Archivum Mathematicum

Mario Villa

Le direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 1, 1--5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104707

LE DIREZIONI CARATTERISTICHE DI UNA TRASFORMAZIONE PUNTUALE

MARIO VILLA

A Otakar Borůvka in occasione del suo Giubileo scientifico

(Presentata il 18 dicembre 1969)

1. In un lavoro del 1926 il Borůvka introdusse per primo la nozione di direzione caratteristica in una trasformazione puntuale fra due piani proiettivi [1].

Una trasformazione puntuale T tra due piani proiettivi $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}'_2$, è rappresentata da equazioni del tipo

$$x' = f(x, y), \qquad y' = \varphi(x, y),$$

essendo x, y, e x', y' coordinate proiettive (non omogenee) nei due piani, f e φ funzioni che ammettono uno sviluppo in serie di potenze nell'intorno di una coppia O, O' di punti corrispondenti. La coppia O, O' si dice regolare se lo jacobiano delle funzioni f e φ è ivi $\neq 0$. Le direzioni caratteristiche considerate da Borůvka sono le direzioni che conservano le inflessioni per le curve uscenti da O, O'. Si hanno tre coppie di direzioni caratteristiche (corrispondenti nella proiettività fra i fasci di direzioni uscenti da O e da O' subordinata da T), a meno che esse non siano indeterminate.

La nozione di direzione caratteristica si è rilevata del massimo interesse e, con le relative estensioni, ha acquistato carattere fondamentale nella teoria delle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi (sia in ricerche locali che relative a regioni di regolarità) che si è sviluppata soprattutto in Italia, in Cecoslovacchia, in Romania, ma anche altrove. Del resto una prima classificazione delle trasformazioni puntuali fra due regioni di regolarità piane dovuta allo stesso Borůvka è basata appunto sulle direzioni caratteristiche distinguendosi le trasformazioni puntuali fra piani in quattro specie: trasformazioni puntuali di 1ª specie nelle quali, nella coppia generica di punti corrispondenti, le tre direzioni caratteristiche uscenti da ciascun punto sono distinte; trasformazioni puntuali di 2ª specie quando, nella coppia generica, due delle tre direzioni caratteristiche coincidono; trasformazioni puntuali di 3ª specie quando, nella coppia generica, le tre direzioni caratteristiche coincidono; le omografie (nelle quali, in ogni coppia di punti corrispondenti, le direzioni caratteristiche sono indeterminate).

2. La nozione di direzioni (e quindi rette) caratteristiche, insieme

a quella, altrettanto fondamentale, di proiettività caratteristica è stata da me ottenuta ricorrendo alla varietà di C. Segre [2].

Si consideri sulla varietà V_4 di Segre delle coppie di punti dei due piani la superficie Σ che rappresenta la trasformazione T e su Σ il punto P che rappresenta (O, O') e ancora lo spazio $S(2)$-osculatore in P alla superficie Σ. Ebbene questo $S(2)$-osculatore interseca la V_4 in tre coniche che rappresentano appunto le tre proiettività caratteristiche tra le tre coppie di rette caratteristiche corrispondenti.

3. Per le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi $\mathscr{P}_r$ (a r dimensioni, $r > 1$) le *direzioni caratteristiche* sono $2^r - 1$ a meno che non siano infinite o indeterminate [3].

E sono state fatte varie ricerche rivolte a determinare le trasformazioni puntuali che, in regioni di regolarità, presentano certe anomalie riguardo appunto alle direzioni caratteristiche. Così si sono ricercate le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi $\mathscr{P}_3$ che hanno, in ogni coppia di punti corrispondenti (di regioni di regolarità) anzichè sette coppie di rette caratteristiche, infinite, costituenti necessariamente (in ciascun spazio) un cono quadrico, oltre ad un'altra retta [4].

Si sono pure ricercate le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi $\mathscr{P}_3$ per cui, in ogni coppia di punti corrispondenti, le sette coppie di rette caratteristiche sono tutte coincidenti, ecc. ecc. [5].

4. Si chiamano curve caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi le curve le cui tangenti sono le rette caratteristiche. Nel caso delle trasformazioni tra due piani, esiste, in generale, in ciascun piano tre sistemi ∞^1 di curve caratteristiche formanti un tritessuto di curve (*tritessuti caratteristici*). E lo studio dei tritessuti caratteristici è del massimo interesse nella teoria delle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi.

