František Nožička

Sur une métrique spéciale dans l'espace linéaire et les mouvements du Kepler

Aplikace matematiky, Vol. 33 (1988), No. 1, 49–67

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104286`

SUR UNE MÉTRIQUE SPÉCIALE DANS L'ESPACE LINÉAIRE ET LES MOUVEMENTS DU KEPLER

FRANTIŠEK NOŽIČKA

(Reçu le 3 décembre 1986)

Summary. Dans un espace linéaire n-fois étendu on peut introduire à l'aide de deux fonctions une certaine métrique (les propriétés de ces fonctions étant précisées dans l'article présenté), les courbes géodésiques au sens de cette métrique sont par le système correspondant des équations différentielles d'ordre deux sous les conditions initiales globalement déterminées. Dans le cas $n = 3$ et pour une élection simple des fonctions considérées les courbes géodésiques correspondent aux trajectories d'un point matériel dans le champ gravitationel d'un autre point matériel, c'est-à-dire, aux mouvements de Kepler.

Keywords: la métrique riemannienne, la courbe géodésique, le loi de gravitation, les mouvements de Kepler, le principe de l'action minimale.

La mécanique théorique classique peut être regardée dans notre temps comme une discipline à peu près épuisée et enfermée, et on ne peut pas attendre dans ce domaine qu'on parviendrait ici aux résultats importants nouveaux. On peut donc là découvrir des connexions nouvelles entre des certaines événements et des certaines notions mécaniques, ou parvenir à leurs description à la base d'une conception nouvelle.

L'article présenté concerne le problème classique de deux corps à matière. D'une manière analogue à celle dans la théorie de la rélativité on sort de l'idée que la matière courbe l'espace ordinaire, ou, du point de vue mathématique, que le displacement de la matière détermine la métrique de l'espace même.

A l'aide de deux fonctions $F(\mathbf{x})$ et $w(\mathbf{x})$ définies dans l'espace euclidien $\mathbb{E}_n$ $(n \geqq 2)$ et ayant des certaines propriétés (lesquelles nous voulons préciser la bas) on peut introduire – au moins dans un certaine domaine de l'espace $\mathbb{E}_n$ – une métrique spéciale possédant les propriétés suivantes:

(1) Étant donné un point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}_n$ et un vecteur $\mathbf{v}_0$ dans $\mathbb{E}_n$ différent du vecteur zéro, la courbe géodésique au sens d'une telle métrique est univoquement et globalement déterminée.

(2) Pour une élection spéciale et simple des fonctions $F(\mathbf{x})$ et $w(\mathbf{x})$ les courbes géodésiques considérées correspondent aux trajectories d'un point matériel dans le

champ de gravitation d'un autre point matériel, alors aux mouvements de Kepler. Le système correspondant des équations différentielles représente le loi usuel de gravitation dans le problème de deux corps à matière.

L'article contient de même des formules importantes et bien connues concernant différents types des mouvements de Kepler, qui sont là déduites d'une manière très simple.

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Soit $\mathbb{E}_n$ $(n \geqq 2)$ l'espace euclidien n fois étendu aux coordonnées cartésiennes x^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ et $F(\mathbf{x})$ une fonction définie en $\mathbb{E}_n$ aux propriétés suivantes:

(a) elle possède des dérivées partielles continues d'ordre au moins quatre en $\mathbb{E}_n$;

(b) la matrice $(F_{\alpha\beta})_{n \times n}$ aux éléments

$$F_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2 F}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots. n)$$

est positivement définite au chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \setminus A$, où

$$A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid \nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} \neq \emptyset \,. \tag{1.1}$$

Il résulte immédiatement de (a), (b) que:

– $F(\mathbf{x})$ est une fonction stricte convexe en $\mathbb{E}_n$;

– l'ensemble A contient un seul point;

– pour chaque

$$\mu > \tilde{\mu} := \min\{F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{E}_n\}$$

l'ensemble

$$V_\mu := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid F(\mathbf{x}) = \mu\} \tag{1.2}$$

est une hypersurface régulière et connexe en $\mathbb{E}_n$ au sens de la definition de Monge;

– l'ensemble

$$K_\mu := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid F(\mathbf{x}) \leqq \mu\} \quad (\mu \text{ fixe}, \ \mu > \tilde{\mu})$$

est un ensemble borné, fermé et convexe de dimension n (avec la frontière $\partial K_\mu = V_\mu$).

Dans ce qui suit nous faisons toujours usage de la convention d'Einstein (concernante la sommation usuele dans le calcul tensoriel).

Soit $F(\mathbf{x})$ une fonction donnée aux propriétées (a) et (b), et $w(\mathbf{x})$ une fonction possédant des dérivées partielles contenues d'ordre au moins deux dans le domaine $\mathbb{E}_n \setminus A$, et soit

$$w(\mathbf{x}) > 0 \,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \setminus A \,. \tag{1.3}$$

En introduisant les grandeurs

$$h_{\alpha\beta} := w(\mathbf{x})\, F_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

pour $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \setminus A$, il résulte de (1.4), (1.3) et des suppositions (a), (b) citées plus haut, que la matrice $(h_{\alpha\beta})_{n \times n}$ est positivemenet définite dans chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \setminus A$. Pour les éléments $h^{\alpha\beta}$ de la matrice inverse correspondante on a

$$h^{\alpha\beta} = w^{-1} F^{\alpha\beta} ,$$

où $(F^{\alpha\beta})_{n \times n}$ est la matrice inverse à la matrice $(F_{\alpha\beta})_{n \times n}$, c'est-à-dire,

$$F_{\alpha\gamma} F^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) .$$

Étant donnée une courbe régulière

$$C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid x^{\alpha} = x^{\alpha}(u) \ (\alpha = 1, \ldots, n),\ u \in I\} \subset \mathbb{E}_n \setminus A$$

