Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Lokale Berührungskegel einer Menge im Euklidischen Raum E_n

Aplikace matematiky, Vol. 22 (1977), No. 2, 110–115

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103682

LOKALE BERÜHRUNGSKEGEL EINER MENGE IM EUKLIEDISCHEN RAUM $\mathbf{E}_n$

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen 23. Marz 1976)

Der Begriff des lokalen Berührungskegels einer beliebigen nichtleeren Menge in $\mathbf{E}_n$ ist im bestimmten Sinne eine Verallgemeinerung des Begriffs des Tangentialraumes einer glatten Mannigfaltigkeit in ihrem Punkt. In dem vorliegenden Artikel geht man von dem Begriff eines lokalen Berührungskegels, der in der Arbeit [1] eingeführt wurde, aus, der allgemein nicht mit ähnlichen Begriffen aus der Literatur (z. B. [2], [3]) übereinstimmt. Wir werden uns hier insbesondere auf konvexe Mengen beschränken, denn, für konvexe Mengen besitzt der lokale Berührungskegel eine spezielle Charakteristik und die entsprechenden lokalen Eigenschaften der Berührungskegel in jeden Punkt einer konvexen Menge sind eben für die Konvexität charakteristisch.

Wir betrachten in $\mathbf{E}_n$ eine Halbgerade, die durch den Anfangspunkt $\mathbf{x}^0$ und durch den Richtungsvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ festgelegt ist, also

$$p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}t,\ t > 0\} . \tag{1}$$

Definition 1. *Die Menge*

$$U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| - \sqrt{(\varepsilon^2 + 1)}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{v}) < 0\}^{1)} \tag{2}$$

heisst die ε-Kegelumgebung der Halbgerade $p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$ in $\mathbf{E}_n$.

Offenbar gilt

$$p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}) \subset U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon) . \tag{3}$$

[1]) Man überprüft leicht, dass $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon)$ das Innere eines Rotationskegels darstellt, der den einzigen Scheitelpunkt $\mathbf{x}^0$, die Dimension gleich n und die Halbgerade $p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$ als seine Achse besitzt.

Definition 2. *Falls* $\mathbf{H}$ *ein offener Halbraum in* $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{R_H}$ *seine Randmenge ist und falls*

a) $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{H}$;

b) $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon) \cap \mathbf{R_H} \neq \emptyset$;

gilt, so nennt man die Menge

$$\gamma(U, \mathbf{H}) \equiv U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon) \cap \mathbf{R_H} \tag{4}$$

der echte Schnitt der Umgebung $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon)$ *der Halbgerade* $p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$.

Definition 3. *Ein echter Schnitt* $'\gamma(U, '\mathbf{H})$ *der Umgebung* $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon)$ *heisst ein feinerer Schnitt als der echte Schnitt* $\gamma(U, \mathbf{H})$ *derselben Umgebung, falls*

$$'\gamma(U, '\mathbf{H}) \subset (\mathbf{H} \cap \mathbf{U}(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon)) \tag{5}$$

gilt.

Entsprechende Bezeichnung:

$$'\gamma(U, '\mathbf{H}) \prec \gamma(U, \mathbf{H})\,. \tag{6}$$

Bemerkung 1. Offenbar gilt

$$''\gamma(U, ''\mathbf{H}) \prec '\gamma(U, '\mathbf{H})\,, \quad '\gamma(U, '\mathbf{H}) \prec \gamma(U, \mathbf{H}) \Rightarrow ''\gamma(U, ''\mathbf{H}) \prec \gamma(U, \mathbf{H})\,.$$

Definition 4. *Ist* $\mathbf{x}^0$ *ein festgewählter Punkt einer gegebenen Menge* $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ *und* $p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$ *die Halbgerade aus* (1) *mit der Eigenschaft, dass für jede ihre Umgebung* $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}, \varepsilon)$ *ein echter Schnitt* $\gamma(U, \mathbf{H})$ *in der Weise existiert, so dass*

$$'\gamma(U, '\mathbf{H}) \cap \mathbf{M} \neq \emptyset$$

für alle $'\gamma(U, '\mathbf{H}) \prec \gamma(U, \mathbf{H})$ *gilt, so heisst die Halbgerade* $p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$ *eine* σ*-Halbgerade im Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$.

