не рисуя никаких дальнейших конструкций на некотором листе номограммы. По этим предположениям определяется положение ориентированного транспаранта на неподвижном листе двумя простыми контактами или одним двуконтактом. Третий (простой) контакт является решающим контактом.



Черт. 1. Смешанный двуконтакт $k_1(x_2) \models\!\dashv k'_3$.

Мы будем преимущественно применять контакты касания. Простой контакт касания возникнет, если напр. кривая $k_1 \in \pi$ касается кривой $k'_3 \in \pi'$ в некоторой (ближе неопределенной) точке. Этот контакт обозначаем $k_1 \vdash\!\dashv k'_3$. Если точка прикосновения на одной из кривых (напр. k_1) определена, мы говорим о двуконтакте. (Черт. 1.) Положение точки прикосновения на кривой k_1 может зависеть от дальнейшей переменной x_2, т. е. точка прикосновения может являться точкой $B_{1,2}$ бинарного поля (x_1, x_2) и выше приведенный двуконтакт состоит из простого точечного контакта $B_{1,2} \vdash\!\dashv k'_3$ и из простого контакта касания $k_1 \vdash\!\dashv k'_3$. Такой двуконтакт смешанного типа мы обозначим $k_1(x_2) \models\!\dashv k'_3$.

2. НОМОГРАММЫ С ТРЕМЯ ПРОСТЫМИ КОНТАКТАМИ КАСАНИЯ

2.1. Предположим, что на неподвижном листе π — три системы окружностей

$$k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2\,, \quad i = 1, 3, 5 \tag{1}$$

и на транспаранте π' — три системы оркужностей

$$(2) \qquad k'_j \equiv (\xi' - f_j)^2 + (\eta' - g_j)^2 = h_j^2\,, \quad j = 2, 4, 6$$

и что решение находится по контактам

$$(3) \qquad k_1 \mapsto\!\!\dashv k'_2\,; \quad k_3 \mapsto\!\!\dashv k'_4; \quad k_5 \mapsto\!\!\dashv k'_6\,.$$

Если для выполнения этих контактов надо двинуть транспарант на M единиц длины в направлении оси ξ и на N единиц длины в направлении оси η, имеет место

$$(4) \qquad \xi' = \xi - M\,, \quad \eta' = \eta - N\,.$$

Примечание 2.1. Если окружности k_i и k'_j касаются, имеет место

$$(5) \qquad (M + f_j - f_i)^2 + (N + g_j - g_i)^2 = (h_i + \varepsilon h_j)^2\,,$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Это прикосновение внешнее (внутреннее), если

$$\varepsilon h_i h_j > 0 \quad (\varepsilon h_i h_j < 0)\,.$$

Если контакты (3) выполнены, имеют место уравнения

$$(6) \qquad \begin{aligned} (M + F_2)^2 + (N + G_2)^2 &= H_2^2\,,\\ (M + F_4)^2 + (N + G_4)^2 &= H_4^2\,,\\ (M + F_6)^2 + (N + G_6)^2 &= H_6^2\,, \end{aligned}$$

где

$$(7) \qquad \begin{aligned} F_2 &= f_2 - f_1\,, \quad F_4 = f_4 - f_3\,, \quad F_6 = f_6 - f_5\,,\\ G_2 &= g_2 - g_1\,, \quad G_4 = g_4 - g_3\,, \quad G_6 = g_6 - g_5\,,\\ H_2 &= h_1 + \varepsilon_1 h_2\,, \quad H_4 = h_3 + \varepsilon_2 h_4\,, \quad H_6 = h_5 + \varepsilon_3 h_6\,. \end{aligned}$$

