

# Aplikace matematiky

---

Jaroslav Záhora

Nomogramy adjungované k dotykovým a průsečkovým nomogramům majícím aspoň jeden systém křivých isoplet

*Aplikace matematiky*, Vol. 14 (1969), No. 3, 195–209

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103225>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NOMOGRAMY ADJUNGOVANÉ K DOTYKOVÝM  
A PRŮSEČÍKOVÝM NOMOGRAMŮM  
MAJÍCÍM ASPOŇ JEDEN SYSTÉM KŘIVÝCH ISOPLÉT

JAROSLAV ZÁHORA

(Došlo dne 19. prosince 1967)

1. ÚVOD

Rodem spojnicového nomogramu, který zobrazuje vztah

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

pro  $x \in \langle a, b \rangle$ ,  $y \in \langle c, d \rangle$ ,  $z \in \langle e, f \rangle$ , nazýváme počet křivých stupnic tohoto nomogramu. Pojem rodu lze definovat také pro průsečíkové a dotykové nomogramy.

**Definice 1.1.** Rodem průsečíkového (dotykového) nomogramu nazýváme počet systémů křivých isoplét tohoto nomogramu.

Poznámka 1.1. Je-li  $r$  rod průsečíkového nomogramu funkce (1), je  $0 \leq r \leq 3$ . Je-li  $t$  rod dotykového nomogramu funkce (1), je  $1 \leq t \leq 3$ . Dotykový nomogram rodu 1 je nomogram se dvěma křivými nebo přímými stupnicemi a s jedním systémem křivých isoplét. Průsečíkový nomogram rodu 0 je nomogram se třemi soustavami přímek atd.

2. DOTYKOVÉ NOMOGRAMY ADJUNGOVANÉ K PRŮSEČÍKOVÝM  
NOMOGRAMŮM RODU  $r \geq 1$

2.1. Budtež

$$(2) \quad f(\xi, \eta, x) = 0,$$

$$(3) \quad g(\xi, \eta, y) = 0,$$

$$(4) \quad h(\xi, \eta, z) = 0$$

systémy isoplét průsečíkového nomogramu rodu  $r \geq 1$  zobrazujícího funkci (1) a nechť např. (4) je systém křivých isoplét. Nechť  $x_i \in \langle a, b \rangle$  je libovolná hodnota

proměnné  $x$ . V průsečících  $(\xi_0, \eta_0)$  isopléty  $f(\xi, \eta, x_i) = 0$  s jednotlivými křivkami systému (4) sestrojme tečny

$$(5) \quad \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \xi} (\xi - \xi_0) + \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \eta} (\eta - \eta_0) = 0.$$

Tak získáme systém přímek, které závisí na jednom parametru  $z$  a buď obalují křivku (isoplétu), kterou označíme  $(x_i)$ , nebo procházejí pevným bodem, který rovněž označíme  $(x_i)$ . Probíhá-li  $x_i$  hodnoty z intervalu  $\langle a, b \rangle$ , získáme tímto postupem systém isoplét po případě stupnici  $\{(x_i)\}$ .

Nechť  $y_i \in \langle c, d \rangle$ . Tečny (5), sestrojené v průsečících isopléty  $g(\xi, \eta, y_i) = 0$  s jednotlivými křivkami systému (4) obalují křivku eventuálně procházejí bodem  $(y_i)$ . Probíhá-li  $y_i$  hodnoty z intervalu  $\langle c, d \rangle$ , získáme tak systém isoplét po případě stupnici  $\{(y_i)\}$ .

Je-li  $(x_i) \in \{(x_i)\}$ ,  $(y_i) \in \{(y_i)\}$  a je-li  $j$  přímý index takový, že  $j \vdash (x_i)$ ,  $j \vdash (y_i)$ , potom přímka  $j$  se dotýká jisté isopléty  $z_i$  ze systému (4) v bodě  $(\xi_0, \eta_0)$ , kterým procházejí isopléty  $x_i, y_i$  průsečíkového nomogramu. Odtud plyne, že tři systémy kótovaných útvarů  $\{(x_i)\}$ ,  $\{(y_i)\}$  a (4) tvoří dotkový nomogram téže funkce (1). Tento nomogram budeme nazývat dotkovým nomogramem adjungovaným k danému průsečíkovému nomogramu. Můžeme tedy vysloviti tuto definici:

**Definice 2.1.** Nechtě (2), (3), (4) jsou systémy isoplét průsečíkového nomogramu rodu  $r \geq 1$  zobrazujícího funkci (1). Nechtě (4) je systém křivých isoplét. Adjungovaným nomogramem k tomuto průsečíkovému nomogramu nazýváme dotkový nomogram, jehož jeden systém isoplét je (4) a jehož kótované útvary  $\{(x_i)\}$  resp.  $\{(y_i)\}$  jsou obálky tečen ke křivkám (4) sestrojeným v průsečících s isoplétami  $x_i$  resp.  $y_i$  původního průsečíkového nomogramu.

Poznámka 2.1. K průsečíkovému nomogramu rodu  $r$  existuje právě  $r$  adjungovaných dotkových nomogramů.

Rovnici kótovaného útvaru  $\{(x_i)\}$  získáme takto: z rovnice tečny (5) a z rovnic

$$(6) \quad h(\xi_0, \eta_0, z) = 0, \quad f(\xi_0, \eta_0, x) = 0$$

vyloučíme souřadnice  $\xi_0, \eta_0$  dotkového bodu a získáme tak rovnici přímky, závisící na dvou proměnných  $x, z$  jejíž tvar je

$$(7) \quad u_{1,3}\xi + v_{1,3}\eta + w_{1,3} = 0,$$

kde  $u_{1,3}, v_{1,3}, w_{1,3}$  jsou funkce proměnných  $x$  a  $z$ . Derivací rovnice (7) podle parametru  $z$  získáme

$$(8) \quad \frac{\partial u_{1,3}}{\partial z} \xi + \frac{\partial v_{1,3}}{\partial z} \eta + \frac{\partial w_{1,3}}{\partial z} = 0.$$