Definition 5. *Ist* $\mathbf{x}^0$ *ein festgewählter Punkt einer Menge* $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ *und* $\sum_\sigma p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$ *die Menge aller* σ*-Halbgeraden im Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$, *so heisst die Menge*

$$\mathbf{K_M}(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x}^0\} \cup \sum_\sigma p(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}) \tag{7}$$

der lokale Berührungskegel der Menge $\mathbf{M}$ *im Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$.

Behauptung 1. *In jedem Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$ *stellt die Menge* $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}^0)$ *einen abgeschlossenen Kegel in* $\mathbf{E}_n$ *dar.*

Zum Beweis siehe [1].

Bemerkung 2. Falls $\boldsymbol{x}^0$ ein innerer Punkt der Menge $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$ ist, so ist $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{E}_n$. Ist $\boldsymbol{L}$ die lineare Hülle der Menge $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$ und $\boldsymbol{x}^0$ ein relativ innerer Punkt der Menge $\boldsymbol{M}$ bezüglich $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{x}^0 \in \operatorname{rel\,int} \boldsymbol{M}$), so gilt $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{L}$.

Behauptung 2. *Falls $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ eine konvexe Menge, $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ beliebig sind, so gilt*

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0) = \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0),$$

wobei $\overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$ die Abschliessung des Projektionskegels der Menge $\boldsymbol{M}$ aus dem Punkt $\boldsymbol{x}^0$ bedeutet.[2])

Beweis. Aus der Definition der Kegel $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$ und $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$ ergibt sich unmittelbar $\boldsymbol{x}^0 \in \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0) \cap \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$.

Es sei zuerst $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{x}^0$ beliebig. Nach der Definition des Projektionskegels gibt es dann einen Punkt $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{y}^* \neq \boldsymbol{x}^0$ in der Weise, dass

$$(8) \qquad p = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{x}^0),\ t > 0\} \subset \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0), \quad \boldsymbol{x}^* \in p$$

gilt. Da wegen der Konvexität der Menge $\boldsymbol{M}$ die abgeschlossene Strecke $u(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^*)$ die Eigenschaft $u(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^*) \subset \boldsymbol{M}$ besitzt, so stellt die Halbgerade p aus (8) eine σ-Halbgerade im Punkt $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ mit $p \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$, dar. Es gilt also auch $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$.

Es sei nun $\boldsymbol{x}^*$ ein beliebiger Punkt des Randes von $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{x}^0$. Wir betrachten die Halbgerade

$$(9) \qquad p = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)\,t,\ t > 0\}$$

und ihre beliebige ε-Umgebung $U(\boldsymbol{x}^0, (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)/\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0\|, \varepsilon)$. Da $\boldsymbol{x}^*$ ein Randpunkt von $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$ ist, so gibt es in jeder seiner (sphärischen) Umgebung $O(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ mindestens einen Punkt $\boldsymbol{x}^1 \in \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^*$. Wählt man $\delta > 0$ so klein, dass $O(\boldsymbol{x}^*, \delta) \subset U(\boldsymbol{x}^0, (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)/\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0\|, \varepsilon)$ gilt, so gilt auch

$$p^1 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0),\ t > 0\} \subset U(\boldsymbol{x}^0, (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)/\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0\|, \varepsilon).$$

Nach der Definition der Projektionskegels gibt es zu dem Punkt $\boldsymbol{x}^1$ einen Punkt $\boldsymbol{y}^1 \in \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{y}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^1 \in p^1$ und aus der Konvexität der Menge $\boldsymbol{M}$ ergibt sich für die abgeschlossene Strecke $u(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^1) \subset p^1$ die Inklusion $u(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^1) \subset \boldsymbol{M}$. Wählt man

---

[2]) Falls $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{E}_n$ beliebig sind, so nennt man die Menge

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0),\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M},\ t \geqq 0\}$$

der Projektionskegel von $\boldsymbol{M}$ aus dem Punkt $\boldsymbol{x}^0$. Es gilt:

a) $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$;

b) falls $\boldsymbol{M}$ konvex ist, so ist $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^0)$ ein konvexer Kegel in $\boldsymbol{E}_n$;

c) falls $\boldsymbol{M}$ konvex und $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{M}$ beliebig sind, so gilt $\dim \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}^*) = \dim \boldsymbol{M}$.