A tali tritessuti è strettamente connessa anche la nozione di *applicabilita proiettiva* di due trasformazioni puntuali e di *elemento lineare proiettivo* di una trasformazione puntuale [6].

5. La nozione di direzioni caratteristiche rientra, come caso particolare, in quella di *direzioni d'osculazione e d'iperosculazione* di due trasformazioni puntuali.

Date fra due spazi proiettivi $\mathscr{P}_r$, $\mathscr{P}'_r$ $(r > 1)$ due trasformazioni puntuali T_1, T_2 tangenti in una coppia regolare (O, O') [7], esistono, in generale, $2^r - 1$ E_1 di centro O (oppure O') per i quali ogni E_2 contenente quell' E_1 è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_2 [8].

Le direzioni in discorso si dicono *direzioni d'osculazione* di T_1, T_2 in (O, O').

Tenendo presente che esistono ∞^r omografie tangenti a una trasformazione puntuale T fra $\mathscr{P}_r$, $\mathscr{P}'_r$ in una coppia regolare di punti corrispondenti, ne deriva una nuova definizione delle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale:

Le direzioni caratteristiche di T in (O, O') sono le direzioni d'osculazione di T e di una delle sue omografie tangenti in (O, O').

Più in generale si ha:

Date fra due spazi $\mathscr{P}_r, \mathscr{P}'_r$ due trasformazioni puntuali T_1, T_2 aventi in una coppia regolare (O, O') lo stesso intorno d'ordine $s > 0$, esistono, in generale, $\dfrac{(s+1)^r - 1}{s}$ E_1 di centro O (oppure O') per i quali ogni E_{s+1} contenente quell' E_1 è mutato sia da T_1 che da T_2 nello stesso E_{s+1} [9].

Le direzioni in discorso si dicono (per $s > 1$) *direzioni d'iperosculazione* di T_1, T_2 in (O, O'). Nelle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi $\mathscr{P}_r, \mathscr{P}'_r$ con $r > 2$, un'altra estensione di tutt'altra natura della nozione di direzioni caratteristiche è quella di *calotte caratteristiche* (cioè calotte piane del 2° ordine corrispondenti) a cui si collegano altre ricerche [10].

6. Una nozione di carattere locale molto notevole per le ricerche relative a regioni di regolarità e che, in un certo senso, si collega alle direzioni d'iperosculazione, è quella di corrispondenza linearizzante di due trasformazioni puntuali.

Per semplicità consideriamo soltanto le trasformazioni puntuali fra due piani. Siano T_1, T_2 due trasformazioni puntuali fra i piani $\mathscr{P}_2, \mathscr{P}'_2$ che si approssimano fino all'intorno di ordine $s(>0)$ della coppia regolare di punti corrispondenti (O, O'). Fissata una retta p per O si considerino le due curve corrispondenti in T_1 e T_2 ad una curva passante per O e tangente in O a p. I fasci che proiettano tali curve da un punto S (di $\mathscr{P}'_2$) hanno lungo SO' un contatto analitico, in generale, di ordine s; il luogo dei punti S per cui tale contatto è di ordine $s+1$ almeno è una retta $\bar{p}$ per O'.

Le trasformazioni puntuali T_1, T_2, approssimandosi fino all'intorno di ordine $s(>0)$ di (O, O'), subordinano fra i fasci O, O' una stessa proiettività (non degenere) Ω. Se p' è la retta corrispondente in Ω alla $\bar{p}$, si può considerare la corrispondenza γ che associa alla retta p la retta p'. Si dirà γ *corrispondenza linearizzante* di T_1 e T_2.

La γ è algebrica di indici $1, s+1$, cioè d'ordine $s+1$ [11].

Si ha:

Le rette unite della corrispondenza linearizzante di T_1, T_2 in (O, O') sono quelle relative alle $s+2$ direzioni d'iperosculazione di T_1, T_2 in (O, O') [12].

Le corrispondenze linearizzanti considerate da Čech [13] relative a una trasformazione puntuale T in una coppia regolare (O, O') sono le corrispondenze linearizzanti (nel senso precedente) della T e di una delle sue ∞^2 omografie tangenti in (O, O').