Nyní buď eliminujeme  $z$  z rovnic (7) a (8) a získáme tak rovnici kótovaného útvaru  $\{(x_i)\}$  ve tvaru  $\varphi(\xi, \eta, x) = 0$ , nebo parametr  $z$  v rovnicích (7) a (8) ponecháme a vy počteme  $z$  nich  $\xi$  a  $\eta$ . Označme

$$u'_{1,3} = \frac{\partial u_{1,3}}{\partial z}, \quad v'_{1,3} = \frac{\partial v_{1,3}}{\partial z}, \quad w'_{1,3} = \frac{\partial w_{1,3}}{\partial z}.$$

Pro  $\Delta = u_{1,3}v'_{1,3} - u'_{1,3}v_{1,3} \neq 0$  platí

$$(9) \quad \xi = \frac{v_{1,3}w'_{1,3} - v'_{1,3}w_{1,3}}{u_{1,3}v'_{1,3} - u'_{1,3}v_{1,3}}, \quad \eta = \frac{u'_{1,3}w_{1,3} - u_{1,3}w'_{1,3}}{u_{1,3}v'_{1,3} - u'_{1,3}v_{1,3}}.$$

Jsou-li výrazy na pravých stranách rovnic (9) pro určitou hodnotu  $x_i$  nezávislé na  $z$ , redukuje se příslušná obálka  $(x_i)$  na bod. Jsou-li tyto výrazy nezávislé na  $z$  pro každé  $x_i$ , je útvar  $\{(x_i)\}$  stupnicí.

Rovnici kótovaného útvaru  $\{(y_i)\}$  získáme podobně, vyjdeme-li z rovnic (5) a (10), kde

$$(10) \quad h(\xi_0, \eta_0, z) = 0, \quad g(\xi_0, \eta_0, y) = 0.$$

V některých případech je pro výpočet systémů  $\{(x_i)\}$ ,  $\{(y_i)\}$  výhodnější tento postup: z rovnic (5) a (11), kde

$$(11) \quad f(\xi_0, \eta_0, x) = 0, \quad g(\xi_0, \eta_0, y) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

vyloučíme  $\xi_0, \eta_0, z$ . Výsledek vyloučení je rovnice

$$(12) \quad u_{1,2}\xi + v_{1,2}\eta + w_{1,2} = 0$$

dvouparametrické množiny přímek, závislé na proměnných  $x$  a  $y$ . Množina přímek (12) obaluje dva systémy křivek, což jsou hledané soustavy isoplét  $\{(x_i)\}$ ,  $\{(y_i)\}$  adjungovaného dotykového nomogramu. Systém  $\{(x_i)\}$  vypočteme derivací rovnice (12) podle  $y$  a vyloučením  $y$  z rovnice (12) a z rovnice derivované nebo výpočtem  $\xi$  a  $\eta$  z těchto dvou lineárních rovnic. Podobně získáme systém  $\{(y_i)\}$ . Tohoto druhého způsobu se dá s výhodou použít u kartézského průsečíkového nomogramu rodu 1. Ukážeme to na průsečíkovém nomogramu součinnového tvaru

$$(13) \quad \varphi_3 = \varphi_1\varphi_2$$

o zobrazovacích rovnicích

$$(14) \quad \xi = \varphi_1, \quad \eta = \varphi_2,$$

$$(15) \quad \xi\eta = \varphi_3.$$

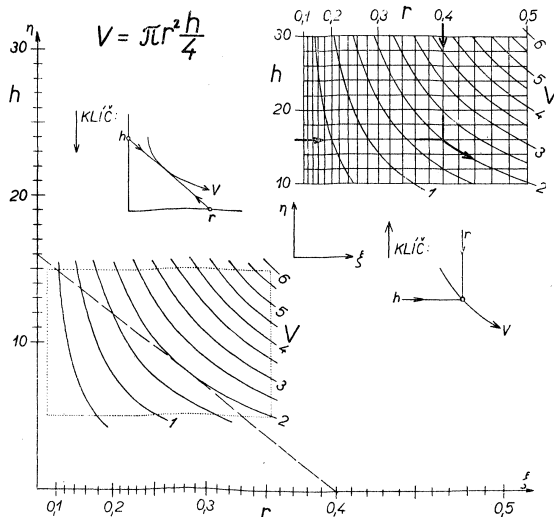
Daný průsečíkový nomogram je kartézský rodu 1. Tečna křivky (15) sestavená v prů-

sečku isoplét (14) má rovnici  $\varphi_2(\xi - \varphi_1) + \varphi_1(\eta - \varphi_2) = 0$ , neboli

$$(16) \quad \varphi_2 \xi + \varphi_1 \eta = 2\varphi_1 \varphi_2 .$$

Derivací rovnice (16) podle parametru  $\varphi_2$  obdržíme rovnici  $\xi = 2\varphi_1$ . Z této rovnice a z rovnice (16) vypočteme

$$(17) \quad \xi = 2\varphi_1, \quad \eta = 0 .$$



Obr. 1. Dotkový nomogram adjungovaný ke kartézskému průsečíkovému nomogramu vztahu  $V = \frac{1}{4}\pi r^2 h$ . Příklad:  $r = 0,4$  m,  $h = 16$  m,  $V = 2,0$  m<sup>3</sup>. (Zmenšeno na 2/3.)

Množina kótovaných útvarů  $\{(x_i)\}$  je tedy stupnice (17). Podobně vypočteme, že množina kótovaných útvarů  $\{(y_i)\}$  je stupnice

$$(18) \quad \xi = 0, \quad \eta = 2\varphi_2 .$$

Adjungovaný dotkový nomogram je tedy rodu 1 a má zobrazovací rovnice (15), (17), (18).

Příklad 1. V obr. 1 je náčrt průsečíkového nomogramu a adjungovaného dotkového nomogramu vztahu  $V = \frac{1}{4}\pi r^2 h$ , kde  $V \in \langle 1; 5,5 \rangle$  m<sup>3</sup> je objem kmene stromu,  $h \in \langle 10; 30 \rangle$  m je výška stromu a  $r \in \langle 0,1; 0,5 \rangle$  m je poloměr kmene. Zobrazovací rovnice průsečíkového nomogramu jsou  $\xi = \alpha r^2$ ;  $\eta = \frac{1}{4}\beta\pi h$ ;  $\xi\eta = \alpha\beta V$ . Zobrazovací rovnice adjungovaného dotkového nomogramu jsou  $\xi_1 = 2\alpha r^2$ ,  $\eta_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 0$ ,  $\eta_2 = \frac{1}{2}\beta\pi h$ ;  $\xi\eta = \alpha\beta V$ . V obr. 1 jsou kótované útvary narýsovány při modulových mírách  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 0,2$ .