(I est un interval ouvert), nous définissons le scalaire

$$\sigma = \sigma(u) := \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left(h_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}u} \right)}\, \mathrm{d}u \quad (u_0 \in I \text{ fixe, } u \in I) \tag{1.5}$$

comme la mesure de son arc entre leur points $\mathbf{x}(u_0)$ et $\mathbf{x}(u)$. D'une telle sorte nous avons introdui une certaine métrique riemannienne dans le domaine $\mathbb{E}_n \setminus A$, qui est caractérisée par le tenseur métrique aux composantes $h_{\alpha\beta}$. Le paramètre σ étant pris comme le paramètre nouveau de la courbe C, les égalités suivantes ont lieu le long de la courbe considérée:

$$h_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma} = 1 , \quad F_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{w} . \tag{1.6}$$

Les points $\mathbf{x}_i \in \mathbb{E}_n \setminus A$ $(i = 1, 2)$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, étant donnés, nous désignerons par $\mathscr{L}$ l'ensemble de tous les arcs réguliers

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid x^{\alpha} = x^{\alpha}(u) \ (\alpha = 1, \ldots, n) , \quad u \in \langle u_1, u_2 \rangle ,$$
$$\mathbf{x}(u_i) = \mathbf{x}_i \ (i = 1, 2)\} \subset \mathbb{E}_n \setminus A .$$

Le problème de la détermination d'un arc $L_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathscr{L}$ à longeur minimale au sens de la métrique introduite plus haut par rapport à la classe $\mathscr{L}$ mène au problème variationel

$$\min_{L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathscr{L}} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(h_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}u} \right)}\, \mathrm{d}u ! \tag{1.7}$$

Les équations d'Euler qui doivent être remplies le long d'un arc optimal du problème (1.7) ont la forme suivante

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\sigma^2} + \begin{Bmatrix}\gamma \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,, \tag{1.8$_\text{a}$}$$

où

$$\begin{Bmatrix}\gamma \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} := \tfrac{1}{2}h^{\gamma\varrho}(\partial_\alpha h_{\varrho\beta} + \partial_\beta h_{\alpha\varrho} - \partial_\varrho h_{\alpha\beta})\left(\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1.8$_\text{b}$}$$

sont des coefficients de la connexion correspondante au tenseur métrique $\{h_{\alpha\beta}\}$. Chaque courbe intégrale

$$L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \setminus A \mid x^\alpha = x^\alpha(\sigma)\ (\alpha = 1, \ldots, n),\ \sigma \in \mathscr{I}\} \tag{1.9}$$

du système des équations $(1.8)_\text{a}$ est dite *la courbe géodésique au sens de la métrique considérée* plus haut. Par un calcul mécanique simple il résulte de $(1.8)_{\text{a,b}}$ et de (1.4) la transcription

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\gamma}{d\sigma^2} + \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta\varrho}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} + \frac{dx^\gamma}{d\sigma}\frac{d}{d\sigma}\log w \,-\\ - \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\partial_\varrho \log w = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\end{aligned} \tag{1.10}$$

des équations $(1.8)_\text{a}$. Sous les suppositions données les équations (1.10) possèdent localement – les conditions initiales étant données – une solution unique. Si

$$\tau = \tau(\sigma)\,, \quad \sigma \in \mathscr{I}\left(\frac{d\sigma}{d\tau} > 0 \text{ pour } \tau \in \mathscr{I}\right)$$

est une transformation régulière arbitraire du paramètre σ de la courbe L en (1.9), alors, les équations (1.10) prennent la forme

$(1.11)_\text{a}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 + \frac{dx^\gamma}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\frac{d}{d\sigma}\log w + \frac{d^2\tau}{d\sigma^2}\right) - \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2\partial_\varrho \log w \,+\\ + \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta\varrho}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,.\end{aligned}$$

Nous voulons maintenant préciser le paramètre τ de telle sorte que l'équation

$$\frac{d^2\tau}{d\sigma^2} + \frac{d\tau}{d\sigma}\frac{d}{d\sigma}\log w = 0$$

serrait remplie (le long de la courbe intégrale L la fonction $w(\mathbf{x})$ est une fonction de la variable σ, c'est-à-dire, $w = w(\mathbf{x}(\sigma))$. Il en suit

$$(1.11)_b \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = Cw^{-1} \quad (C > 0 \ldots \text{ une constante intégrale})$$

et les équations $(1.11)_a$ se réduisent aux équations

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta\varrho}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} - \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\partial_\varrho \log w = 0$$

pour $\gamma = 1, \ldots, n$, et — en tenant compte de (1.6) — on les peut écrire sous la forme suivante

$$(1.12) \qquad \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \tfrac{1}{2}F^{\gamma\varrho}F_{\alpha\beta\varrho}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2C^2}F^{\gamma\varrho}\,\partial_\varrho w = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,.$$

2. UNE MÉTRIQUE SPÉCIALE DANS LE DOMAINE $\mathbb{E}_n \setminus A$

Dans le cas

$$(2.1) \qquad F(\mathbf{x}) := \delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\,, \quad r = \|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)}\,, \quad w = w(r)\,,$$

on a

$$A = \{\mathbf{o}\}\,, \quad F_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}\,, \quad F^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\,, \quad F_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

et $h_{\alpha\beta} = 2\,w(r)\,\delta_{\alpha\beta}$. Les équations (1.12) prennent la forme simple

$$(2.2) \qquad \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} - \frac{x^\gamma}{4C^2r}\frac{dw}{dr} = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,,$$

d'où il résulte immédiatement que les courbes intégrales de ces équations différentielles (correspondant aux courbes géodésiques par rapport à la métrique en $\mathbb{E}_n \setminus \{\mathbf{o}\}$ caracterisée par le tenseur métrique aux composantes $h_{\alpha\beta} = 2\,w(r)\,\delta_{\alpha\beta}$) sont des courbes planes.