Исключением переменных M и N из системы (6) получим каноническую форму, изображенную нашей номограммой. Сначала исключим из уравнений (6) квадратные члены вычитанием второго уравнения из первого, потом третьего уравнения из первого и наконец третьего уравнения из второго. Получим систему

$$(8) \qquad \begin{aligned} 2M(F_2 - F_4) + 2N(G_2 - G_4) &= H_2^2 - F_2^2 - G_2^2 - H_4^2 + F_4^2 + G_4^2\,,\\ 2M(F_2 - F_6) + 2N(G_2 - G_6) &= H_2^2 - F_2^2 - G_2^2 - H_6^2 + F_6^2 + G_6^2\,,\\ 2M(F_4 - F_6) + 2N(G_4 - G_6) &= H_4^2 - F_4^2 - G_4^2 - H_6^2 + F_6^2 + G_6^2\,. \end{aligned}$$

Если умножить первое уравнение системы (8) на функцию $-G_6$, второе уравнение на G_4 и третье уравнение на $-G_2$ и если сосчитать таким образом оформленные уравнения, мы получим

$$(9) \qquad 2M \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ F_4, & G_4, & 1 \\ F_6, & G_6, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ 1, & G_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ 1, & G_6, & F_6^2 + G_6^2 - H_6^2 \end{vmatrix}.$$

Если умножить первое уравнение системы (8) на функцию F_6, второе уравнение на $-F_4$ и третье уравнение на F_2 и если сосчитать таким образом оформленные уравнения, мы получим уравнение

$$(10) \qquad 2N \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ F_4, & G_4, & 1 \\ F_6, & G_6, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_2, & 1, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & 1, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ F_6, & 1, & F_6^2 + G_6^2 - H_6^2 \end{vmatrix}.$$

Далее исключим из системы (6) линейные члены. Этого можно добиться посредством умножения первого уравнения системы (6) на определитель $\begin{vmatrix} F_4, & G_4 \\ F_6, & G_6 \end{vmatrix}$, второго уравнения на определитель $\begin{vmatrix} F_6, & G_6 \\ F_2, & G_2 \end{vmatrix}$ и третьего уравнения на определитель $\begin{vmatrix} F_2, & G_2 \\ F_4, & G_4 \end{vmatrix}$. Если сосчитать уравнения полученные этим путем, мы получим уравнение

$$(11) \qquad (M^2 + N^2) \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ F_4, & G_4, & 1 \\ F_6, & G_6, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & H_2^2 - F_2^2 - G_2^2 \\ F_4, & G_4, & H_4^2 - F_4^2 - G_4^2 \\ F_6, & G_6, & H_6^2 - F_6^2 - G_6^2 \end{vmatrix}.$$

Путем исключения переменных M и N из уравнений (9), (10), (11) мы получим искомую каноническую форму

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} 1, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ 1, & G_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ 1, & G_6, & F_6^2 + G_6^2 - H_6^2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} F_2, & 1, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & 1, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ F_6, & 1, & F_6^2 + G_6^2 - H_6^2 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ 4 \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ F_4, & G_4, & 1 \\ F_6, & G_6, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & G_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ F_6, & G_6, & F_6^2 + G_6^2 - H_6^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Из отношения (7) вытекает, что функции H_2 или H_4 или H_6 зависят от ε_1 или ε_2 или ε_3, где всякое ε_i может быть равно $+1$ или -1. Уравнение (12) изображает 8 отношений, отличающихся лишь разными вариациями значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Результат можно изложить следующим предложением:

Предложение 1. *Номограмма с шестью системами помеченных окружностей* (1) (2), *с контактами касания* (3), *изображает восемь отношений* (12), *отличающихся лишь различными вариациями значений* $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$.

Примечание 2.2. Для номографирования одного из восьми отношений (12), которое принадлежит определенному подбору значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ нужно привести окружности $k_i \mapsto k'_{i+1}$, где $i \in \{1, 3, 5\}$ во внешний (внутренний) контакт касания в случае, что имеет место $\varepsilon_{(i+1)/2} h_i h_{i+1} > 0$ ($\varepsilon_{(i+1)/2} h_i h_{i+1} < 0$).