### 3. PRŮSEČÍKOVÉ NOMOGRAMY ADJUNGOVANÉ K DOTYKOVÝM NOMOGRAMŮM RODU $t \geq 1$

3.1. Nechť funkce (1) je zobrazena dotykovým nomogramem o kótovaných útvarrech

$$(19) \quad f(\xi, \eta, x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \xi_1 = \varphi_1(x), \quad \eta_1 = \psi_1(x),$$

$$(20) \quad g(\xi, \eta, y) = 0 \quad \text{nebo} \quad \xi_2 = \varphi_2(y), \quad \eta_2 = \psi_2(y),$$

$$(21) \quad h(\xi, \eta, z) = 0.$$

Každému bodu  $(\xi_0, \eta_0)$  isopléty (21), ve kterém se dotýká této isopléty čteci index

$$(22) \quad \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \xi} (\xi - \xi_0) + \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \eta} (\eta - \eta_0) = 0.$$

přiřadíme dvojici kót  $(x, y)$  těch útvarů ze soustav (19) a (20), se kterými je index (22) v kontaktu. Množina takto okótovaných bodů je binární pole

$$(23) \quad \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

jehož isopléty  $\{(x_i)\}$  a  $\{(y_i)\}$  spolu se soustavou (21) tvoří průsečíkový nomogram funkce (1). Isopléty  $(x)$  a  $(y)$  binárního pole (23) se protínají s isoplétou z systému (21) právě tenkrát, existuje-li tečna isopléty  $z$ , která je v kontaktu s útvary (19) resp. (20) okótovanými hodnotami  $x$  resp.  $y$ . Můžeme tedy vyslovit tuto definici:

**Definice 3.1.** Adjungovaným nomogramem k dotykovému nomogramu funkce (1) o zobrazovacích rovnicích (19), (20), (21) nazýváme průsečíkový nomogram téže funkce (1), jehož systém isoplét  $\{(z_i)\}$  je (21), jehož isopléty  $\{(x_i)\}$  resp.  $\{(y_i)\}$  jsou množiny dotykových bodů na křivkách (21), v nichž sestrojené tečny jsou v kontaktu s útvary (19) resp. (20) okótovanými hodnotami  $x_i$  resp.  $y_i$ .

**Poznámka 3.1.** Je-li  $t$  rod dotykového nomogramu funkce (1), existuje právě  $t$  k němu adjungovaných průsečíkových nomogramů. Každý z těchto adjungovaných nomogramů má s původním nomogramem společný jeden z  $t$  systémů křivých isoplét.

**Poznámka 3.2.** Je-li dotykový nomogram o zobrazovacích rovnicích (19), (20), (21) adjungovaný k průsečíkovému nomogramu

$$(24) \quad u(\xi, \eta, x) = 0, \quad v(\xi, \eta, y) = 0, \quad h(\xi, \eta, z) = 0,$$

potom průsečíkový nomogram (24) je adjungovaný k původnímu dotykovému nomogramu (19), (20), (21). Toto tvrzení plyne z definice 2.1 a z definice 3.1.

Při výpočtu systému isoplét  $\{(x_i)\}$  adjungovaného nomogramu rozlišujeme dva případy.

Má-li za prve původní dotkový nomogram systém křivých isoplét  $f(\xi, \eta, x) = 0$ , lze rovnici tečny (22) napsat také ve tvaru

$$(25) \quad \frac{\partial f(\xi_1, \eta_1, x)}{\partial \xi} (\xi - \xi_1) + \frac{\partial f(\xi_1, \eta_1, x)}{\partial \eta} (\eta - \eta_1) = 0,$$

kde  $\xi_1, \eta_1$  jsou souřadnice bodu dotyku na isoplétě  $f(\xi, \eta, x) = 0$ . Z rovnosti směrnic v obou vyjádřeních téže přímky plyne

$$(26) \quad -\frac{\frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \xi}}{\frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \eta}} = -\frac{\frac{\partial f(\xi_1, \eta_1, x)}{\partial \xi}}{\frac{\partial f(\xi_1, \eta_1, x)}{\partial \eta}} = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0}.$$

Dále platí

$$(27) \quad h(\xi_0, \eta_0, z) = 0, \quad f(\xi_1, \eta_1, x) = 0.$$

Eliminací  $\xi_1, \eta_1, z$  ze soustavy rovnic (26), (27), získáme vztah mezi  $\xi_0, \eta_0, x$ , což je, píšeme-li  $\xi$  resp.  $\eta$  místo  $\xi_0$  resp.  $\eta_0$  rovnice

$$(28) \quad u(\xi, \eta, x) = 0$$

systému isoplét  $\{(x_i)\}$ .

Někdy je výhodnější eliminovat z rovnic (26), (27) pouze  $\xi_1, \eta_1$  a vypočítí  $\xi_0, \eta_0$  jako funkce  $x$  a  $z$ . Tím získáme rovnice binárního pole, kótovaného hodnotami  $x, z$ , jehož jeden systém isoplét je (21), druhý systém je  $\{(x_i)\}$ .

Předpokládejme za druhé, že původní dotkový nomogram má stupnici  $\xi_1 = \varphi_1(x)$ ,  $\eta_1 = \psi_1(x)$  a určíme systém isoplét  $\{(x_i)\}$  adjungovaného nomogramu. Tečna (22) prochází bodem  $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ , platí tedy

$$(29) \quad \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \xi} (\varphi_1(x) - \xi_0) + \frac{\partial h(\xi_0, \eta_0, z)}{\partial \eta} (\psi_1(x) - \eta_0) = 0,$$

$$h(\xi_0, \eta_0, z) = 0.$$

Eliminujeme-li  $z$  ze soustavy rovnic (29) a píšeme-li  $\xi$  resp.  $\eta$  místo  $\xi_0$  resp.  $\eta_0$ , získáme rovnici systému isoplét  $\{(x_i)\}$  ve tvaru (28). Místo toho můžeme, podobně jako v předěšlém případě, vypočítí z rovnic (29)  $\xi_0$  a  $\eta_0$  jako funkce proměnných  $x, z$ . Tím získáme binární pole, kótované proměnnými  $x$  a  $z$ , jehož jeden systém isoplét je (21), druhý systém je  $\{(x_i)\}$ .

