Květomil Stach

Normalgruppoide einer Kategorie

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 4, 213--220

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104726`

NORMALGRUPPOIDE EINER KATEGORIE

Květomil Stach

(Eingegangen am 12. November 1968)

EINLEITUNG

In der Arbeit [4] bewies O. Borůvka den folgenden Satz: Es sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe und $\mathbf{F}$ ihre Untergruppe. Der Normalisator $\mathbf{N_F}$ der Gruppe $\mathbf{F}$ in $\mathbf{G}$ sei mit $\mathbf{F}$ identisch. Ferner seien a und b beliebige Elemente von $\mathbf{G}$. Bezeichnen wir $\mathbf{G}_a = a^{-1}\mathbf{F}a$, $\mathbf{G}_b = b^{-1}\mathbf{F}b$. Dann ist $\{b^{-1}\mathbf{F}a\} = \mathbf{G}_l/\mathbf{G}_a \cap \cap \mathbf{G}_r/\mathbf{G}_b$. Dieser Satz spielte eine interessante Rolle in der algebraischen Dispersionstheorie oszillatorischer Lineardifferentialgleichungen 2. Ordnung im Intervall $(-\infty, +\infty)$.

Ich wollte diese algebraische Theorie auf beliebige zweidimensionale Räume von stetigen Funktionen übertragen. Dabei mußte ich mit dem Begriff der Kategorie und des Gruppoids arbeiten. Deshalb war es zweckmäßig, die Begriffe einer normalen Untergruppe und eines Normalisators auf Kategorien und Gruppoide zu übertragen.

Ich knüpfe an meine Arbeit [1] an. Alle Begriffe in der vorliegenden Arbeit nehme ich in demselben Sinne wie in [1]. Deshalb muß ich oft auf [1] verweisen. Diese Hinweise bezeichne ich mit der Vorzahl 1. Die Hinweise auf das Buch [2] bezeichne ich mit H und die Hinweise auf [3] mit BI. Bei allen Hinweisen bedeutet D — die Definition, S — den Satz, V — die Vereinbarung und B — die Bemerkung.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist in dem Satz 2.5, der eine Verallgemeinerung des obenangeführten Satzes von O. Borůvka ist.

§ 1: NORMALGRUPPOIDE

Satz 1.1: Es sei $\mathbf{G}$ ein Teilgruppoid [H-D.2.21] der Kategorie $\mathbf{C}$ [H-D.2.14]. Die Menge $K = \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$ [V.1.2.1] ist die Trägermenge einer Kategorie $\mathbf{K}$ und $\mathbf{G}$ ist ein Untergruppoid in $\mathbf{K}$ [H-D.7.4].

Beweis: I. Es sei $x \in \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$. Dann existieren $y, z \in G$ so, daß $l(x) = l(y)$, $r(x) = r(z)$. Da $\mathbf{G}$ ein Gruppoid ist, ist $l(y) \in \mathbf{G}$, $r(z) \in \mathbf{G}$. Folglich $l(x), r(x) \in G \subset \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$.

II. Es seien $x, y \in \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$, $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Dann ist $l(xy) = l(x)$, $r(xy) = r(y)$ und deshalb ist $xy \in \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$.

Nach H-S.2.27 ist $\mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$ die Trägermenge einer Kategorie $\mathbf{K}$.

III. Es sei $e \in \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G) \cap E$, wobei E die Menge aller Einheiten aus K ist. Dann existiert $g \in G$ so, daß $e = l(e) = l(g)$ ist. Aus $g \in G$ folgt: $l(g) \in G$ und deshalb $K \cap E \subset G$. Folglich $\mathbf{G}$ ist ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{K}$.

Definition 1.1: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C**. Wenn für jedes $a \in \mathrm{L}(G) \cap \mathrm{R}(G)$ gilt:

$$aG \cap \mathrm{R}(a) = Ga \cap \mathrm{L}(a),$$

sagen wir, daß **G** ein normales Teilgruppoid der Kategorie **C** ist.