Lemma 1. *Les équations* (2.2) *prennent la forme*

$$(2.3)_a \qquad \frac{d^2\gamma^\gamma}{d\tau^2} + \frac{kx^\gamma}{r^3} = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,,$$

où $k > 0$ est une constante, seulement dans le cas

$$(2.3)_b \qquad w(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}\,,$$

où $C_2 > 0$ et C_1 sont des constantes arbitraires.

Démonstration. En comparant les équations (2.2) avec les équations $(2.3)_a$ on constate immédiatement que les équations (2.2) mènent aux équations $(2.3)_a$ seulement au cas quand la fonction $w(r)$ remplit l'équation

$$\frac{k}{r^3} = - \frac{1}{4C^2 r} \frac{dw}{dr},$$

dont la solution est

$$w = \frac{4kC^2}{r} + C_1 \quad (C_1 \ldots \text{une constante arbitraire}).$$

En posant

(2.4) $$C_2 := 4kC^2$$

la constante C_2 est alors un nombre positif et la fonction $w(r)$ prend la forme $(2.3)_b$.

Remarque 1. En tenant compte de $(2.3)_a$ on obtient la relation

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}\right) = - \frac{k}{r^3} \delta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} x^\beta = - \frac{k}{r^3} \frac{d}{d\tau} (\tfrac{1}{2}r^2) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{k}{r}\right),$$

alors

$$\frac{d}{d\tau}\left(\delta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{2k}{r}\right) = 0,$$

qui a lieu au chaque point $\mathbf{x}(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$ d'une courbe intégrale du système $(2.3)_a$ des équations différentielles. En posant

$(2.5)_a$ $$v := \sqrt{\left(\delta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}\right)}$$

il en résulte

$(2.5)_b$ $$v^2 - \frac{2k}{r} = C_0 \quad (C_0 \ldots \text{une constante intégrale}).$$

Lemma 2. *Les constantes C_1, C_2, C_0 et k considérées plus haut sont liées par la relation*

(2.6) $$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_0}{2k}.$$

Démonstration. Dans le cas considéré $F(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta (= r^2)$ on obtient de (1.6), $(2.5)_{a,b}$ et de $(1.11)_b$

$$h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = wF_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 2wr^2 \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = \frac{2C^2}{w}\left(C_0 + \frac{2k}{r}\right) = 1,$$

et alors, d'après (2.4), $(2.3)_b$,

$$2C^2\left(C_0 + \frac{C_2}{2C^2 r}\right) = C_1 + \frac{C_2}{r},$$

d'où on a

$$C_0 = \frac{C_1}{2C^2}. \tag{2.7}$$

D'après $(2.7)_a$ et (2.4) on parvient ainsi à la relation (2.6).

Remarque 2. Le carré d'une matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

est défini par

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^2 := \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \begin{vmatrix} a^\alpha & a^\beta \\ b^\alpha & b^\beta \end{vmatrix}^2$$

et la formule bien connue d'algèbre

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$$

a lieu; le symbole $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ signifie ici le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, le symbole $\|\mathbf{a}\|$ est la norme du vecteur $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{E}_n$.

Lemma 3. *Le long d'une courbe intégrale du système $(2.3)_a$ des équations différentielles le carré de la matrice*

$$\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{dx^1}{d\tau} & \dots & \dfrac{dx^n}{d\tau} \end{pmatrix} \tag{$(2.8)_a$}$$

est égal à une constante non-negative, c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{dx^1}{d\tau} & \dots & \dfrac{dx^n}{d\tau} \end{pmatrix}^2 = \tilde{C} \quad (\tilde{C} \geqq 0 \dots \text{une constante}) \tag{$(2.8)_b$}$$

et la relation

$$C_0 r^2 + 2kr - \tilde{C} = \left(r\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \tag{$(2.8)_c$}$$

a lieu dans tous les points $\mathbf{x}(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$ d'une cette courbe.

Démonstration. Par rapport à la definition du carré de la matrice $(2.8)_a$ on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix}^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta \\ \dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta \\ \dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix}.$$

Mais à cause de $(2.3)_a$ on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta \\ \dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} & \dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

et par conséquence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix}^2 = 0\,,$$

alors, l'affirmation $(2.8)_b$ a lieu.

D'après la formule citée dans le remarque 2 on a dans notre cas spécial

$$\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \\ \dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix}^2 = (\delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right) - \left(\delta_{\alpha\beta}x^\alpha\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2,$$

et alors, par rapport à $(2.8)_b$, $(2.5)_a$,

$$\tilde{C} = r^2 v^2 - \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2. \tag{2.9}$$

En tenant compte de $(2.5)_b$ nous en obtenons immédiatement l'équation $(2.8)_c$.

Remarque 3. Comme il était dit auparavant, les courbes intégrales du système $(2.3)_a$ des équations différentielles sont des courbes planes. Il est bien connu de la mécanique classique, que les courbes intégrales considérées sont ou des côniques, ou — dans le cas spécial — un ensemble connexe d'une demidroite sortant du point d'origine $\mathbf{o}$ des coordonnées dans $\mathbb{E}_n$. Dans le cas d'une cônique le point $\mathbf{o}$ est leur foyer. Parceque le point $\mathbf{o}$ est un point singulier des équations $(2.3)_a$, il en résulte, qu'une courbe intégrale

$$L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n \mid x^\alpha = x^\alpha(\tau)\ (\alpha = 1, \dots, n),\ \tau \in I\} \tag{2.10}$$

des équations $(2.3)_a$ appartient au domaine $\mathbb{E}_n \setminus \{\mathbf{o}\}$.