2.2. Подобно тому как в 2.1. можно получить отношение, изображенное номограммой, на неподвижном листе которой находятся две системы окружностей

(13) $$k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 \quad (i = 1, 3)$$

и система прямых

(14) $$p_5 \equiv a_5\xi + b_5\eta + c_5 = 0\,,$$

на прозрачном листе которой находятся три системы окружностей (2) и контактами касания этой номограммы являются

(15) $$k_1 \mapsto k'_2\,; \quad k_3 \mapsto k'_4\,; \quad p_5 \mapsto k'_6\,.$$

Из первых двух контактов (15) опять вытекает действительность первого и второго уравнения системы (6) и из контакта $p_5 \mapsto k'_6$ вытекает

(16) $$a_5(M + f_6) + b_5(N + g_6) + c_5 = \varepsilon_3 h_6 \sqrt{(a_5^2 + b_5^2)}\,,$$

где $\varepsilon_3 = \pm 1$.

Примечание 2.3. Если прямая $p_i \equiv a_i\xi + b_i\eta + c_i = 0$ касается окружности $k'_{i+1} \equiv (\xi' - f_{i+1})^2 + (\eta' - g_{i+1})^2 = h_{i+1}^2$, имеет место $a_i(M + f_{i+1}) + b_i(N + g_{i+1}) + c_i = \varepsilon h_{i+1} \sqrt{(a_i^2 + b_i^2)}$, где $\varepsilon = \pm 1$. Если для некоторых двух значений x_i, x_{i+1} имеет место $\varepsilon c_i h_{i+1} > 0$ ($\varepsilon c_i h_{i+1} < 0$), находится центр окружности k'_{i+1} и начало системы координат (ξ, η) в той же полуплоскости (в разных полуплоскостях) общим пределом которых является прямая p_i.

Каноническую форму, изображенную этой номограммой, получим путём исключения переменных M и N из первых двух уравнений системы (6) и из уравнения (16). Исключение можно провести таким же образом как в 2.1. Результатом является отношение

(17) $$\begin{vmatrix} 1, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ 1, & G_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ 0, & b_5, & P_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} F_2, & 1, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & 1, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ a_5, & 0, & P_5 \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ 4 \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ F_4, & G_4 & 1 \\ a_5, & b_5, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & G_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \\ a_5, & b_5, & P_5 \end{vmatrix} = 0\,,$$

где

$$(18) \qquad P_5 = 2(a_5 f_6 + b_5 g_6 + c_5 - \varepsilon_3 h_6 \sqrt{(a_5^2 + b_5^2)}.$$

Имеет место следующее предложение:

Предложение 2. *Номограмма с помеченными линиями* (13), (14) *и* (2), *с контактами касания* (15) *изображает восемь отношений* (17) *отличающихся лишь разными вариациями значений* $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$.

Примечание 2.4. Определение функций F_j, G_j, H_j для $j = 2, 4$ см. (7). Геометрическое значение чисел ε_1 и ε_2 см. примечание 2.1, геометрическое значение ε_3 см. примечание 2.3.

2.3. Предположим теперь, что на неподвижной плоскости находится одна система окружностей

$$(19) \qquad k_1 \equiv (\xi - f_1)^2 + (\eta - g_1)^2 = h_1^2$$

и две системы прямых

$$(20) \qquad p_i \equiv a_i\xi + b_i\eta + c_i = 0 \quad (i = 3, 5),$$

что на транспаранте находятся три системы окружностей (2) и что контактами касания являются

$$(21) \qquad k_1 \vdash\!\dashv k_2'\,; \quad p_3 \vdash\!\dashv k_4'\,; \quad p_5 \vdash\!\dashv k_6'\,.$$

Из контакта $k_1 \vdash\!\dashv k_2'$ вытекает справедливость уравнения

$$(22) \qquad (M + F_2)^2 + (N + G_2)^2 = H_2^2\,.$$

(Определение функций F_2, G_2, H_2 см. (7).)