Satz 1.2: Jedes normale Teilgruppoid **G** einer Kategorie **C** ist ein normales Untergruppoid der Kategorie **K**, deren Trägermenge die Menge $K = \mathrm{R}(G) \cap \mathrm{L}(G)$ ist.

Beweis: Nach S.1.1 ist G ein Untergruppoid der Kategorie **K**.

Bezeichnen wir mit $R_C(a)$ [resp. $R_K(a)$] die Menge aller solcher $x \in C$ [resp. $x \in K$], für die $r(x) = r(a)$ ist. Ähnlich: $\mathrm{L}_C(a)$ [resp. $\mathrm{L}_K(a)$]. Es sei

$$a \in K,\ x \in aG \cap \mathrm{R}_C(a). \tag{1}$$

Nach S.1.3.6 ist

$$r(x) = r(a),\ l(x) = l(a). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt: $x \in K$ und wegen (1) auch $x \in \mathrm{R}_K(a)$. Folglich $x \in aG \cap R_K(a)$.

Anderseits aus $x \in aG \cap \mathrm{R}_K(a)$ und aus S.1.3.6 folgt: $x \in aG \cap \mathrm{R}_C(a)$. Deshalb ist $aG \cap \mathrm{R}_C(a) = aG \cap \mathrm{R}_K(a)$.

Ähnlicherweise erhalten wir auch $Ga \cap \mathrm{L}_C(a) = Ga \cap \mathrm{R}_K(a)$. Da **G** ein normales Teilgruppoid der Kategorie **C** ist, ist $aG \cap R_C(a) = Ga \cap \mathrm{L}_C(a)$. Daraus und aus obigem folgt auch: $aG \cap R_K(a) = Ga \cap L_K(a)$ und unser Satz ist bewiesen.

Definition 1.2: Die Zerlegung $\mathfrak{R}$ einer Kategorie **C** heißt eine erzeugende Zerlegung, wenn die zugehörige Äquivalenz eine Kongruenzrelation der Kategorie **C** ist [H-D.1.28].

Satz 1.3: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Zerlegung $\mathfrak{R}$ der Kategorie **C** eine erzeugende Zerlegung wäre, ist: Zu je zwei Elementen $A, B \in \mathfrak{R}$ existieren drei Elemente $C_1, C_2, C_3 \in \mathfrak{R}$ so, daß

$$l(A) \subset C_1,\ r(A) \subset C_2,\ AB \subset C_3 \tag{1}$$

ist.

Beweis: Bezeichnen wir die zu $\mathfrak{R}$ gehörige Äquivalenz mit $\leftrightarrow$.

I. Es sei $\mathfrak{R}$ erzeugend. Dann ist $\leftrightarrow$ eine Kongruenzrelation und nach H-S.2.31 können wir $C_1 = \bar{l}(A)$, $C_2 = \bar{r}(A)$ und $C_3 = A \odot B$ wählen und die Bedingung (1) ist erfüllt.

II. Es sei die Bedingung (1) erfüllt. Wählen wir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C$, $a_1 \leftrightarrow a_2$, $b_1 \leftrightarrow b_2$, $(a_1, b_1) \in \mathrm{D}(\varphi)$, $(a_2, b_2) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und bezeichnen wir mit A [resp. B] die Klasse der Zerlegung $\mathfrak{R}$, zu der a_1, a_2 [resp. b_1, b_2] gehören. Dann ist $l(a_1) \in C_1$, $l(a_2) \in C_1$ und dafür $l(a_1) \leftrightarrow l(a_2)$. Ähnlicherweise $r(a_1) \leftrightarrow r(a_2)$. Ferner: $a_1b_1 \in C_3$, $a_2b_2 \in C_3$, wovon $a_1b_1 \leftrightarrow a_2b_2$

Folglich $\leftrightarrow$ ist eine Kongruenzrelation und $\mathfrak{R}$ ist eine erzeugende Zerlegung.

Unser Satz ist bewiesen.

Satz 1.4: Jedes Gruppoid ist in bezug auf sich selbst normal und die zugehörige Totalzerlegung ist identisch mit der Zerlegung, die zur Äquivalenz: $a \sim b \Leftrightarrow [a,\ b \in G \wedge l(a) = l(b) \wedge r(a) = r(b)]$ gehört.