Dans ce qui suit nous voulons présenter brièvement la classification des courbes intégrales considérées pour en déduire après d'une manière très simple des certaines formules bien connues dans la mécanique classique (lesquelles nous obtenons à l'aide de la théorie précédante).

(I) Le cas $\tilde{C} = 0$.

Dans ce cas il résulte de $(2.8)_b$ que la matrice $(2.8)_a$ a le rang égal à 1 dans tous les points $\mathbf{x}(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$ de la courbe intégrale L décrite dans (2.10). Donc, la courbe L est une part connexe de la demi-droite ouverte sortant du point $\mathbf{o}$ et passant par le point initial donné $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$. Dans ce cas spécial on peut le système $(2.3)_a$ des équations différentielles simplifier en les réduisant à une seule équation différentielle

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{k}{r^2} = 0 . \tag{2.11}$$

L'intervalle I du paramètre τ étant l'intervalle maximal de la solution positive $r(\tau)$ de l'équation (2.11) sous les conditions initiales données $\tau_0 \in \operatorname{int} I$, $r(\tau_0) = \|\mathbf{x}_0\| > 0$, $(dr/d\tau)(\tau_0) = v_0$, il résulte de (2.11) à cause de $k > 0$ que $d^2r/d\tau^2 < 0$ pour $\tau \in I$ et par conséquence la concavité stricte de la fonction $r(\tau)$ dans l'intervalle I. On en obtient immédiatement l'implication

$$(2.12)_a \qquad v_0 := \frac{dr}{d\tau}(\tau_0) \leqq 0 \Rightarrow r(\tau_0) = \max\{r(\tau) \mid \tau \in I_0 := \{\tau \in I \mid \tau \geqq \tau_0\}\} .$$

Dans le cas $v_0 > 0$ la fonction concave $r(\tau)$ possède leur maximum dans l'intervalle I – et de même dans I_0 – seulement dans le cas, quand il existe un nombre $\tilde{\tau} \in I$ de telle manière que $(dr/d\tau)(\tilde{\tau}) = 0$. Dans ce cas on obtient de $(2.8)_c$ (en supposant $\tilde{C} = 0$) $C_0\tilde{r} + 2k = 0$ $(\tilde{r} := r(\tilde{\tau}))$. La supposition $\tilde{r} > 0$ mêne à cause de $k > 0$ à la condition $C_0 < 0$; dans le cas $C_0 \geqq 0$ il n'existe pas un point extremal $\tilde{\tau} \in I$ de la fonction $r(\tau)$ par rapport à l'intervalle I, et cette fonction est alors – à cause de leur concavité stricte dans l'intervalle I – une fonction croissante dans cet intervalle. A cause de la relation

$$C_0 + \frac{2k}{r} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 , \quad \tau \in I ,$$

résultant au cas $\tilde{C} = 0$ de $(2.8)_c$, la fonction non-négative $r(\tau)$ ne peut pas être bornée dans l'intervalle $\langle \tau_0, \infty)$. Alors, les implications suivantes ont lieu:

$$C_0 < 0 , \quad v_0 := \frac{dr}{d\tau}(\tau_0) > 0 \Rightarrow \max\{r(\tau) \mid \tau \in I\} = \max\{r(\tau) \mid \tau \in I_0\} = -\frac{2k}{C_0} ,$$

$(2.12)_b$

$$C_0 \geqq 0 , \quad v_0 := \frac{dr}{d\tau}(\tau_0) > 0 \Rightarrow \sup\{r(\tau) \mid \tau \in I\} = \sup\{r(\tau) \mid \tau \in \langle \tau_0, \infty)\} = \infty .$$

Dans le cas $C_0 = 0$, $\tilde{C} = 0$ (qui est d'un certain point de vue un cas critique) on obtient de $(2.5)_b$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{r}} \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_0 \,, \tag{2.12$_c$}$$

et, spécialement

$$v_0 := \frac{dr}{d\tau}(\tau_0) = \sqrt{\frac{2k}{r_0}} \,. \tag{2.12$_d$}$$

(II) Le cas $\tilde{C} > 0$, $C_0 = 0$.

En posant $C_0 = 0$ on obtient de $(2.5)_b$ la relation

$$v^2 r = 2k \,, \tag{2.13$_a$}$$

qui est remplie dans tous les points $\mathbf{x}(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$ d'une courbe intégrale L du système des équations $(2.3)_a$ (décrite en (2.10)). A cause de $C_0 = 0$ il suit de (2.6) $C_1 = 0$ et par conséquence de $(2.3)_b$

$$w = w(r) = \frac{C_2}{r} \quad (C_2 > 0 \; \ldots \; \text{une constante}) \,. \tag{2.13$_b$}$$

Dans le cas considéré $F(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ il suit de (1.6)

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = \frac{r}{2C_2} \tag{2.13$_c$}$$

et, en tenant compte de $(2.13)_{a,b}$, on peut facilement vérifier que les équations (1.10) prennent la forme

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\sigma^2} + \frac{1}{4C_2 r} x^\gamma = \frac{dx^\gamma}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \log r \quad (\gamma = 1, \ldots, n) \,. \tag{2.14}$$