Из второго и третьего контакта (21) вытекает справедливость уравнений

$$(23) \qquad a_3(M + f_4) + b_3(N + g_4) + c_3 = \varepsilon_2 h_4 \sqrt{(a_3^2 + b_3^2)}\,,$$

$$(24) \qquad a_5(M + f_6) + b_5(N + g_6) + c_5 = \varepsilon_3 h_6 \sqrt{(a_5^2 + b_5^2)}\,.$$

Исключением переменных M и N из уравнений (22), (23) и (24) получим каноническую форму

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} a_3, & P_3 \\ a_5, & P_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3, & P_3 \\ b_5, & P_5 \end{vmatrix}^2 + 4\begin{vmatrix} a_3, & b_3 \\ a_5, & b_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & F_2 + G_2 - H_2^2 \\ a_3, & b_3, & P_3 \\ a_5, & b_5, & P_5 \end{vmatrix} = 0\,,$$

где

$$(26) \qquad P_i = 2(a_i f_{i+1} + b_i g_{i+1} + c_i - \varepsilon_{(i+1)/2} h_{i+1} \sqrt{(a_i^2 + b_i^2)}\,, \quad i = 1, 3, 5\,.$$

Уравнение (25) можно еще привести к виду с формальной стороны аналогичному уравнениям (12) и (17), т.е. к виду

$$(25') \qquad \begin{vmatrix} 1, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ 0, & b_3, & P_3 \\ 0, & b_5, & P_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} F_2, & 1, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ a_3, & 0, & P_3 \\ a_5, & 0, & P_5 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ 4 \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & 1 \\ a_3, & b_3, & 0 \\ a_5, & b_5, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_2, & G_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ a_3, & b_3, & P_3 \\ a_5, & b_5, & P_5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Из приведенного вытекает следующее

Предложение 3. *Номограмма с контактами касания* (21), *с помеченными фигурами* (19), (20) *и* (2) *изображает восемь отношений* (25), *отличающихся лишь различными вариациями значений* $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$.

Примечание 2.5. Определение функций F_2, G_2, H_2 см. (7), определение P_3, P_5 см. (26), геометрическое значение числа ε_1 см. примечание 2.1, геометрическое значение чисел ε_2 и ε_3 см. примечание 2.3.

2.4. Если на неподвижной плоскости находятся три системы прямых

$$(27) \qquad p_i \equiv a_i\xi + b_i\eta + c_i = 0 \,, \quad i = 1, 3, 5 \,,$$

на транспаранте три системы окружностей (2) и если контактами касания являются

$$(28) \qquad p_1 \vdash\!\dashv k_2' \,; \quad p_3 \vdash\!\dashv k_4' \,; \quad p_5 \vdash\!\dashv k_6' \,,$$

изображает номограмма каноническую форму, которую получим исключением M и N из системы управлений

$$(29) \qquad a_i(f_{i+1} + M) + b_i(g_{i+1} + N) + c_i - \varepsilon_{(i+1)/2} h_{i+1} \sqrt{(a_i^2 + b_i^2)} = 0 \,, \quad i = 1, 3, 5 \,.$$

Результатом выше приведенного исключения является

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & P_1 \\ a_3, & b_3, & P_3 \\ a_5, & b_5, & P_5 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

(Определение P_i приведено в (26).)

Имеет место следующее предложение:

Предложение 4. *Номограмма с контактами касания* (28), *с помеченными линиями* (27) *и* (2), *изображает восемь отношений* (30), *отличающихся лишь различными вариациями чисел* $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$.

(Геометрическое значение чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ см. примечание 2.3.)

Примечание 2.6. В уравнениях помеченных фигур номограмм приведенных в абзацах 2.2, 2.3, 2.4 были системы прямых выражены в общем виде $a_i\xi + b_i\eta + c_i = 0$, $i = 1, 3, 5$. Если применим нормальную форму $\xi \cos \varphi_i + \eta \sin \varphi_i - d_i = 0$, надо в канонических формах (17), (25) и (30) написать $\cos \varphi_i$ вместо a_i, $\sin \varphi_i$ вместо b и вместо P_i подставить выражение

$$(26') \qquad P_i = 2(f_{i+1} \cos \varphi_i + g_{i+1} \sin \varphi_i - d_i - \varepsilon_{(i+1)/2} h_{i+1}) .$$

Примечание 2.7. В номограммах приведенных в 2.1–2.4 находились на неподвижной плоскости системы окружностей или системы прямых и на транспаранте лишь системы окружностей. Можно тоже составить номограммы подобного типа, у которых системы прямых находятся и на неподвижной плоскости и на транспаранте. Канонические формы этих номограмм с точки зрения номографии несущественным образом отличаются от форм (25) или (30). Поэтому их здесь не приводим.