Beweis: Bezeichnen wir mit $\leftrightarrow$ die Äquivalenz, die zur linksseitigen Totalzerlegung des Gruppoids **G** in bezug auf sich selbst gehört.

I. Es sei $a \leftrightarrow b$. Nach S.1.3.6 ist $a \sim b$.

II. Es sei $a \sim b$, d. h. $r(a) = r(b)$, $l(a) = l(b)$. Da **G** ein Gruppoid ist, existiert $a^{-1} \in G$ so, daß $r(a^{-1}) = l(b)$, $l(a^{-1}) = r(b)$ und $aa^{-1} = l(a) = l(b)$ ist. Folglich $(a^{-1},\ b) \in \mathrm{D}(\varphi)$, $a^{-1}b \in G$ und $b = (aa^{-1})\,b = a(a^{-1}b) \in aG$. Wegen $r(b) = r(a)$ ist auch $b \in aG \cap \mathrm{R}(a)$, d. h. $b \leftrightarrow a$.

In I. und II. haben wir bewiesen, daß die Äquivalenzen $\leftrightarrow$ und $\sim$ identisch sind. Ähnlicherweise erhalten wir, daß die Äquivalenzen $\Leftrightarrow$ und $\sim$ identisch sind. Dabei ist $\Leftrightarrow$ die Äquivalenz, die zur rechtsseitigen Totalzerlegung gehört. Folglich sind $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$ identisch, die zugehörigen Zerlegungen sind auch identisch und der Satz ist bewiesen.

Satz 1.5: Wenn die Äquivalenz, die zu der linksseitigen [rechtsseitigen] Totalzerlegung der Kategorie **C** in bezug auf das Gruppoid **G** gehört, eine Kongruenz ist, handelt es sich um eine vollständige Kongruenz [H-D.7.2].

Beweis: Bezeichnen wir die zur linksseitigen Totalzerlegung gehörige Äquivalenz mit $\leftrightarrow$ und sezten wir voraus, daß sie eine Kongruenz ist. Es sei $e,\ \varepsilon \in E = l(C)$, $e \leftrightarrow \varepsilon$. Nach H-S.2.2 und S.1.3.6 ist $e = r(e) = r(\varepsilon) = \varepsilon$. Nach H-S.7.5 und H-D.7.2 ist $\leftrightarrow$ eine vollständige Kongruenz.

Satz 1.6: Es sei **G** ein Untergruppoid des Gruppoids **C**. **G** ist normal in **C** gerade dann, wenn es invariant ist [H-D.7.4].

Beweis: I. **G** sei invariant, d. h. $y^{-1}\,Gy \subset G$ für jedes $y \in C$. Wählen wir $x \in C$, konstruieren wir die Klasse $xG \cap \mathrm{R}(x)$ und wählen wir $a \in xG \cap \mathrm{R}(x)$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $a = xg$ und nach S.1.3.6 ist

$$r(g) = r(a) = r(x) = l(g),\ l(a) = l(x). \tag{1}$$

Da **C** ein Gruppoid ist, existiert $x^{-1} \in C$ und nach (1) ist:

$$r(x^{-1}) = l(x) = l(a),\ l(x^{-1}) = r(x) = r(a).$$

Deshalb: $(a,\ x^{-1}) \in \mathrm{D}(\varphi)$, $x^{-1}x = r(x) = r(a)$ und es gilt:

$$a = ar(a) = a(x^{-1}x) = (ax^{-1})\,x = (xgx^{-1})\,x. \tag{2}$$

Ferner gilt $xgx^{-1} = (x^{-1})^{-1}\,gx^{-1}$. $x^{-1} \in C$ und **G** ist invariant. Deshalb ist für $y = x^{-1}$: $y^{-1}Gy = (x^{-1})^{-1}gx^{-1} = xgx^{-1} \in G$. Aus (2) und (1) folgt:

$a \in Gx \cap \mathrm{L}(x)$. Folglich $xG \cap \mathrm{R}(x) \subset Gx \cap \mathrm{L}(x)$. Ähnlich erhalten wir $Gx \cap \mathrm{L}(x) \subset xG \cap \mathrm{R}(x)$, d. h. $xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x)$ für jedes $x \in C$ und **G** ist normal.