Nous nous pouvons maintenant poser la question quel est le caractère géométrique des courbes intégrales du système (2.14). Pour trouver la réponse correspodante nous sortirons de ces équations en les dérivant d'après le paramètre σ. Nous parvenons ainsi aux équations

$$\frac{d^3 x^\gamma}{d\sigma^3} - \frac{x^\gamma}{4C_2 r^2} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{4C_2 r} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = \frac{d^2 x^\gamma}{d\sigma^2} \frac{d}{d\sigma} \log r + \tag{2.15$_a$}$$

$$+ \frac{dx^\gamma}{d\sigma} \frac{d^2}{d\sigma^2} \log r \quad (\gamma = 1, \ldots, n) \,,$$

qui doivent être satisfaites aux points d'une courbe intégrale. D'après (2.14) on a

$$\frac{x^\gamma}{4C_2 r} = \frac{dx^\gamma}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \log r - \frac{d^2 x^\gamma}{d\sigma^2}$$

et en effectuant l'élimination correspondante dans les équations $(2.15)_a$ nous obtenons après un arrangement convenable

$$(2.15)_b \qquad \frac{d^3x^\gamma}{d\sigma^3} = \frac{dx^\gamma}{d\sigma}\left[\left(\frac{d}{d\sigma}\log r\right)^2 + \frac{d^2}{d\sigma^2}\log r - \frac{1}{4C_2 r}\right] \quad (\gamma = 1, \ldots, n)\,.$$

En tenant compte de $(2.13)_b$ et (2.14) on obtient successivement

$$r\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = \frac{d}{d\sigma}\left(r\frac{dr}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\delta_{\alpha\beta}x^\alpha\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} + \delta_{\alpha\beta}x^\alpha\frac{d^2x^\beta}{d\sigma^2} = \frac{r}{2C_2} + \delta_{\alpha\beta}x^\alpha\left(-\frac{1}{4C_2 r}x^\beta + \frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{d}{d\sigma}\log r\right) =$$

$$= \frac{r}{2C_2} - \frac{r}{4C_2} + \delta_{\alpha\beta}x^\alpha\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{d}{d\sigma}\log r = \frac{r}{4C_2} + \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2,$$

et alors

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} = \frac{1}{4C_2}\,.$$

Parceque d'autre part

$$\left(\frac{d}{d\sigma}\log r\right)^2 + \frac{d^2}{d\sigma^2}\log r = \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\sigma^2},$$

les équations $(2.15)_b$ prennent la forme simple $d^3x^\gamma/d\sigma^3 = 0$ $(\gamma = 1, \ldots, n)$. Les courbes intégrales du système (2.14) étant des courbes planes on peut observer une cette courbe comme une courbe située dans un certain plan aux coordonnées cartésiennes x et y remplissant les équations

$$\frac{d^3x}{d\sigma^3} = 0\,, \quad \frac{d^3y}{d\sigma^3} = 0\,.$$

Leur déscription paramétrique est alors

$$x = a_1\sigma^2 + b_1\sigma + c_1\,, \quad y = a_2\sigma^2 + b_2\sigma + c_2\,,$$

où $a_i\, b_i, c_i$ $(i = 1, 2)$ sont des certaines constantes. Il est bien connu de la géométrie différentielle qu'une telle courbe représente ou une parabole (le cas $a_1b_2 - - a_2b_1 \neq 0$) ou une droite (le cas $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$). A cause de notre supposition $\tilde{C} > 0$ le deuxième cas n'a pas lieu et la courbe intégrale est alors une parabole.

Pour la distance extrémale $\tilde{r} = r(\tilde{\tau})$ du point $\mathbf{o}$ de la courbe extrémale L (décrite dans (2.10)) on obtient de (2.8) (à cause de $\tilde{r} > 0$, $(dr/d\tau)(\tilde{\tau}) = 0$)

$$(2.16) \qquad \tilde{r} = \frac{\tilde{C}}{2k}\,.$$

Dans les points $\mathbf{x}(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$ d 'une courbe intégrale des équations $(2.3)_a$ on a

$$r^2(\tau) = \delta_{\alpha\beta}\, x^\alpha(\tau)\, x^\beta(\tau)\,, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r}\,\delta_{\alpha\beta} x^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

et, en tenant compte de $(2.13)_a$, $(2.3)_a$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{r}\left(-\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \delta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} + \delta_{\alpha\beta} x^\alpha \frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + v^2 - \frac{k}{r}\right] = \frac{k}{r^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 .$$

Il en suit pour la distance extrémale $\tilde{r}$ à cause de $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau)(\tilde{\tau}) = 0$ que $(\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}\tau^2)(\tilde{\tau}) = k/\tilde{r}^2 > 0$. La distance extremale $\tilde{r}$ est donc la distance minimale du point $\mathbf{o}$ de la parabole en question.

(III) Le cas $C_0 < 0\,, \quad \tilde{C} \neq 0\,.$

A cause de la condition $\tilde{r} = r(\tilde{\tau}) > 0$, $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau)(\tilde{\tau}) = 0$, qui doit être satisfaite pour la distance extrémale $\tilde{r}$ de la courbe intégrale correspondante L du point $\mathbf{o}$, on obtient d'après $(2.8)_c$ la condition

(2.17) $$C_0\tilde{r}^2 + 2k\tilde{r} - \tilde{C} = 0\,,$$

d'où il résulte

$$\tilde{r}_{1,2} = -\frac{k}{C_0}\left(1 \mp \sqrt{\left(1 + \frac{C_0\tilde{C}}{k^2}\right)}\right)$$

(on sait que $k^2 + C_0\tilde{C} \geqq 0$, parceque la courbe intégrale Lest une cônique, le point $\mathbf{o}$ étant leur foyer). La distance minimale de la courbe Ldu point $\mathbf{o}$ est alors

$$\tilde{r}_1 = -\frac{k}{C_0}\left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{C_0\tilde{C}}{k^2}\right)}\right) > 0\,,$$

tandisque

$$\tilde{r}_2 = -\frac{k}{C_0}\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{C_0\tilde{C}}{k^2}\right)}\right) > 0$$

est leur distance maximale du point $\mathbf{o}$. Parceque la courbe intégrale L est une cônique, il en suit, qu'elle est nécessairement ou une éllipse (le cas $k^2 + C_0\tilde{C} > 0$) ou un circle (le cas $k^2 + C_0\tilde{C} = 0$). Pour la grandeur de la demi-axe principale de cet éllipse (resp. pour la grandeur du rayon dans le cas d'un circle) on a évidément