Примечание 2.8. Номограммы, приведенные в 2.1–2.4, позволяют вывести дальнейшие типы номограмм с тремя простыми контактами касания. На листах этих номограмм находится меньшее число помеченных фигур, некоторые из них приводятся в контакт касания несколько раз. Напр. в номограмме приведенной в 2.1 можно присоединить несколько дальнейших номограмм с редуцированным числом помеченных фигур. Если напр. устранить систему k'_6 из транспаранта и оставить все остальные помеченные фигуры и если применить контакт $k_5 \vdash\!\dashv k'_4$ вместо $k_5 \vdash\!\dashv k'_6$, получим номограмму отношения с пятью переменными. Каноническая форма этой номограммы получится из (12), если писать f_4 или g_4 или h_4 вместо f_6 или g_6 или h_6 и т. д.

3. НОМОГРАММЫ С ОДНИМ СМЕШАННЫМ ДВУКОНТАКТОМ И С ОДНИМ ПРОСТЫМ КОНТАКТОМ КАСАНИЯ

3.1. Предположим, что на неподвижной плоскости π находится бинарное поле

$$(31) \qquad \xi = f_1 + h_1 \cos \varphi_{1,2} , \quad \eta = g_1 + h_1 \sin \varphi_{1,2} ,$$

которое содержит систему окружностей $k_1 \equiv (\xi - f_1)^2 + (\eta - g_1)^2 = h_1^2$, помеченных значениями переменной x_1. Предположим далее, что на транспаранте находится система помеченных окружностей

$$(32) \qquad k'_3 \equiv \xi' = f_3 + h_3 \cos t , \quad \eta' = g_3 + h_3 \sin t$$

и что окружность, помеченная значением x_1 касается в точке (x_1, x_2) окружности помеченной значением x_3. Точка прикосновения окружности x_3 соответствует значению параметра $t = \varphi_{1,2} + k\pi$, где k – целое число. Если сверх того подставить $\xi' = \xi - M, \eta' = \eta - N$, можно исключить ξ и η из уравнений (31) и (32) и получить значения M и N, определяющие положение транспаранта на неподвижной плоскости. Таким образом получится

$$M = f_1 - f_3 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \cos \varphi_{1,2}, \quad N = g_1 - g_3 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \sin \varphi_{1,2}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \tag{33}$$

Примечание 3.1. Если для значений x_1, x_3 имеет место $\varepsilon_1 h_1 h_3 > 0$ $(\varepsilon_1 h_1 h_3 < 0)$, является прикосновение окружностей k_1 и k'_3, помеченных значениями x_1 и x_3 внутренним (внешним).

3.2. Пусть на неподвижной плоскости находится бинарное поле

$$\xi = f_1 - h_{1,2} \sin \varphi_1, \quad \eta = g_1 + h_{1,2} \cos \varphi_1, \tag{34}$$

линиями, помеченными значениями переменной x_1 которого являются прямые $p_1 \equiv \xi \cos \varphi_1 + \eta \sin \varphi_1 - \Delta = 0$, где

$$\Delta = f_1 \cos \varphi_1 + g_1 \sin \varphi_1 = \begin{vmatrix} f_1, & -\sin \varphi_1 \\ g_1, & \cos \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Пусть на транспаранте находится система помеченных окружностей (32) и пусть прямая помеченная значением x_1 касается в точке (x_1, x_2) окружности помеченной значением x_3. Потом точка прикосновения окружности x_3 соответствует значению параметра $t = \varphi_1 + k\pi$, где k-целое число и из уравнений (32) и (34) вытекает

$$M = f_1 - f_3 - h_{1,2} \sin \varphi_1 - \varepsilon_1 h_3 \cos \varphi_1, \quad N = g_1 - g_3 + h_{1,2} \cos \varphi_1 - \varepsilon_1 h_3 \sin \varphi_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \tag{35}$$

Примечание 3.2. Если для значений x_1, x_3 имеет место $\varepsilon_1 h_3 \Delta > 0$ $(\varepsilon_1 h_3 \Delta < 0)$, находится центр окружности k'_3 помеченной значением x_3 и начало системы координат (ξ, η) в той же (в разных) полуплоскостях, определенных прямой p_1 помеченной значением x_1.