7. Nelle mie recenti ricerche sulle trasformazioni puntuali fra tre spazi proiettivi $\mathscr{P}_r$, $\mathscr{P}'_r$, $\mathscr{P}''_r$ ho introdotto certe direzioni che ho chiamate *caratteristiche* e che costituiscono — in un certo senso — un'estensione delle direzioni caratteristiche relative a due spazi [14].

Per semplicità consideriamo tre piani $\mathscr{P}_2, \mathscr{P}'_2, \mathscr{P}''_2$.

Sia O, O', O'' una terna (regolare) di punti corrispondenti.

Se x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 sono le coordinate proiettive (non omogenee) in $\mathscr{P}_2, \mathscr{P}'_2, \mathscr{P}''_2$, la trasformazione $\mathfrak{T}$ è rappresentata da equazioni del tipo seguente

$$z_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2), \qquad z_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2)$$

dove f_1 e f_2 sono funzioni sviluppabili in serie di potenze nell'intorno dei punti O', O''.

Si dimostra [15] che per ogni direzione uscente da O (ad esempio) vi sono nei tre piani tre E_2 perfettamente determinati che si corrispondono, aventi i centri in O, O', O'' (quello in $\mathscr{P}_2$ avente inoltre in O la direzione considerata).

Ci si può domandare: esistono direzioni per O per cui almeno uno dei tre E_2 suddetti è di flesso?

Si dimostra [16]:

Esistono per O (ad esempio) tre terne di direzioni per cui uno dei tre E_2 determinati da tali direzioni è di flesso; le direzioni per cui è di flesso l' E_2 di $\mathscr{P}_2$, o di $\mathscr{P}'_2$, o di $\mathscr{P}''_2$ costituendo una stessa terna.

Le nove direzioni suddette si diranno *caratteristiche* di $\mathfrak{T}$.

La proprietà si estende subito alle trasformazioni puntuali fra tre spazi $\mathscr{P}_r, \mathscr{P}'_r, \mathscr{P}''_r$ in una coppia (regolare) O, O', O'' $(r > 1)$ e si dimostra che le direzioni *caratteristiche* per O (ad esempio) sono 3^r [17].

[1] O. Borůvka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, I, II, N. 72, 85, Brno (1926, 1927).

[2] M. Villa, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. I. Le proiettivita caratteristiche*, Accademia d'Italia, Rendiconti, Ser. VII, Vol. 3, p. 718 (1942).

[3] M. Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. I. Intorno del 2° ordine*, Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, Ser. VIII, Vol. 4, p. 55 (1948).

[4] M. Villa, *Alcuni risultati e problemi sulle trasformazioni puntuali*, Atti del III Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Pisa 1948, Casa Editrice Perrella, Roma (1951); E. Čech, *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, I, II, III, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 74, p. 32 (1949); Vol. 75, p. 123, p. 137 (1950).

[5] Per un'ampia bibliografia sulla teoria delle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi, si veda: M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali fra due o più spazi proiettivi*, Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Bologna, 1967, Case Editrici Zanichelli (Bologna) e Swets-Zeitlinger (Amsterdam) (1970).

[6] M. Villa, *Applicabilité projective des 3-tissus et des transformations ponctuelles*, Deuxième Colloque de Géométrie différentielle du CBRM, Ed. Thone, Liège, p. 113 (1962).
[7] Due trasformazioni puntuali si dicono tangenti in una coppia (O, O') quando hanno ivi lo stesso intorno del 1° ordine.
[8] Con E_r si indica un elemento differenziale d'ordine r.
[9] M. Villa, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. 2, p. 188 (1947).
[10] Si veda la bibliografia citata nella [5].
[11] M. Villa, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, Conferenza del Seminario Matematico dell'Univ. di Bari, n. 10 (1955).
[12] M. Villa, op. cit. nella [11].
[13] E. Čech, op. cit. nella [4].
[14] M. Villa, *Sulle corrispondenze fra tre piani*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. IV, Vol. 71, p. 351 (1966).
[15] M. Villa, op. cit. nella [14].
[16] M. Villa, op. cit. nella [14].
[17] M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali fra piú di due spazi a n dimensioni*, I. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. 22, p. 57 (1967).

Istituto di Geometria dell' Università
Piazza di Porta S. Donato, 5 — Bologna