$(2.19)_a$ $$a = \frac{1}{2}(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2) = -\frac{k}{C_0}\,.$$

Pour la grandeur b de la demi-axe secondaire d'éllipse correspondante on obtient

$$b^2 = a^2 - e^2 \,, \quad \text{où} \quad e := a - \tilde{r}_1 = -\frac{k}{C_0}\sqrt{\left(1 + \frac{C_0\tilde{C}}{k^2}\right)},$$

alors

$$b = \sqrt{-\frac{\tilde{C}}{C_0}} \,. \tag{2.19$_b$}$$

Étant données les conditions initiales

$$\mathbf{x}_0 = \{x_0^\alpha\} = \{x^\alpha(\tau_0)\} \,, \quad \mathbf{v}_0 = \{v_0^\alpha\} = \left\{\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)\right\}$$

pour la courbe intégrale L du système des équations $(2.3)_a$ (décrite en (2.10)), alors – dans le cas d'un circle – il résulte de $(2.19)_a$ et de $(2.5)_b$

$$r = r(\tau) = r(\tau_0) = -\frac{k}{C_0} \tag{2.19$_c$}$$

$$v(\tau) := \|\mathbf{v}(\tau)\| = \|\mathbf{v}_0\| = \sqrt{\frac{k}{r_0}} \,.$$

(IV) Le cas $C_0 > 0 \,, \quad \tilde{C} \neq 0 \,.$

Dans ce cas on obtient de (2.17) une seule racine admissible $\tilde{r} = r(\tilde{\tau})$ correspondante à la distance minimale du point $\mathbf{o}$ de la courbe intégrale L(décrite en (2.10)) du système $(2.3)_a$,

$$\tilde{r} = \frac{k}{C_0}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{C_0\tilde{C}}{k^2}\right)} - 1\right) \tag{2.20}$$

(la deuxième racine de l'équation quadratique (2.17) est négative, et c'est pourquoi comme une distance pas admissible). La courbe L est une branche d'une certaine hyperbole (car il s'agit de la dernière sorte d'une cônique pas discutée jusqu'ici plus haut). Pour trouver la formule pour la demi-axe principale a, et celle de la demi-axe secondaire b de l'hyperbole correspondante nous voulons considérer le plan contenant cet hyperbole doué des coordonnées cartésiennes x et y, dont le point $\mathbf{o} = (0, 0)$ est leur origine et $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (-\tilde{r}, 0)$ le point $\mathbf{x}(\tilde{\tau})$ de la courbe L, pour lequel

$$\tilde{r} := r(\tilde{\tau}) = \min_{\mathbf{x}\in L}\{\|\mathbf{x}\|\} \,.$$

Parceque l'extrenticité e de l'hyperbole considerée remplit les relations $e^2 = a^2 + b^2$, $e = a + \tilde{r}$, on la peut décrire par

$$\frac{(x + a + \ )^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a\tilde{r} + \tilde{r}^2} = 1 \,.$$

Cette relation étant satisfaite dans tous les points $\mathbf{x}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ de la courbe intégrable L, il en suit

$$\frac{x + a + \tilde{r}}{a^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - \frac{y}{2a\tilde{r} + \tilde{r}^2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = 0\,,$$

alors

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{a\tilde{r} + \tilde{r}^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{x + a + \tilde{r}}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tilde{\tau}^2} - \frac{y}{2a\tilde{r} + \tilde{r}^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\,.$$

En tenant compte de $(2.3)_a$ on en obtient la relation

$$(2.21)\qquad \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{2a\tilde{r} + \tilde{r}^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{kx(x + a + \tilde{r})}{r^3a^2} + \frac{ky^2}{r^3(2a\tilde{r} + \tilde{r}^3)} = 0$$

valable dans tous les points de la courbe L.

Pour $\tau = \tilde{\tau}$ on a $x(\tilde{\tau}) = -\tilde{r}$, $y(\tilde{\tau}) = 0$, $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau)(\tilde{\tau}) = 0$, $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau)(\tilde{\tau}) = 0$, et, en tenant compte de (2.9),

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{\tau})\right)^2 = \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{C}}{\tilde{r}^2}\,.$$

Le point $\mathbf{x}(\tilde{\tau}) = (-\tilde{r}, 0)$ de la courbe L remplit de même l'équation (2.21), et à cause de ses propriétés précédantes il en résulte après un arrangement simple

$$a(-\tilde{C} + 2k\tilde{r}) + k\tilde{r}^2 = 0\,.$$

A cause de (2.17) on en obtient la formule

$$(2.22)_a\qquad a = \frac{k}{C_0}\,,$$

et, en tenant compte de (2.17), $(2.22)_a$ et de la relation $b^2 = 2a\tilde{r} + \tilde{r}^2$ on obtient $b^2 = \tilde{C}/C_0$, et alors

$$(2.22)_b\qquad b = \sqrt{\frac{\tilde{C}}{C_0}}\,.$$

3. QUELQUES CONSÉQUENCES PHYSIQUES

Dans le cas $n = 3$ les équations $(2.3)_a$ rappelons le loi classique de Newton

$$(3.1)\qquad m_1\frac{\mathrm{d}^2x^\gamma}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\kappa(m_1 + m_2)\,m_1}{r^3}\,x^\gamma\quad(\gamma = 1, 2, 3)\,,$$

où m_2 est la masse d'un point matériel central p_2, m_1 la masse d'un seconde point matériel p_1 et κ la constante gravitationelle (dépendante du choix des unités physiques). C'est alors le cas où on pose dans $(2.3)_a$

$$(3.2)_a \qquad k := \kappa(m_1 + m_2)\,.$$

Soit $x^\gamma(\tau)$ $(\gamma = 1, 2, 3)$, $\tau \in I$ (I étant le domaine maximal du paramètre τ, où les fonctions $x^\gamma(\tau)$ sont définies) la solution des équations (3.1) sous les conditions initiales

$$\tau_0 \in \operatorname{int} I\,, \quad \mathbf{x}_0 = \{x_0^\gamma\} = \{x^\gamma(\tau_0)\} \ (\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}),\ \mathbf{v}_0 = \{v_0^\gamma\} = \left\{\frac{dx^\gamma}{d\tau}(\tau_0)\right\}.$$