3.3. Двуконтакты, приведенные в абзацах 3.1 и 3.2 определяют положение транспаранта в отношении неподвижной плоскости. Решающим контактом может являться опять простой контакт касания, особенно прикосновение двух окружностей $k_4 \vdash\!\dashv k'_5$ или прикосновение прямой и окружности $p_4 \vdash\!\dashv k'_5$ где

$$k_4 \equiv (\xi - f_4)^2 + (\eta - g_4)^2 = h_4^2, \tag{36}$$

$$k'_5 \equiv (\xi' - f_5)^2 + (\eta' - g_5)^2 = h_5^2, \tag{37}$$

$$p_4 \equiv a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 = 0. \tag{38}$$

В таблице 1 приведены уравнения помеченных фигур, контакты и канонические формы номограмм, полученных выше приведенным путем. Геометрическое значение числа $\varepsilon_1 = \pm 1$ см. примечание 3.1 и примечание 3.2, геометрическое значение числа $\varepsilon_2 = \pm 1$ см. примечание 2.1 и примечание 2.3.

Таблица 1

Уравнения помеченных фигур	Контакты	Каноническая форма
(31), (32); (36), (37)	$k_1(x_2) \models\!\!\dashv k'_3$; $k_4 \vdash\!\dashv k'_5$	$[f_5 - f_4 + f_1 - f_3 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \cos \varphi_{1,2}]^2 + [g_5 - g_4 + g_1 - g_3 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \sin \varphi_{1,2}]^2 = (h_4 + \varepsilon_2 h_5)^2$.
(31), (32); (38), (37)	$k_1(x_2) \models\!\!\dashv k'_3$; $p_4 \vdash\!\dashv k'_5$	$a_4[f_1 - f_3 + f_5 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \cos \varphi_{1,2}] + b_4[g_1 - g_3 + g_5 + (h_1 - \varepsilon_1 h_3) \sin \varphi_{1,2}] = \varepsilon_2 h_5 \sqrt{(a_4^2 + b_4^2)}$
(34), (32); (36), (37)	$p_1(x_2) \models\!\!\dashv k'_3$; $k_4 \vdash\!\dashv k'_5$	$(f_4 - f_5 + f_3 - f_1 + h_{1,2} \sin \varphi_1 + \varepsilon_1 h_3 \cos \varphi_1)^2 + (g_4 - g_5 + g_3 - g_1 - h_{1,2} \cos \varphi_1 + \varepsilon_1 h_3 \sin \varphi_1)^2 = (h_4 + \varepsilon_2 h_5)^2$
(34), (32); (38), (37)	$p_1(x_2) \models\!\!\dashv k'_3$; $p_4 \vdash\!\dashv k'_5$	$a_4(f_1 - f_3 + f_5 - h_{1,2} \sin \varphi_1 - \varepsilon_1 h_3 \cos \varphi_1) + b_4(g_1 - g_3 + g_5 + h_{1,2} \cos \varphi_1 - \varepsilon_1 h_3 \sin \varphi_1) = \varepsilon_2 h_5 \sqrt{(a_4^2 + b_4^2)}$

4. НОМОГРАММЫ С ДВИЖЕНИЕМ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ И С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ КОНТАКТАМИ КАСАНИЯ