nun einen beliebigen echten Schnitt der Umgebung $U(\mathbf{x}^0, (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)/\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|, \varepsilon)$ der Halbgerade p aus (9), der den Punkt $\mathbf{y}^1$ enthält, so muss unbedingt jeder feinerer Schnitt dieser Umgebung mit der Menge $\boldsymbol{M}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben und damit stellt die Halbgerade p aus (9) eine σ-Halbgerade dar und es gilt wiederum $\mathbf{x}^* \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$. Somit haben wir die Relation

$$\overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0) \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0) \tag{10}$$

bewiesen.

Es sei anderseits $\mathbf{x}^* \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^0$ beliebig. Dann stellt die Halbgerade

$$p^* = \left\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n \middle| \, \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\frac{\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|}, \quad t > 0\right\}$$

eine σ-Halbgerade dar. Wählen wir eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ und die ihr angehörige Folge von Umgebungen $\{U(\mathbf{x}^0, (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)/\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|, \varepsilon_n)\}$. In jeder dieser Umgebungen liegt dann – aufgrund der Definition einer σ-Halbgerade – mindestens ein Punkt $\mathbf{x}^n \in \boldsymbol{M}$ mit $\mathbf{x}^n \neq \mathbf{x}^0$, $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0\| = 0$. Wir betrachten nun die Vektoren $\mathbf{v}^n = (\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0)/\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0\|$. Offenbar gibt es eine Teilfolge $\{\mathbf{v}^{n_k}\}$ der Folge $\{\mathbf{v}^n\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}^{n_k} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)/\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|$. Es existiert daher ein Index m in der Weise, so dass für alle $n_k > n_m$ die Halbgerade

$$p^{n_k} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n | \, \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^{n_k}t, \ t > 0\}$$

einer beliebigen vorgegebenen ε-Kegelumgebung von p^* angehört. Da $\mathbf{x}^{n_k} \in \boldsymbol{M}$, $\mathbf{x}^{n_k} \neq \mathbf{x}^0$ ist, so ist $p^{n_k} \subset \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ und da p^* eine Halbgerade, die durch den Grenzübergang $k \to \infty$ aus der Folge von Halbgeraden p^{n_k} entsteht ist, so gilt auch $p^* \in \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ und somit $\mathbf{x}^* \in \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$. Hiemit haben wir die Inklusion $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0) \subset \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ bewiesen, aus der sich laut (10) die Behauptung 2 ergibt.

Behauptung 3. *Ist* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ *eine konvexe Menge, so stellt die Menge* $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ *für jeden Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ *eine konvexe Menge mit der Eigenschaft* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ *dar.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Behauptung 2 und aus der Fussnote 2).

Behauptung 4. *Ist* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ *eine konvexe Menge, dann gilt für jeden Punkt* $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ *die Gleichheit* $\dim \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0) = \dim \boldsymbol{M}$.

Der Beweis folgt unmittelbar wiederum aus der Behauptung 2 mit Hinsicht auf die Fussnote 2).

Behauptung 5. *Falls* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ *eine abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$ *für alle* $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ *ist, so ist* $\boldsymbol{M}$ *konvex.*

Beweis. Im Falle $\boldsymbol{M} = \{\mathbf{x}^0\}$ gilt die Behauptung trivial. Es seien $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in \boldsymbol{M}$, $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ beliebig und setzen wir voraus (um den Beweis indirekt zu führen), dass es einen Punkt $'\mathbf{x}$ mit

$$(11) \qquad '\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + 't(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \notin \boldsymbol{M}\,, \quad 0 < 't < 1$$

gibt. Bezeichnen wir

$$T_1 = \{t \in \langle 0, 't) \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + t(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \in \boldsymbol{M}\}\,,$$

$$T_2 = \{t \in ('t, 1\rangle \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + t(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \in \boldsymbol{M}\}\,,$$

$$t_1^* = \sup_{T_1} \{t\}\,, \quad t_2^* = \inf_{T_2} \{t\}\,.$$

Aus der Eigenschaft $\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{M}}$ folgt

$$(12) \qquad {}^*\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1 + t_1^*(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \in \boldsymbol{M}\,, \quad {}^*\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + t_2^*(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \in \boldsymbol{M}\,.$$