La courbe

$$L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3 \mid x^\gamma = x^\gamma(\tau) \ (\gamma = 1, 2, 3),\ \tau \in I\}$$

est alors une courbe intégrale des équations différentielles (3.1), tandisque la courbe

$$L_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3 \mid x^\gamma = x^\gamma(\tau) \ (\gamma = 1, 2, 3)\,, \quad \tau \in I_0 := \{\tau \in I,\ \tau \geqq \tau_0\}\}$$

représente la trajectorie du point p_1 par rapport à l'observateur lié au point p_2, dont le système des coordonnées cartésiennes est fixe (par rapport aux étoiles fixes); il lui même possède les coordonnées $x^\gamma = 0$ $(\gamma = 1, 2, 3)$ dans son système. En désigneant

$$(3.2)_b \qquad c := \tfrac{1}{2}\sqrt{\tilde{C}}\,, \quad E := \tfrac{1}{2}m_1 C_0\,, \quad T := \tfrac{1}{2}m_1 v^2\,, \quad U := \frac{-\kappa m_1(m_1 + m_2)}{r}$$

où $\tilde{C}$, C_0 sont des constantes ayant la signification de $(2.8)_b$, $(2.5)_b$ et $v = v(\tau)$ le scalaire introduit dans $(2.5)_a$ le long de la courbe intégrale L, alors, la constante c signifie la vitesse plane, $v = v(\tau)$ la vitesse scalaire, E l'énergie totale, T l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle du point matériel p_1 (à masse m_1) par rapport à l'observateur en question. Définissons encore

$$d_{\min} := \inf_{\tau \in I}\{\|\mathbf{x}(\tau)\|\}\,, \quad d_{\max} := \sup_{\tau \in I}\{\|\mathbf{x}(\tau)\|\}$$

$(3.2)_c$ $\quad a$ ... demi-axe principale $\Big\}$ (L étant une éllipse ou une hyperbole)
$\quad b$ ... demi-axe secondaire
$\quad v_c$ ... la vitesse circulaire (le cas d'un circle)
$\quad v_e$ ... la vitesse d'échappement (L étant une parabole ou une demi-droite).

En tenant compte des résultats contenus dans les cas spéciaux (I), (II), (III), (IV) discutés dans le paragraphe précédant, et en respectant la symbolique introduite dans $(3.2)_{a,b,c}$, on parvient ainsi au tableau ajouté la bas.

En tenant compte de (2.6) et de $(3.2)_{a,b}$ on a

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{E}{\kappa(m_1 + m_2)\, m_1}$$

c	E	le type de la cônique	$d_{\min}$
0	<0	un mouvement rectiligne	0
0	$\geqq 0$	un mouvement rectiligne	r_0
$\neq 0$	<0	une éllipse, si $E > \dfrac{-\kappa^2 m_1(m_1+m_2)^2}{8c^2}$	$\dfrac{-\kappa m_1(m_1+m_2)}{2E} \cdot \left[1 - \sqrt{\left(1 + \dfrac{8Ec^2}{\kappa^2 m_1(m_1+m_2)^2}\right)}\right]$
$\neq 0$	<0	un circle, si $E = \dfrac{-\kappa^2 m_1(m_1+m_2)^2}{8c^2}$	r_0
$\neq 0$	>0	une branche d'une hyperbole	$\dfrac{\kappa m_1(m_1+m_2)}{2E} \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \dfrac{8Ec^2}{\kappa^2 m_1(m_1+m_2)^2}\right)} - 1\right]$
$\neq 0$	0	une parabole	$\dfrac{2c^2}{\kappa(m_1+m_2)}$

r_0 . . . la distance initiale
v_0 . . . la vitesse initiale
$E := \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \dfrac{\kappa m_1(m_1+m_2)}{r_0}$ . . . l'énergie totale
c . . . la vitesse plane

du point p_1 par rapport au point central p_2

et en posant $C_1 := \frac{1}{2}E$, $C_2 := \frac{1}{2}\kappa(m_1 + m_2)\, m_1$ on obtient – en sortant des fonctions $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}) = C_1 + C_2/r$ – d'après (1.4), $(3.2)_b$ –

$$h_{\alpha\beta} = 2\left(C_1 + \frac{C_2}{r}\right)\delta_{\alpha\beta} = \left(E + \frac{\kappa m_1(m_1+m_2)}{r}\right)\delta_{\alpha\beta} = (E - U)\,\delta_{\alpha\beta}$$

pour $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Le scalaire σ introduit dans (1.5) prend alors le long d'une courbe intégrale L du système (3.1) des équations différentielles la forme

$$\sigma = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{(E - U)} \sqrt{\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