Systém isoplét  $\{(y_i)\}$  adjungovaného průsečíkového nomogramu můžeme určití podobně jako systém  $\{(x_i)\}$ . Je-li však již znám systém (28) isoplét  $\{(x_i)\}$ , lze vypočítí systém  $\{(y_i)\}$  eliminací  $x$  a  $z$  z rovnic (1), (21), (28).

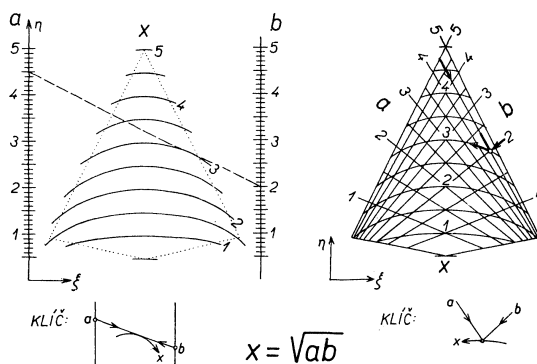
Uvedme nyní výpočet zobrazovacích rovnic průsečíkového nomogramu adjungovaného k dotykovému nomogramu

$$(30) \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \varphi_1,$$

$$(31) \quad \xi_2 = 2\delta, \quad \eta_2 = \varphi_2,$$

$$(32) \quad \frac{(\xi - \delta)^2}{\delta^2} + \frac{\eta^2}{\varphi_3} = 1,$$

který zobrazuje součinnový tvar  $\varphi_3 = \varphi_1\varphi_2$ .



Obr. 2. Dotykový nomogram a adjungovaný průsečíkový nomogram vztahu  $x = \sqrt{(ab)}$ . Příklad:  $a = 4,5; b = 2; x = 3$ . (Zmenšeno na 2/3.)

Řešení. Nejprve vypočteme systém isoplét  $\{(x_i)\}$  adjungovaného průsečíkového nomogramu. Tečna křivky (32), sestřená v bodě  $(\xi, \eta)$  prochází bodem (30), tj. platí

$$\frac{(0 - \delta)(\xi - \delta)}{\delta^2} + \frac{\varphi_1\eta}{\varphi_3} = 1,$$

neboli

$$(33) \quad -\xi\varphi_3 + \delta\eta\varphi_1 = 0.$$

Dále platí  $(\xi - \delta)^2/\delta^2 + \eta^2/\varphi_3 = 1$ , po úpravě

$$(34) \quad \varphi_3\xi(\xi - 2\delta) = -\delta^2\eta^2.$$

Eliminací  $\varphi_3$  z rovnic (33) a (34) získáme rovnici  $\varphi_1\xi + \delta\eta - 2\delta\varphi_1 = 0$  hledaného systému isoplét  $\{(x_i)\}$ . Je to svazek přímek o středu  $(2\delta; 0)$ , vytínající na ose  $\xi = 0$  stupnici  $\eta = 2\varphi_1$ .

Podobným postupem vypočteme rovnici  $\varphi_2\xi - \delta\eta = 0$  systému isoplét  $\{(y_i)\}$ . Je to svazek přímek o středu v počátku vytínající na přímkce  $\xi = 2\delta$  stupnici  $\eta = 2\varphi_2$ . Adjungovaný průsečíkový nomogram je tedy opět rodu  $r = 1$ .



Příklad 2. Na obr. 2 je náčrt dotykového nomogramu a s ním adjungovaného průsečíkového nomogramu pro řešení vztahu  $x = \sqrt{(ab)}$ , kde  $x \in \langle 0,5; 5 \rangle$  je geometrický průměr hodnot  $a, b \in \langle 0,5; 5 \rangle$ . Daný vztah lze po úpravě srovnat s kanonickým tvarem  $\varphi_3 = \varphi_1\varphi_2$  takto:  $\varphi_1 = \alpha\beta a$ ,  $\varphi_2 = \alpha b/\beta$ ,  $\varphi_3 = \alpha^2 x^2$ . Zobrazovací rovnice dotykového nomogramu jsou  $\varphi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = \alpha\beta a$ ;  $\varphi_2 = 2\delta$ ,  $\eta_2 = \alpha b/\beta$ ;  $(\xi - \delta)^2/\delta^2 + \eta^2/\alpha^2 x^2 = 1$ , zobrazovací rovnice adjungovaného průsečíkového nomogramu jsou  $\alpha\beta a\xi + \delta\eta - 2\alpha\beta\delta a = 0$ ;  $\alpha b\xi/\beta - \delta\eta = 0$ ;  $(\xi - \delta)^2/\delta^2 + \eta^2/\alpha^2 x^2 = 1$ . Pro náčrt v obr. 2 byly zvoleny modulové míry  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\delta = 2,5$ .

3.2. Pro dotykové nomogramy s kružnicemi platí tato věta:

**Věta 3.1.** *Má-li dotykový nomogram stupnici*

$$(35) \quad \xi_1 = \varphi_1(x), \quad \eta_1 = \psi_1(x)$$

*a systém soustředných kružnic*

$$(36) \quad \xi^2 + \eta^2 = r_2^2,$$

*potom systém isoplét  $\{(x_i)\}$  adjungovaného nomogramu je také systémem kružnic.*

Důkaz. Tečna  $\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = r_2^2$  kružnice (36) prochází bodem (35), tj. platí

$$(37) \quad \varphi_1\xi_0 + \psi_1\eta_0 = r_3^2, \quad \xi_0^2 + \eta_0^2 = r_3^2.$$

Eliminací  $r_3$  ze soustavy rovnic (37) a záměnou označení  $\xi_0 = \xi$ ,  $\eta_0 = \eta$  získáme rovnici

$$(38) \quad (\xi - \frac{1}{2}\varphi_1)^2 + (\eta - \frac{1}{2}\psi_1)^2 = \frac{1}{4}(\varphi_1^2 + \psi_1^2)$$

systému isoplét  $\{(x_i)\}$  adjungovaného nomogramu. Isopléty (38) jsou kružnice, procházející počátkem  $O$ , jejichž středy  $S(x)$  jsou body o souřadnicích  $(\frac{1}{2}\varphi_1(x), \frac{1}{2}\psi_1(x))$ , tj. kružnice, opsané nad průměrem  $OX$ , kde  $X$  je bod  $(\varphi_1(x), \psi_1(x))$ .