II. Es sei **G** normal. Wählen wir $x \in C$ und $y \in x^{-1}\, Gx$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $y = x^{-1}\, gx$, wovon $r(g) = l(x) = r(x^{-1}) = l(g)$ und $xy = (xx^{-1})\, gx = gx$. Deshalb ist $xy \in Gx \cap \mathrm{L}(x) = xG \cap \mathrm{R}(x)$. Folglich existiert $\gamma \in G$ so, daß $xy = x\gamma$, wovon $y = \gamma \in G$. Daraus $x^{-1}\, Gx \subset G$ und **G** ist invariant.

Satz 1.7: Es sei **G** ein Untergruppoid der Kategorie **C** und $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{L}$) die rechtsseitige (linksseitige) Totalzerlegung der Kategorie **C** in bezug auf **G**. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{L}$) eine erzeugende Zerlegung wäre, ist: **G** ist ein normales Untergruppoid der Kategorie **C**.

Wenn **C** ein Gruppoid ist, ist diese Bedingung auch notwendig.

Beweis: I. **G** sei normal. Dann ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}$. Für jedes $x \in C$ bezeichnen wir $\bar{x} = xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x)$. Wählen wir beliebig $a, b \in C$.

a) Nach S.1.3.6 ist für jedes $\xi \in \bar{a}$: $l(\xi) = l(a)$, $r(\xi) = r(a)$. Deshalb ist $l(\bar{a}) = \{l(a)\} \subset \overline{l(a)} \in \mathfrak{R}$, $r(\bar{a}) = \{r(a)\} \subset \overline{r(a)} \in \mathfrak{R}$.

b) Wählen wir $\xi \in \bar{a}\bar{b}$. Dann existieren $g_1,\ g_2 \in G$ so, daß $\xi = (ag_1)\,(bg_2)$ und $r(g_1) = r(ag_1) = r(a) = l(g_1)$; $r(g_2) = r(bg_2) = r(b) = l(g_2)$; $r(g_1) = l(b)$. Folglich ist $g_1 b \in Gb \cap \mathrm{L}(b) = bG \cap \mathrm{R}(b)$. Deshalb muß $g_3 \in G$ so existieren, daß $g_1 b = bg_3$ ist, d. h. $\xi = a(bg_3)\, g_2 = (ab)(g_3 g_2)$. Da G ein Gruppoid ist, ist $g_3 g_2 \in G$ und $\xi \in abG$. Aus $r(g_2) = r(b)$ folgt: $\xi = abg_3 g_2 \in \mathrm{R}(ab)$. Deshalb $\xi \in \overline{ab}$. Nach S.1.3 ist $\mathfrak{R}$ eine erzeugende Zerlegung.

II. **C** sei ein Gruppoid und $\mathfrak{R}$ eine erzeugende Zerlegung.

Wählen wir $a, b \in C$ so, daß $(a, b) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Nach S.1.3 existiert $\xi \in C$ so, daß

$$[Ga \cap \mathrm{L}(a)][Gb \cap \mathrm{L}(b)] \subset G\xi \cap \mathrm{L}(\xi) \tag{1}$$

ist. Da $a \in Ga \cap \mathrm{L}(a)$, $b \in Gb \cap \mathrm{L}(b)$ ist, ist auch $ab \in G\xi \cap \mathrm{L}(\xi)$. Deshalb können wir in (1) $\xi = ab$ wählen.

Folglich

$$[Ga \cap \mathrm{L}(a)][Gb \cap \mathrm{L}(b)] \subset G(ab) \cap \mathrm{L}(ab) = Gab \cap \mathrm{L}(a) \tag{2}$$

für jede $a, b \in C$, $(a, b) \in \mathrm{D}(\varphi)$.