4.1. Если транспарант π' подвижен лишь в направлении оси ξ, то его положение в отношении неподвижной плоскости π определено одним простым контактом касания. Разрешающим контактом может являться опять контакт касания. Предположим, что на неподвижной плоскости π находятся некоторые две из четырех систем

$$k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 , \quad i = 1, 3 , \tag{39}$$

$$p_i \equiv a_i \xi + b_i \eta + c_i = 0 , \quad i = 1, 3 , \tag{40}$$

и что на транспаранте π' находятся две системы окружностей

$$k'_j \equiv (\xi' - f_j)^2 + (\eta' - g_j)^2 = h_j^2 , \quad j = 2, 4 . \tag{41}$$

Уравнения помеченных линий, контакты и канонические формы этих номограмм приведены в таблице 2. Определение символов F_j, G_j, H_j $(j = 2, 4)$ см. (7), определение P_i $(i = 1, 3)$ см. (26), геометрическое значение чисел $\varepsilon_1 = \pm 1$ и $\varepsilon_2 = \pm 1$ см. примечание 2.1 и примечание 2.3.

Таблица 2

Уравнения помеченных фигур	Контакты	Каноническая форма
(39) для $i = 1,3$ (41) для $j = 2,4$	$k_1 \mapsto k'_2$; $k_3 \mapsto k'_4$	$\begin{vmatrix} 1, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ 1, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \end{vmatrix}^2 + 4(F_2 - F_4)\begin{vmatrix} F_2, & F_2^2 + G_2^2 - H_2^2 \\ F_4, & F_4^2 + G_4^2 - H_4^2 \end{vmatrix} = 0$
(39) для $i = 1$ (40) для $i = 3$, (41) для $j = 2,4$	$k_1 \mapsto k'_2$; $p_3 \mapsto k'_4$	$(2a_3F_2 - P_3)^2 = 4a_3^2(H_2^2 - G_2^2)$
(40) для $i = 1,3$, (41) для $j = 2,4$	$p_1 \mapsto k'_2$; $p_3 \mapsto k'_4$	$\begin{vmatrix} a_1, & P_1 \\ a_3, & P_3 \end{vmatrix} = 0$

5. НОМОГРАММЫ С ДВИЖЕНИЕМ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ И С ОДНИМ СМЕШАННЫМ ДВУКОНТАКТОМ

5.1. Положение транспаранта π' в отношении неподвижной плоскости π может определиться простым контактом $k_1 \mapsto k'_3$. Если точки одной из кривых, например k_1 помечены значениями дальнейшей переменнсй x_2, то посредством смешанного двуконтакта $k_1(x_2) \models k'_3$ номографируется отношение с тремя переменными.

Рассмотрим номограмму, на неподвижном листе которой находится или бинарное поле

$$\xi = f_1 + h_1 \cos\varphi_{1,2}\,, \quad \eta = g_1 + h_1 \sin\varphi_{1,2} \tag{42}$$

с системой окружностей k_1 помеченных значениями x_1, или бинарное поле

$$\xi = f_1 - u_{1,2} \sin\varphi_1\,, \quad \eta = g_1 + u_{1,2}\cos\varphi_1 \tag{43}$$

Таблица 3

Уравнения помеченных фигур	Контакты	Каноническая форма
(42) и (44)	$k_1(x_2) \models k'_3$	$(h_1 - \varepsilon_1 h_3)\sin\varphi_{1,2} = g_3 - g_1$
(42) и (45)	$k_1(x_2) \models p'_3$	$\varphi_{1,2} = \varphi_3 + k\pi$ (k-целое число)
(43) и (44)	$p_1(x_2) \models k'_3$	$g_1 - g_3 + u_{1,2}\cos\varphi_1 - \varepsilon_1 h_3 \sin\varphi_1 = 0$

с системой прямых p_1 помеченных значениями x_1. Предположим, что на транспаранте π' этой номограммы находится или система окружностей

$$k'_3 \equiv \xi' = h_3 \cos t + f_3 \,, \quad \eta' = h_3 \sin t + g_3 \,, \tag{44}$$

или система прямых

$$p'_3 \equiv \xi' \cos \varphi_3 + \eta' \sin \varphi_3 - d_3 = 0 \,. \tag{45}$$

Уравнения помеченных линий, контакты и канонические формы этих номограмм приведены в таблице 3. Значение числа $\varepsilon_1 = \pm 1$ см. примечание 3.1 и примечание 3.2.