**Důsledek.** Nomogram adjungovaný k dotykovému nomogramu rodu 1 s jedním systémem soustředných kružnic je průsečíkový nomogram se třemi soustavami kružnic. (Podle [4] zobrazuje dotykový nomogram  $\xi_1 = \varphi_1, \eta_1 = \psi_1; \xi_2 = \varphi_2, \eta_2 = \psi_2; \xi^2 + \eta^2 = r_3^2$  kanonický tvar  $r_3^2[(\psi_2 - \psi_1)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2] = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)^2$ .) K dotykovému nomogramu rodu 2, jehož kótované útvary splňují předpoklady věty 3.1 existují právě dva adjungované nomogramy, z nichž jeden má aspoň dva systémy kružnic. (Viz též odst. 4.2.)

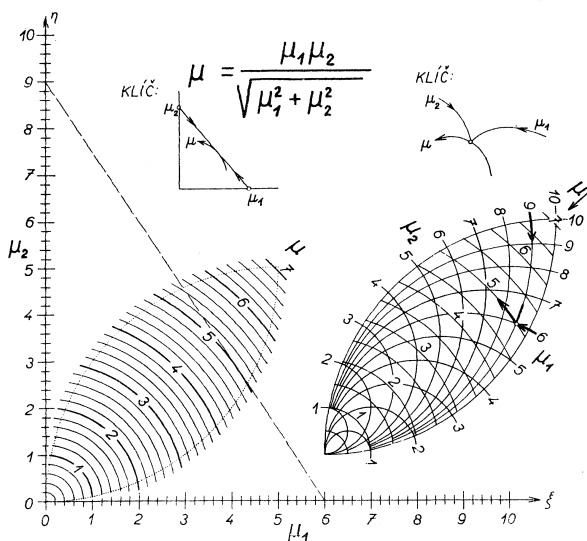
4. ZOBRAZENÍ NĚKTERÝCH KANONICKÝCH TVARŮ  
TŘETÍHO AŽ PÁTÉHO NOMOGRAFICKÉHO ŘÁDU  
DOTYKOVÝMI NOMOGRAMY S KRUŽNICEMI A NOMOGRAMY  
K NIM ADJUNGOVANÝMI

4.1. Součtový tvar

$$(39) \quad \frac{1}{\varphi_1^2} = \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2}$$

Ize podle [4] zobraziti dotykovým nomogramem rodu 1 s jednou soustavou soustředných kružnic o zobrazovacích rovnicích

$$(40) \quad \xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 \varphi_1^2; \quad \xi_2 = \alpha \varphi_2, \quad \eta_2 = 0; \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \alpha \varphi_3.$$



Obr. 3. Dotykový nomogram a adjungovaný průsečíkový nomogram vztahu  $\mu = \mu_1 \mu_2 / \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ . Příklad:  $\mu_1 = 6$ ,  $\mu_2 = 9$ ,  $\mu = 5,0$ . (Zmenšeno na 2/3.)

Průsečíkový nomogram adjungovaný k tomuto nomogramu má podle věty 3.1 a jejího důsledku tři soustavy kruhových isoplét o rovnicích

$$(41) \quad \xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 \varphi_1^2; \quad (\xi - \frac{1}{2} \alpha \varphi_2)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4} \alpha^2 \varphi_2^2;$$

$$\xi^2 + (\eta - \frac{1}{2} \alpha \varphi_3)^2 = \frac{1}{4} \alpha^2 \varphi_3^2.$$

Příklad 3. Sestrojte dotykový nomogram a adjungovaný průsečíkový nomogram

vztahu

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{(\mu_1^2 + \mu_2^2)}},$$

kde  $\mu \in \langle 0; 7 \rangle$  je koeficient bezpečnosti,  $\mu_1 \in \langle 0; 10 \rangle$  je koeficient ohybu,  $\mu_2 \in \langle 0; 10 \rangle$  je koeficient torse.

Daný vztah lze upravit na tvar  $1/\mu^2 = 1/\mu_1^2 + 1/\mu_2^2$  a srovnati s kanonickým tvarem (39) rovnicemi  $\varphi_1 = \mu$ ,  $\varphi_2 = \mu_1$ ,  $\varphi_3 = \mu_2$ . Volíme-li pro náčrt na obr. 3. modulovou míru  $\alpha = 1$ , jsou zobrazovací rovnice dotykového nomogramu  $\xi^2 + \eta^2 = \mu^2$ ;  $\xi_1 = \mu_1$ ,  $\eta_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 0$ ,  $\eta_2 = \mu_2$  a zobrazovací rovnice adjungovaného průsečíkového nomogramu  $\xi^2 + \eta^2 = \mu^2$ ;  $(\xi - \frac{1}{2}\mu_1)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}\mu_1^2$ ;  $\xi^2 + (\eta - \frac{1}{2}\mu_2)^2 = \frac{1}{4}\mu_2^2$ .

#### 4.2. Cauchyho kanonický tvar

$$(42) \quad h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0,$$

kde  $h_3 \neq 0$ , lze podle [4] zobraziti dotykovým nomogramem se dvěma systémy kružnic, jehož kótované útvary mají rovnice

$$(43) \quad \xi^2 + \eta^2 = \alpha^2/h_2^2; \quad (\xi + \alpha f_3/h_3)^2 + \eta^2 = \alpha^2 g_3^2/h_3^2; \\ \xi_1 = \alpha/h_1; \quad \eta_1 = 0.$$

V zobrazovacích rovnicích (43) je jedna volitelná modulová míra  $\alpha > 0$ . Snadno lze získati zobrazovací rovnice tohoto nomogramu se dvěma modulovými mírami  $\beta > 0$  a  $\gamma > 0$ , píšeme-li rovnici (42) ve tvaru  $(\alpha h_1/\beta)(\beta f_3) + (\alpha h_2/\gamma)(\gamma g_3) + \alpha h_3 = 0$  a k takto upravenému tvaru napíšeme zobrazovací rovnice (43). Získáme rovnice

$$(43') \quad \xi^2 + \eta^2 = \gamma^2/h_2^2; \quad (\xi + \beta f_3/h_3)^2 + \eta^2 = \gamma^2 g_3^2/h_3^2; \quad \xi_1 = \beta/h_1, \quad \eta_1 = 0$$

se dvěma modulovými mírami  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ .

Jsou-li  $k_2$  resp.  $k_3$  kružnice okótované hodnotami  $x_2$  resp.  $x_3$ , je třeba vzít za čtecí index vnější (vnitřní) společné tečny kružnic  $k_2$  a  $k_3$ , je-li  $h_2 g_3 h_3 < 0$ , ( $h_2 g_3 h_3 > 0$ ). (Viz [4].)

K dotykovému nomogramu o zobrazovacích rovnicích (43') existují dva adjungované průsečíkové nomogramy.

První adjungovaný nomogram, mající s původním dotykovým nomogramem společný systém isoplét

$$(44) \quad \xi^2 + \eta^2 = \gamma^2/h_2^2,$$

má podle věty 3.1 druhý systém kruhových isoplét

$$(45) \quad (\xi - \frac{1}{2}\beta/h_1)^2 + \eta^2 = (\frac{1}{2}\beta/h_1)^2.$$

Třetí systém isoplét kótovaný hodnotami proměnné  $x_3$ , lze vypočítati eliminací  $h_1$  a  $h_2$  z rovnic (42), (44) a (45). Z rovnice (44) vypočteme  $h_2 = \varepsilon\gamma/\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$ , kde  $\varepsilon = \text{sgn } h_2$  a z rovnice (45) vypočteme  $h_1 = \beta\xi/(\xi^2 + \eta^2)$ . Dosazením těchto výrazů za  $h_2, h_1$  do rovnice (42) získáme rovnici třetího systému isoplét

$$(46) \quad h_3(\xi^2 + \eta^2) + \varepsilon\gamma g_3 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)} + \beta f_3 \xi = 0.$$

Poznámka. Lze dokázati, že isopléty (46) jsou oblouky úpatnic kružnic  $(\xi + \beta f_3/h_3)^2 + \eta^2 = \gamma^2 g_3^2/h_3^2$  pro pól  $P(0; 0)$  v počátku. Lze je sestrojiti také jako přímé konchoidy kružnic  $(\xi + \frac{1}{2}\beta f_3/h_3)^2 + \eta^2 = (\frac{1}{2}\beta f_3/h_3)^2$  pro pól  $P(0; 0)$  a parametr  $d = \gamma g_3/h_3$ .

Druhý adjungovaný nomogram, mající s původním dotykovým nomogramem o zobrazovacích rovnicích (43') společný systém isoplét

$$(47) \quad (\xi + \beta f_3/h_3)^2 + \eta^2 = \gamma^2 g_3^2/h_3^2$$

je také rodu 3 a má dva nekružnicové systémy isoplét. Isopléty, kótované hodnotami proměnné  $x_1$  resp.  $x_2$  lze sestrojiti z rovnic binárních polí  $(x_1, x_3)$ , resp.  $(x_2, x_3)$ , kde isopléty kótované hodnotami  $x_3$  jsou (47).

Zavedeme-li označení

$$(48) \quad \beta f_3/h_3 = -s_3, \quad \gamma g_3/h_3 = r_3,$$

můžeme rovnici (47) psát ve tvaru

$$(47') \quad (\xi - s_3)^2 + \eta^2 = r_3^2.$$

Abychom vypočetli zobrazovací rovnice binárního pole  $(x_1, x_3)$ , uvážíme, že tečna  $(\xi - s_3)(\xi_0 - s_3) + \eta\eta_0 = r_3^2$  kružnice (47') prochází bodem  $\xi_1 = \beta/h_1, \eta_1 = 0$ , tj. platí

$$(49) \quad (\beta/h_1 - s_3)(\xi_0 - s_3) = r_3^2, \quad (\xi_0 - s_3)^2 + \eta_0^2 = r_3^2.$$

Z rovnic (49) vypočteme  $\xi_0, \eta_0$  a po záměně označení  $\xi_0 = \xi, \eta_0 = \eta$  získáme rovnice

$$(50) \quad \xi = \frac{r_3^2}{\beta/h_1 - s_3} + s_3, \quad \eta = r_3 \sqrt{\left(1 - \frac{r_3^2}{(\beta/h_1 - s_3)^2}\right)}$$

binárního pole  $(x_1, x_3)$ .

Poněvadž (47) je jeden systém isoplét binárního pole (50), stačí při konstrukci druhého systému počítati z rovnic (50) pouze např. souřadnice  $\xi$ .

Poznámka. V konkrétních případech je někdy výhodnější místo výpočtu binárního pole (50) eliminovat  $x_3$  z rovnic (49) a získat tak rovnici systému isoplét  $\{(x_1)\}$ .

Při výpočtu zobrazovacích rovnic binárního pole  $(x_1, x_2)$  uvážíme, že tečna  $(\xi - s_3)(\xi_0 - s_3) + \eta\eta_0 = r_3^2$  kružnice (47') se dotýká kružnice (44), tj. má od

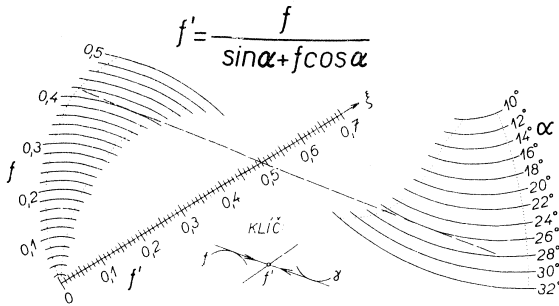
počátku vzdálenost  $\gamma/h_2$ . Platí tedy

$$(51) \quad \frac{r_3^2 + s_3(\xi_0 - s_3)}{(\xi_0 - s_3)^2 + \eta_0^2} = r_2^2; \quad (\xi_0 - s_3)^2 + \eta_0^2 = r_2^2.$$

Z rovnic (51) vypočteme  $\xi_0$  a  $\eta_0$  a po záměně označení  $\xi_0 = \xi$ ,  $\eta_0 = \eta$  obdržíme zobrazovací rovnice

$$(52) \quad \xi = s_3 + \frac{r_3^2(r_2^2 - 1)}{s_3}, \quad \eta = r_3 \sqrt{\left(1 - \frac{r_3^2(r_2^2 - 1)}{s_3^2}\right)}$$

binárního pole  $(x_2, x_3)$ .