Wählen wir jetzt $a \in C$ beliebig und konstruieren wir die Menge $M = a^{-1}Ga$. Da $r(a^{-1}) = l(a)$ ist, können sich bei der Konstruktion der Menge M nur die Elemente aus G durchsetzen, die aus $\mathrm{L}(a)$ sind. Deshalb ist

$$a^{-1}Ga = a^{-1}\big((Ga \cap \mathrm{L}(a)\big) = [l(a^{-1})\, a^{-1}]\, \big((Ga \cap \mathrm{L}(a)\big). \tag{3}$$

Aber $l(a^{-1})\ a^{-1} \in Ga^{-1} \cap \mathrm{L}(a^{-1})$. Aus (3) folgt:

$$a^{-1}Ga \subset [Ga^{-1} \cap \mathrm{L}(a^{-1})][Ga \cap \mathrm{L}(a)]. \tag{4}$$

Wenn wir jetzt in (2) $b = a^{-1}$ setzen, erhalten wir wegen (4):

$$a^{-1}Ga \subset G(aa^{-1}) \cap \mathrm{L}(a) = G \cap \mathrm{L}(a) \subset G.$$

Das Gruppoid ist demnach invariant und nach S.1.6 auch normal. Unser Satz ist bewiesen.

§ 2: NORMALISATOR EINES GRUPPOIDS

Satz 2.1: Es sei $\mathbf{G}$ ein Untergruppoid einer Kategorie $\mathbf{C}$. Bezeichnen wir mit M die Menge aller solcher $x \in C$, für die

$$xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x).$$

Die Algebra $\mathbf{M}$ mit der Trägermenge M ist eine Unterkategorie der Kategorie $\mathbf{C}$ und $\mathbf{G}$ ist ein normales Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{M}$.

Beweis: 1. Nach S.1.4 ist $E \subset G \subset M$. Für jedes $x \in M$ ist deshalb $r(x) \in M$, $l(x) \in M$.

2. Es seien $x, y \in M$, $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Dann ist $r(x) = l(y)$ und $xG \cap \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x)$, $yG \cap \mathrm{R}(y) = Gy \cap \mathrm{L}(y)$. Wählen wir $z \in (xy)\, G \cap \cap \mathrm{R}(xy) = xyG \cap \mathrm{R}(y)$. Dann ist $l(z) = l(xy) = l(x)$, $r(z) = r(y)$ und es existiert $g_1 \in G$ so, daß $(xy, g_1) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und

$$z = (xy)\, g_1,\ l(g_1) = r(y) = r(z) = r(g_1). \tag{1}$$

Deshalb ist $(y, g_1) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $r(yg_1) = r(g_1) = r(y)$.

Folglich $yg_1 \in yG \cap \mathrm{R}(y) = Gy \cap \mathrm{L}(y)$. Es existiert also $g_2 \in G$ so, daß

$$yg_1 = g_2 y. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$z = (xg_2)\, y, \tag{3}$$

wobei $xg_2 \in xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x)$. Deshalb existiert $g \in G$ so, daß

$$xg_2 = gx,$$

und aus (3) erhalten wir

$$z = g(xy).$$

Folglich $z \in Gxy \cap \mathrm{L}(xy)$, d.h. $xyG \cap \mathrm{R}(xy) \subset Gxy \cap \mathrm{L}(xy)$. Ähnlicherweise erhalten wir auch $Gxy \cap \mathrm{L}(xy) \subset xyG \cap \mathrm{R}(xy)$, wovon $Gxy \cap \cap \mathrm{L}(xy) = xyG \cap \mathrm{R}(xy)$ und deshalb $xy \in M$. Nach H-S.2.27 ist $\mathbf{M}$ eine Kategorie.

Nach 1. ist es eine Unterkategorie der Kategorie $\mathbf{C}$ und $\mathbf{G}$ ist ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{M}$. Aus der Definition der Menge M und aus den Gleichheiten

$$\mathrm{R}_M(x) = \mathrm{R}(x) \cap M,\ \mathrm{L}_M(x) = \mathrm{L}(x) \cap M$$

[wobei $\mathrm{R}_M(x)$ resp. $\mathrm{L}_M(x)$ die Menge aller solcher $y \in M$ ist, für die $r(y) = r(x)$ resp. $l(y) = l(x)$ gilt] folgt, daß $\mathbf{G}$ ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{M}$ ist.