Es sei $O('\mathbf{x}, \delta)$ eine beliebige (sphärische) Umgebung des Punktes $'\mathbf{x}$ mit dem Halbmesser $\delta > 0$ und mit der Eigenschaft $O('\mathbf{x}, \delta) \cap \boldsymbol{M} = \emptyset$. Bezeichnet man

$$(13) \qquad '\delta = \sup_{O('\mathbf{x},\delta) \cap \boldsymbol{M} = \emptyset} \{\delta\}\,,$$

so gilt offebar

$$(14) \qquad 0 < '\delta \leqq \min \{d('\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}^1)\,, \quad d('\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}^2)\}\,.$$

Aus dem Ansatz $\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{M}}$ folgt, dass die Hypersphäre

$$(15) \qquad \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\mathbf{x} - '\mathbf{x}, \mathbf{x} - '\mathbf{x}) = '\delta^2\}$$

mindestens einen Punkt $''\mathbf{x}$ mit $''\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$ enthält. Daraus und aus der Voraussetzung $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ beliebig, ergibt sich, dass die Halbgeraden

$$''\sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \mathbf{x} = ''\mathbf{x} + t({}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x}),\ t > 0\}\,,$$

$$''\sigma_2 = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \mathbf{x} = ''\mathbf{x} + t({}^*\mathbf{x}^2 - ''\mathbf{x}),\ t > 0\}$$

eben σ-Halbgeraden, die dem $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}(''\mathbf{x})$ angehören, sind, wobei nach (14), (15) mindestens eine dieser σ-Halbgeraden die Umgebung $O('\mathbf{x}, '\delta)$ durchschneidet. Sei es die σ-Halbgerade $''\sigma_1$. Dann gibt es eine solche ε-Kegelumgebung $U(''\mathbf{x}, ({}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x}) / \|{}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x}\|, \varepsilon)$ von $''\sigma_1$ und einen solchen echten Schnitt $\gamma(U, \boldsymbol{H})$ dieser Umgebung, so dass

$$U(''\mathbf{x}, ({}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x})/\|{}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x}\|, \varepsilon) \cap \boldsymbol{H} \subset O('\mathbf{x}, '\delta)\,,$$

$$U(''\mathbf{x}, ({}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x})/\|{}^*\mathbf{x}^1 - ''\mathbf{x}\|, \varepsilon) \cap \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{M} \neq \emptyset\,,$$

gilt. Dies steht aber im Widerspruch mit (13). Es gilt daher $'\mathbf{x} \in \boldsymbol{M}$, womit die Behauptung 5 bewiesen ist.

Literatur

[1] *Nožička F.:* Über einfache Mannigfaltigkeiten in linearen affinnen Raum $\boldsymbol{A}_n$ in globalen Auffassung. Czech Mathematical Journal. 1976.
[2] *Abadie J.:* Nonlinear Programming. North Holland Publishing Company. 1967.
[3] *Bazaraa M. S., Goode J. J., Nashed M. Z.:* On the Cone of Tangents with Applications to Mathematical Programming. 1973.

Souhrn

LOKÁLNÍ STYČNÉ KUŽELE MNOŽINY V $\boldsymbol{E}_n$

LIBUŠE GRYGAROVÁ

V článku jde nejdříve o několik doplňujících poznámek k pojmu lokálního styčného kužele v libovolném bodě množiny v $\boldsymbol{E}_n$ zavedeném v práci [1]. Hlavní pozornost je věnována vlastnostem těchto kuželů pro případ (neprázdných) konvexních množin v $\boldsymbol{E}_n$. Ukazuje se, že lokální styčný kužel v libovolném bodě konvexní množiny je totožný s uzávěrem projekčního kužele téže množiny s vrcholem v tomtéž bodě. Na základě této vlastnosti je pak dokázáno, že lokální styčný kužel v libovolném bodě konvexní uzavřené množiny tuto množinu obsahuje, což je právě charakteristické pro uzavřené konvexní množiny.

Adresse des Autors: RNDr. *Libuše Grygarová,* CSc., Matematicko-fysikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.