Obr. 4. Dotykový nomogram se dvěma kružnicovými soustavami isoplét pro výpočet rovnice  $f' = f/(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ . Příklad:  $f = 0,4$ ;  $\alpha = 26^\circ$ ,  $f' = 0,50$ . (Zmenšeno na 2/3.)

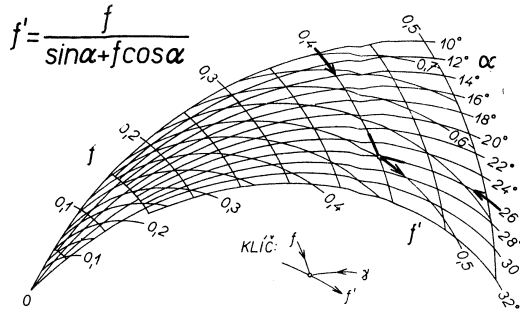
Poznámka. V konkrétních případech je někdy výhodné získat rovnici systému isoplét  $(x_2)$  eliminací  $x_3$  z rovnic (51).

Příklad 4. Sestrojte dotykový nomogram s kružnicemi a oba k němu adjungované nomogramy pro vztah  $f' = f/(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ , kde  $f' \in \langle 0; 0,7 \rangle$  je koeficient tření v drážce,  $f \in \langle 0; 0,5 \rangle$  je koeficient klouzavého tření a  $\alpha \in \langle 10^\circ; 32^\circ \rangle$  je úhel drážky. Daný vztah upravíme na tvar  $1/f' - \sin \alpha/f - \cos \alpha = 0$  a srovnáme s kanonickým tvarem (42) rovnicemi  $h_1 = 1/f'$ ,  $h_2 = 1/f$ ,  $f_3 = 1$ ,  $g_3 = -\sin \alpha$ ,  $h_3 = -\cos \alpha$ . Dosazením těchto výrazů do (43') obdržíme zobrazovací rovnice dotykového nomogramu  $\xi^2 + \eta^2 = \gamma^2 f^2$ ;  $(\xi - \beta/\cos \alpha)^2 + \eta^2 = \gamma^2 \tan^2 \alpha$ ;  $\xi_1 = \beta f'$ ,  $\eta_1 = 0$ . Poněvadž pro každou dvojici hodnot  $f \in \langle 0; 0,5 \rangle$  a  $\alpha \in \langle 10^\circ; 32^\circ \rangle$  je  $h_2 g_3 h_3 = \sin \alpha \cdot \cos \alpha / f > 0$ , je třeba za čtecí index vždy vzít vnitřní společnou tečnu kruhových isoplét. Náčrt tohoto nomogramu je na obr. 4. Modulové míry  $\beta = \gamma = 10$ .

První adjungovaný nomogram má zobrazovací rovnice  $\xi^2 + \eta^2 = \gamma^2 f^2$ ,  $(\xi^2 + \eta^2) \cos \alpha - \gamma \sin \alpha \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)} + \beta \xi = 0$ ,  $(\xi - \frac{1}{2}\beta f')^2 + \eta^2 = (\frac{1}{2}\beta f')^2$ . Pro náčrt tohoto nomogramu na obr. 5. zvoleny modulové míry  $\beta = \gamma = 20$ .

Druhý adjungovaný nomogram má s původním dotykovým nomogramem spo-

lečnou soustavu kružnic  $(\xi - \beta/\cos \alpha)^2 + \eta^2 = \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Isopléty kótované hodnotami proměnné  $f'$  lze získat ze zobrazovacích rovnic binárního pole  $(\alpha, f')$ :  $\xi = (\gamma^2 \sin^2 \alpha + \beta^2 f' \cos \alpha - \beta^2)/(\beta f' \cos \alpha - \beta \cos \alpha)$ ,  $\eta = \gamma \operatorname{tg} \alpha \sqrt{[(1 - \gamma^2 \sin^2 \alpha) : (\beta f' \cos \alpha - \beta)^2]}$ , isopléty, kótované hodnotami proměnné  $f$  ze zobrazovacích rovnic binárního pole  $(\alpha, f)$ :



Obr. 5. První adjungovaný nomogram k nomogramu z obr. 4. (Zmenšeno na 2/3.)

$\xi = [\beta^2 + \gamma^2 \sin^2 \alpha (\gamma^2 f^2 - 1)]/\beta \cos \alpha$ ,  $\eta = [(\gamma \operatorname{tg} \alpha)/\beta] \sqrt{[\beta^2 - \gamma^2 \sin^2 \alpha (\gamma^2 f^2 - 1)^2]}$ . Pro náčrt tohoto nomogramu na obr. 6. byly zvoleny modulové míry  $\beta = \gamma = 20$ .

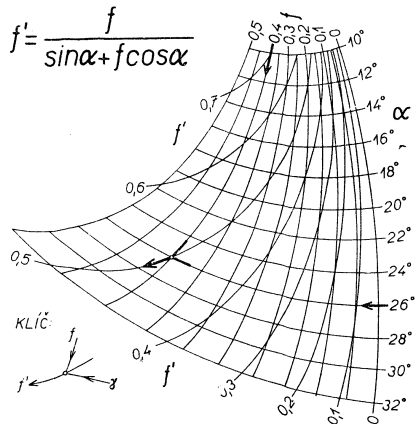
### 4.3. Soreauův kanonický tvar

$$(53) \quad f_3 = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$$

Lze zobraziti dotykovým nomogramem se dvěma soustavami kružnic

$$(54) \quad \begin{aligned} (\xi - \beta f_1/g_1)^2 + \eta^2 &= \alpha^2/g_1^2; \\ (\xi - \beta f_2/g_2)^2 + \eta^2 &= \alpha^2/g_2^2; \\ \xi_3 &= \beta f_3, \quad \eta_3 = 0. \end{aligned}$$

Obr. 6. Druhý adjungovaný nomogram k nomogramu z obr. 4. (Zmenšeno na 2/3.)