Definition 2.1: Die Kategorie $\mathbf{M}$ aus S.2.1 heißt der Normalisator des Gruppoids $\mathbf{G}$ in der Kategorie $\mathbf{C}$.

Satz 2.2: $\mathbf{G}$ sei ein Untergruppoid des Gruppoids $\mathbf{G}_1$. Der Normalisator $\mathbf{M}$ des Gruppoids $\mathbf{G}$ im $\mathbf{G}_1$ fällt mit der Menge $\mathbf{N}$ aller solcher $x \in G_1$, für die $x^{-1} Gx \subset G \wedge xGx^{-1} \subset G$ ist, zusammen.

Beweis: I. Es sei $x \in M$. Nach S.2.1 ist

$$xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x). \tag{1}$$

Wählen wir $y \in x^{-1}Gx$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $l(g) = r(x^{-1}) = l(x) = r(g)$, $l(y) = l(x^{-1}) = r(x) = r(y)$ und $y = x^{-1}gx$ ist. Davon:

$$xy = gx, \quad l(gx) = l(x). \tag{2}$$

Folglich $gx \in Gx \cap \mathrm{L}(x)$.

Nach (1) und (2) ist $xy \in xG \cap \mathrm{R}(x)$. Deshalb existiert $g_1 \in G$ so, daß $xy = xg_1$ ist. Folglich $y = g_1$ und deshalb $y = x^{-1}gx \in G$. Also $x^{-1}Gx \subset G$. Ähnlicherweise erhalten wir auch: $xGx^{-1} \subset G$. Darum ist $M \subset N$.

II. Wählen wir $x \in N$. Dann ist

$$xGx^{-1} \subset G \wedge x^{-1}Gx \subset G. \tag{3}$$

Es sei $y \in xG \cap \mathrm{R}(x)$. Es existiert $g \in G$ so, daß

$$l(g) = r(x) = r(g) \tag{4}$$

und

$$y = xg. \tag{5}$$

Da $\mathbf{G}_1$ ein Gruppoid ist, existiert $x^{-1} \in G_1$ und nach (4) und (5) ist $(xg, x^{-1}) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $xgx^{-1} \in G$. Es existiert also $g_1 \in G$ so, daß $xgx^{-1} = g_1$, wovon wegen (5):

$$y = xg = g_1x.$$

Also $y \in Gx$. Aus (5) folgt, daß $l(y) = l(x)$ und deshalb $y \in \mathrm{L}(x)$. Folglich $y \in Gx \cap \mathrm{L}(x)$, d.h.

$$xG \cap \mathrm{R}(x) \subset Gx \cap \mathrm{L}(x).$$

Ähnlicherweise erhalten wir auch

$$Gx \cap \mathrm{L}(x) \subset xG \cap \mathrm{R}(x).$$

Deshalb:

$$xG \cap \mathrm{R}(x) = Gx \cap \mathrm{L}(x).$$

Daraus folgt, daß $x \in M$ ist und dafür $N \subset M$.

Satz 2.3: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C**, $x \in C$, $g \in G$ so, daß $r(x) = l(g)$ resp. $l(x) = r(g)$.
Dann ist

$$xgG = xG \text{ resp. } Ggx = Gx. \tag{1}$$

Beweis: I. Aus $g \in G$ folgt: $gG \subset G$ und $xgG \subset xG$.

II. Wählen wir $y \in xG$. Dann existiert $c \in G$ so, daß $y = xc$, $r(x) = l(c)$. Folglich

$$y = xl(c)\,c = xl(g)\,c = xgg^{-1}c.$$

Da **G** ein Gruppoid ist, ist $g^{-1}c \in G$ und deshalb $y \in xgG$, wovon: $xG \subset xgG$.

Aus I. und II. folgt $xG = xgG$.

Den zweiten Teil unseres Satzes beweisen wir ähnlicherweise.