$d_{\max}$	a	b	$\mathring{v}$	v_e
$\dfrac{-\kappa m_1(m_1+m_2)}{E}$	–	–	–	–
∞	–	–	–	$\sqrt{\dfrac{2\kappa(m_1+m_2)}{r_0}}$
$\dfrac{-\kappa m_1(m_1+m_2)}{2E} \cdot \left[1+\sqrt{\left(1+\dfrac{8Ec^2}{\kappa^2 m_1(m_1+m_2)^2}\right)}\right]$	$\dfrac{-\kappa m_1(m_1+m_2)}{2E}$	$\sqrt{\dfrac{-2m_1c^2}{E}}$	–	–
r_0	r_0	r_0	$\sqrt{\dfrac{\kappa(m_1+m_2)}{r_0}}$	–
∞	$\dfrac{\kappa m_1(m_1+m_2)}{2E}$	$\sqrt{\dfrac{2m_1c^2}{E}}$	–	–
∞	–	–	–	$\dfrac{2\kappa(m_1+m_2)}{r_0}$

En introduisant l'arc métrique usuel

$$s = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\left(\delta_{\alpha\beta}\,\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)}\,\mathrm{d}\tau$$

comme paramètre nouveau de la courbe L on parvient à la formule

$$\sigma = \sigma(s) = \int_0^s \sqrt{(E-U)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Si nous désigneons par $\mathscr{L}$ l'ensemble de tous les arcs réguliers $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ joigneant deux points donnés $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ $(\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$ du domaine $\mathbb{E}_3 \setminus \{\mathbf{o}\}$, le problème variationel (1.7) est dans ce cas spécial équivalent au problème variationel

$$\min_{L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in\mathscr{L}} W! := \min_{L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in\mathscr{L}} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(E-U)}\,\mathrm{d}s!$$

avec $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(s_i)$ $(i = 1, 2)$, qui mène nécessairement à l'anulation de la variation δW

(c'est-à-dire, $\delta W = 0$). C'est donc *le principe de l'action minimal d'Hamilton-Jacobi* bien connu de la mécanique classique. Le scalaire σ a donc la signification physique de l'intégrale de l'action.

En tenant compte des considérations précédantes nous parvenons à la conclusion suivante:

Si m_1 at m_2 sont les masses de deux corps à matière représentés par deux point matériels p_1, p_2 et E l'énergie totale du point p_1 par rapport à l'observateur lié au point centrale p_2 (dont le système de reférence est un système cartésien orienté par rapport aux étoiles fixes), alors, les valeurs m_1, m_2 et E déterminent univoquement une certaine métrique riemannienne dans l'espace ordinaire, qui est caratérisée par les composantes

$$h_{\alpha\beta} := \left(E + \frac{\kappa m_1(m_1 + m_2)}{r}\right)\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

du tenseur métrique. Les courbes géodésiques au sens de cette métrique sont ou des cônique ou des parts connexes d'une demi-droite sortant dù point **o**. Cettes courbes correspondent donc aux mouvements de Kepler dans le champ gravitationel en question.

Literature

[1] *S. Banach:* Mecanics (Nakladem Polskiego Towarzystwa Matematycznego), Warszawa—Wroclaw 1951.

[2] *C. A. Burdet:* Theory of Kepler Motion. The General Pertubed Two Body Problem. Basel, Birkhäuser A.G., 1968.

[3] *Г. Н. Дубошин:* Правочное руководство по небесной механике и астродинамике. ,,Наука", Москва 1976.

[4] L. *Funk:* Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1962.

[5] *F. Nožička:* O jednom modelu v klasickém problému dvou těles. (Sur un modèle dans le problème de deux corps.) Aplikace matematiky, T. 5, 1960, č. 1.

[6] *E. Штифель, Шейфеле:* Линейная механика. ,,Наука", Москва 1975.

[7] *A. Sommerfeld:* Vorlesungen über theoretische Physik. Band I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.G. Leipzig 1954, p. 226.

[8] *V. Trkal:* Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. (Le mécanique des points matériels et du corps solide.) Nakladatelství ČSAV, Praha 1956, p. 159—163 et 336—338.

[9] *E. T. Whittaker:* Analytische Dynamik der Punkte und der starren Körper. Verlag J. Springer, Berlin 1924, p. 91—93.

[10] *E. T. Whittaker:* A Treatise on the analytical Dynamics of Particles and rigid bodies. Cambridge University Press, 1961.

[11] *Tullie Levi-Civita e U. Amaldi:* Lezioni di Mecanica rationale. Vol. II, Editore Nicola Zanichelli, Bologna 1951.

[12] *P. Appel:* Traité de mécanique rationelle; Tome 2. Editeur Gauthier-Vilars, Paris 1941.

Souhrn

O JEDNÉ SPECIÁLNÍ METRICE V LINEÁRNÍM PROSTORU A KEPLEROVSKÉ POHYBY

FRANTIŠEK NOŽIČKA

V lineárním n-rozměrném prostoru lze zavést na základě dvou funkcí, jejichž vlastnosti jsou v článku upřesněny, určitou metriku, přičemž geodetické křivky ve smyslu této metriky jsou příslušným systémem diferenciálních rovnic druhého řádu za daných počátečních podmínek globálně určeny. V případě $n = 3$ a při určité jednoduché volbě uvažovaných dvou funkcí odpovídají pak tyto geodetické křivky trajektoriím hmotného bodu v gravitačním poli jiného hmotného bodu, tedy tak zvaným Keplerovským pohybům.

Резюме

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КЕПЛЕРОВСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

FRANTIŠEK NOŽIČKA

В линейном n-мерном пространстве можно ввести на основе двух функций, свойства которых приведены в статье, некоторую метрику, причем геодетические кривые в смысле этой метрики глобально определены соответствующей системой дифференциальных уравнений второго порядка при данных начальных условиях. В случае $n = 3$ и при в некотором смысле простом выборе рассматриваемых двух функций, эти геодетические кривые соответствуют траекториям материальной точки в гравитационном поле другой материальной точки, т.е. так называемым Кеплеровским движениям.

Adresse de l'auteur: Prof. Dr. *František Nožička,* Dr.h.c., Matematicko-fysikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.