Примечание 5.1. Кроме номограмм, приведенных в настоящей статье существуют дальнейшие подобные номограммы использующие одновременно точечные контакты и контакты касания. Посредством некоторых типов этих смешанных номограмм можно номографировать сравнительно простые и на практике применяемые канонические формы.

Литература

[1] *Hruška V.:* Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1952.

[2] *Jurga F.:* Nomografia a iné grafické metódy. Bratislava 1963.

[3] *Хованский Г. С.:* Номограммы с ориентированным транспарантом. Москва 1957.

[4] *Pleskot V.:* Nomografie. Praha 1963.

[5] *Pleskot V.:* Nomografické metody. Praha 1962.

[6] *Záhora J.:* Dotykové nomogramy s kružnicemi. Časopis pro pěstování matematiky č. 3 roč. *91* (1966).

Souhrn

DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S POSUVNÝM LISTEM A S KRUHOVÝMI SOUSTAVAMI ISOPLÉT

JAROSLAV ZÁHORA

Článek pojednává o nomogramech se dvěma listy, podkladem π a průsvitkou π', posuvnou ve dvou směrech. Jednoduchý dotykový kontakt, který vznikne, dotýká-li se křivka $k_1 \in \pi$ křivky $k'_3 \in \pi'$, je označen $k_1 \mapsto k'_3$. Je-li bod dotyku na křivce k_1 dán a závisí-li na hodnotě proměnné x_2, vznikne smíšený dvojkontakt $k_1(x_2) \models k'_3$. V článku jsou uvedeny zobrazovací rovnice a kanonické tvary nomogramů, jejichž soustavy isoplét jsou kružnice nebo přímky. Nejprve je pojednáno o nomogramech se třemi jednoduchými dotykovými kontakty a jsou uvedeny kanonické tvary (12),

(17), (25), (30) zobrazitelné těmito nomogramy. Dále je pojednáno o nomogramech s jedním smíšeným dvojkontaktem a s jedním jednoduchým dotykovým kontaktem. Kanonické tvary těchto nomogramů jsou uvedeny v tabulce 1.

Konečně je pojednáno o nomogramech s jedním posuvem. Kanonické tvary těchto nomogramů jsou v tabulkách 2 a 3. Do článku nejsou zahrnuty nomogramy smíšeného typu, využívající kromě dotykových kontaktů také kontaktů bodových.

Résumé

NOMOGRAMMES À CONTACT TANGENTIEL AYANT UNE FEUILLE GLISSABLE ET DES SYSTÈMES D'ISOPLÈTHES CIRCULAIRES

JAROSLAV ZÁHORA

L'article traite des nomogrammes ayant un fond π et une feuille transparente π', glissable en deux directions. On désigne $k_1 \vdash\!\dashv k'_3$ un contact tangentiel simple, c.-à-d. le contact des courbes $k_1 \in \pi$ et $k'_3 \in \pi'$. Si le point de contact sur la courbe k_1 est donné et dépend de la valeur de la variable x_2, on obtient un double contact mixte $k_1(x_2) \models\!\dashv k'_3$.

L'article traite des équations représentatives et des formes canoniques des nomogrammes, dont les systèmes d'isoplèthes sont des cercles où des droites. Tout d'abord, on traite des nomogrammes à trois contacts tangentiels simples qui représentent les formes canoniques (12), (17), (25) et (30). Ci-après, on traite des nomogrammes à un contact double et un contact tangentiel simple. Les formes canoniques de ces nomogrammes sont présentées par la table 1. Enfin, on traite des nomogrammes, dont les feuilles transparentes sont glissables dans une direction (des règles à calcul). Les formes canoniques de ces nomogrammes sont présentées par les tableaux 2 et 3. L'article ne traite pas des nomogrammes du type mixte, dans lesquels on emploie en dehors des contact tangentiels encore d'autres contacts.

Адресс автора: Jaroslav Záhora, Gorkého č. 42, Brno.