Satz 2.4: Es sei **G** ein Untergruppoid des Gruppoids $\mathbf{G}_1$. Bezeichnen wir $G_x = x^{-1}Gx$, $G_y = y^{-1}Gy$. Für jedes $b \in y^{-1}Gx$ gilt:

$$bG_x = G_yb = y^{-1}Gx. \tag{1}$$

Beweis: Wählen wir $b \in y^{-1}Gx$. Dann existiert $g \in G$ so, daß

$$b = y^{-1}gx, \quad l(g) = r(y^{-1}), \quad r(g) = l(x). \tag{2}$$

Konstruieren wir die Mengen bG_x und G_yb. Es gilt

$$bG_x = b(x^{-1}Gx) = (y^{-1}gx)(x^{-1}Gx) = y^{-1}gGx = y^{-1}Gx.$$

(Die letzte Gleichheit folgt aus (2) und S.2.3). Ferner ist

$$G_yb = (y^{-1}Gy)(y^{-1}gx) = y^{-1}Ggx = y^{-1}Gx.$$

Unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.5: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllt. Ferner sei der Normalisator des Gruppoids **G** in $\mathbf{G}_1$ mit **G** identisch. Dann ist

$$\{y^{-1}Gx\} = \mathbf{G}_1 |_l \mathbf{G}_x \cap \mathbf{G}_1 |_r \mathbf{G}_y. \tag{1}$$

Beweis: I. Setzen wir zuerst voraus, daß mindestens ein Element $A \in \mathbf{G}_1|_l\, \mathbf{G}_x \cap \mathbf{G}_1|_r\, \mathbf{G}_y$ existiert. Dann muß ein solches $b \in G_1$ existieren, daß

$$A = b(x^{-1}Gx) = (y^{-1}Gy)\,b \tag{2}$$

ist. Folglich

$$b(x^{-1}Gx)\,b^{-1} = y^{-1}Gy,$$

$$(ybx^{-1})\,G(xb^{-1}y^{-1}) = l(y)\,Gl(y) \subset G$$

$$(ybx^{-1})\,G(ybx^{-1})^{-1} \subset G. \tag{3}$$

Ähnlicherweise:

(4) $$(ybx^{-1})^{-1}\,G(ybx^{-1}) = l(x)\,Gl(x) \subset G.$$

Aus (3), (4) und S.2.2 folgt, daß $ybx^{-1} \in G$ ist, d.h. es existiert $g \in G$ so, daß $g = ybx^{-1}$, wovon $y^{-1}\,gx = b$.
Aus (2) folgt:

$$A = (y^{-1}gxx^{-1})\,Gx = y^{-1}gGx.$$

Nach S.2.3 ist also

$$A = y^{-1}Gx.$$

Jedes Element aus $\mathbf{G}_1 \,|_l\, \mathbf{G}_x \cap \mathbf{G}_1 \,|_r\, \mathbf{G}_y$ fällt also mit $y^{-1}Gx$ zusammen und deshalb gilt (1).

II. Setzen wir jetzt voraus, daß $\mathbf{G}_1 \,|_l\, \mathbf{G}_x \cap \mathbf{G}_1 \,|_r\, \mathbf{G}_y = \emptyset$ ist. Wäre $y^{-1}Gx \neq \emptyset$, so würde $b \in y^{-1}Gx$ existieren und nach S.2.4 wäre $bG_x = y^{-1}Gx = G_yb$. Deshalb wäre $y^{-1}Gx \in \mathbf{G}_1 \,|_l\, \mathbf{G}_x \cap \mathbf{G}_1 \,|_r\, \mathbf{G}_y \neq \emptyset$, was ein Widerspruch ist. Folglich $y^{-1}Gx = \emptyset$.

Unser Satz ist bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS:

[1] Stach K., *Über einige Zerlegungen in einer gegebenen Kategorie.*

[2] Hasse M. u. Michler L., *Theorie der Kategorien* — VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften — Berlin 1966.

[3] Borůvka O., *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie.* VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften — Berlin 1960.

[4] Borůvka O., *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mathem. Nachrichten.*

Mathematisches Institut
Technische Hochschule, Ostrava
Tschechoslovakei