Jestliže pro nějakou dvojici hodnot  $x_1, x_2$  platí  $g_1 g_2 < 0$ , ( $g_1 g_2 > 0$ ), je třeba za čtecí index vzít vnější (vnitřní) společnou tečnu kružnic, okótovaných hodnotami  $x_1, x_2$ . (Viz [4].)

Rovnice kótovaných útvarů adjungovaných nomogramů se vypočítají a tyto nomogramy se sestrojí podobně jako v případě Cauchyho kanonického tvaru. Označme  $r_1 = \alpha/g_1$ ,  $r_2 = \alpha/g_2$ ,  $s_1 = \beta f_1/g_1$ ,  $s_2 = \beta f_2/g_2$ .

První adjungovaný nomogram má s původním nomogramem společný systém  $(\xi - s_1)^2 + \eta^2 = r_1^2$ . Isopléty, kótované hodnotami proměnné  $x_2$  získáme z rovnic

$$(55) \quad \xi = r_1 \frac{r_1 + r_2}{s_2 - s_1} + s_1, \quad \eta = r_1 \sqrt{\left(1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{(s_2 - s_1)^2}\right)}$$

binárního pole  $(x_1, x_2)$ . Isopléty, kótované hodnotami proměnné  $x_3$  získáme z rovnic

$$(56) \quad \xi = \frac{r_1^2}{\beta f_3 - s_1} + s_1; \quad \eta = r_1 \sqrt{\left(1 - \frac{r_1^2}{(\beta f_3 - s_1)^2}\right)}$$

binárního pole  $(x_1, x_3)$ .

Druhý adjungovaný nomogram má s původním nomogramem společný systém  $(\xi - s_2)^2 + \eta^2 = r_2^2$ . Binární pole  $(x_1, x_2)$  resp.  $(x_2, x_3)$  mají zobrazovací rovnice

$$(57) \quad \xi = r_2 \frac{r_1 + r_2}{s_1 - s_2} + s_2, \quad \eta = r_2 \sqrt{\left(1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{(s_1 - s_2)^2}\right)},$$

resp.

$$(58) \quad \xi = \frac{r_2^2}{\beta f_3 - s_2} + s_2, \quad \eta = r_2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_2^2}{(\beta f_3 - s_2)^2}\right)}.$$

## 5. NĚKOLIK ZÁVĚREČNÝCH POZNÁMEK

Teorie adjungovaných nomogramů umožňuje průsečíkovému nomogramu rodu  $r \geq 1$  přiřadit  $r$  dotykových nomogramů a duálně dotykového nomogramu rodu  $t \geq 1$  přiřadit  $t$  průsečíkových nomogramů zobrazujících stejný vztah a majících s původním nomogramem společný vždy jeden systém křivých isoplét. (Viz příklady 1–4.)

Je-li původní i adjungovaný nomogram rodu 1 a sestrojíme-li společný systém křivých isoplét metodou kót, můžeme s užitím obou nomogramů sestrojiti tečny i s body dotyku společné soustavy křivých isoplét. (Příklady 1 a 2.)

Při konstrukci dotykového nomogramu vztahu  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ , kde  $x_1 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_2 \in \langle c, d \rangle$ ,  $x_3 \in \langle e, f \rangle$ , který má např. systém křivých isoplét  $\{x_3\}$ , je vhodné sestrojiti také isopléty adjungovaného nomogramu, okótované hodnotami  $a, b, c, d$ . Tyto isopléty ohraničují na křivkách  $\{x_3\}$  oblouky, které je třeba na nomogramu rýsovat, tj. oblouky, v jejichž bodech se může čteci index dotýkati isoplét  $\{x_3\}$ . Na obr. 1–4 jsou tyto isopléty naznačeny tečkovanou čarou.

### Literatura

- [1] *Hruška Václav*: Počet grafický a graficko-mechanický, Praha 1952.
- [2] *Jurga František*: Nomografia a iné grafické metódy. Bratislava 1958.
- [3] *Pleskot Václav*: Nomografie. Praha 1963.
- [4] *Záhora Jaroslav*: Dotykové nomogramy s kružnicemi. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966) str. 308—319.

### Résumé

## NOMOGRAMMES ADJOINTS AUX NOMOGRAMMES À LIGNES CONCORANTES ET AUX NOMOGRAMMES À CONTACT TANGENTIEL AYANT AU MOINS UN SYSTÈME D'ISOPLÈTHES COURBES

JAROSLAV ZÁHORA

Supposons, que

$$f(\xi, \eta, x) = 0, \quad g(\xi, \eta, y) = 0, \quad h(\xi, \eta, z) = 0$$

sont les équations représentatives d'un nomogramme à lignes concourantes et que  $h(\xi, \eta, z) = 0$  est un système de courbes. Le nomogramme adjoint à ce nomogramme-ci est le nomogramme à contact tangentiel ayant aussi le système  $h(\xi, \eta, z) = 0$  et dont les systèmes cotés par les variables  $x_i$  resp.  $y_i$  sont des enveloppes des tangentes du système  $h(\xi, \eta, z) = 0$ ; ces tangentes sont construites aux points d'intersection avec les isoplèthes  $x_i$  resp.  $y_i$  du nomogramme originaire.

On peut définir des nomogrammes à lignes concourantes adjoints aux nomogrammes à contact tangentiel par la réciprocity.

La théorie des nomogrammes adjoints peut être employée comme une transformation non-corrélative des nomogrammes à contact tangentiel et des nomogrammes à lignes concourantes ayants au moins un système de courbes. Cette théorie peut être employée aussi pour la construction du système d'isoplèthes d'un nomogramme à contact tangentiel etc.

Tout d'abord, on traite la théorie générale des nomogrammes adjoints et puis la représentation de quelques formes canoniques du troisième à cinquième ordre nomographique par les nomogrammes à contact tangentiel avec cercles et par leurs nomogrammes adjoints.

*Adresa autora: Jaroslav Záhora, Gorkého 42, Brno.*