Pavel Galajda

Канонические представления и номограммы элементарных номографируемых функций Гауссова комплексного аргумента

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 4, 167--188

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104751`

SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH, 4,
VII: 167—188, 1971

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И НОМОГРАММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ НОМОГРАФИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ГАУССОВА КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Павел Галайда (Кошице)

(Поступило в редакцию 22-XII-1969)

Статья является продолжением работы [1], которая была посвящена номографированию неэлементарных функций гауссова и клиффордова комплексных аргументов. Элементарные функции туда включаются лишь постольку, поскольку эти функции и их канонические представления автоматически получаются из найденных в главах I—III, если заменить в результатах глав I—III модуль эллиптических функций к значениям 0 или 1.

Эта статья посвящена каноническим представлениям*) и номограммам элементарных номографируемых функций гауссова комплексного аргумента.

Вторую часть предполагается посвятить каноническим представлениям и номограммам элементарных (преимущественно) номографируемых функций клиффордова комплексного аргумента.

§ 1. В работе [4] (см. (18.1), стр. 218, п. 18) указано преобразование, совмещающее шкалы P и Q номограммы (12.2) стр. 215 для уравнения (5.2) стр. 206 цитируемой работы [4] с одноименными шкалами номограммы (13.3) и (13.4) стр. 215, 216 для уравнения (5.3) стр. 206 цитируемой работы. Вообще, и практически и теоретически интересен вопрос возможности совмещения одноименных шкал z либо ω в частности номограмм тех или иных пар или групп зависимостей (2.1), (3.1), (4.1), (5.1), (6.1), (7.3), (13.1), (17.1), (18.1) и других зависимостей второй главы работы [1], причем для полноты исследования надо в каждом из этих соотношений менять местами z и ω.

Например, существует проективное преобразование (см. (18.1), стр. 218, п. 18 работы [4]), совмещающее номограмму (4.2) уравнения (4.1) второй главы работы [1] при $k = 0$ с номограммой (16.4) (или (16.5)) уравнения (16.1) второй главы работы [1]. Возможно ли совмещение относительно z или ω номограммы (4.2) 2-ой главы работы [1] с номограммой (17.2) уравнения (17.1) работы [1] (при $k = 1$) или с номограммой (18.10) уравнения (18.1) при $k = 0$ или $k = 1$ или, наконец, с номограммой уравнения (13.1) второй главы. (В дальнейшем, если не делается ссылка на какую-либо работу из указателя литературы, помещенного на стр. 151, 152 в конце II главы работы [1] то имеется в виду одна из трех глав работы [1]) при $k = 1$.

В несколько более общем виде, таким образом ставится задача исследования возможности совмещения при помощи восьмичленной группы проективных преобразований шкал z либо ω пар зависимостей (4.1), (5.1), (6.1),

*) Отметим, что в найденных ниже канонических представлениях для упрощения численных расчетов можно квадраты тригонометрических и гиперболических функций по известным формулам выразить линейно через аналогичные функции двойного аргумента. Мы эти простые преобразования опускаем.

(7.3), (16.1), (17.1), (18.1) гл. II работы [1] при переменных или фиксированных значениях параметров, в частности модуля эллиптических функций k.

Будем исследовать проективную совместимость одноименных шкал ω номограмм (4.2) и (16.4) зависимостей (4.1) и (16.1) главы II работы [1] в частном случае $k = 0$.

Хотя мы могли бы исходить из (4.2) и (16.4) работы [1], полагая в них $k = 0$ и пользуясь равенствами (1.3), — мы, однако, воспользуемся п. 12 стр. 215 работы [4].

Принимая во внимание эти обозначения, мы запишем функцию

$$A + Bi = \ln \sin (P + Qi) \tag{1.1}$$

где:

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathrm{Re}\,[\gamma(z - z_0)] = \mathrm{Re}\,[\gamma z] - \mathrm{Re}\,[\gamma z_0] \\ B &= \sin\,[\gamma(z - z_0] \\ P &= \mathrm{Re}\,[N(\omega - \omega_0)] \\ Q &= \sin\,[N(\omega - \omega_0)] \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Пусть U-матрица-вектор, определяющая номограмму из выровненных точек в связке прямых. Найдем U.
Из (1.1) получим

$$e^{z} = \sin (P + Qi); \qquad e^{2z} = \frac{1 - \cos (2P + 2Qi)}{2} \tag{1.3}$$

Из первого из этих двух уравнений найдем

$$e^{A} . \cos B = \sin P \operatorname{ch} Q, \qquad e^{A} \sin B = \cos P \operatorname{sh} Q \tag{1.4}$$

Откуда возвысив в квадрат почленно и сложив, получим после элементарных преобразований

$$e^{2A} = \frac{\operatorname{ch} 2Q - \cos 2P}{2}; \tag{1.5}$$

Откуда

$$e^{-2A} = \frac{2}{\operatorname{ch} 2Q - \cos 2P}; \tag{1.6}$$

Из второго уравнения (1.3) найдем

$$\begin{cases} e^{2A} \cos 2B = \dfrac{1 - \cos 2P \operatorname{ch} 2Q}{2}; \\ e^{2A} \sin 2B = \dfrac{\sin 2P \operatorname{sh} 2Q}{2}; \end{cases} \tag{1.7}$$

С помощью (1.5) отсюда найдем:

$$\begin{cases} \cos 2B = \dfrac{1 - \cos 2P \operatorname{ch} 2Q}{\operatorname{ch} 2Q - \cos 2P} \\ \sin 2B = \dfrac{\sin 2P \operatorname{sh} 2Q}{\operatorname{ch} 2Q - \cos 2P} \end{cases} \tag{1.8}$$

Легко убедиться, что e^{-2A} и $\cos 2B$ как функции P и Q связаны двумя линейными соотношениями, в первом из которых коэффициенты зависят только от P, а во втором — только от Q.

Пользуясь „вронскианом," легко найти эти коэффициенты, равные соответственно

$$(1.9)\qquad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\right),\ (1),\ (\cos 2P),$$

$$(1.10)\qquad \left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2}\right),\ (1),\ (-\operatorname{ch} 2Q),$$

Действительно,

$$(1.11)\qquad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\right)\left(\frac{2}{\operatorname{ch} 2Q-\cos 2P}\right)+\left(\frac{1-\cos 2P\operatorname{ch} 2Q}{\operatorname{ch} 2Q-\cos 2P}\right)+(\cos 2P)\equiv 0,$$

$$(1.12)\qquad \left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2}\right)\left(\frac{2}{\operatorname{ch} 2Q-\cos 2P}\right)+\left(\frac{1-\cos 2P\operatorname{ch} 2Q}{\operatorname{ch} 2Q-\cos 2P}\right)+(-\operatorname{ch} 2Q)\equiv 0,$$

Эти тождества при помощи (1.5) и (1.8) перепишутся в виде искомых канонических представлений

$$(1.13)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(-\frac{\sin^2 2P}{2}\right)(e^{-2A})+(\cos 2B)+(\cos 2P)=0\\&\left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2}\right)(e^{-2A})+(\cos 2B)+(-\operatorname{ch} 2Q)=0\end{aligned}\right.$$

Заменяя здесь A согласно первому равенству (1.2) и относя множитель $e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}$ к сомножителям при e^{-2A}, стоящим в равенствах (1.13), получим канонические представления и уравнения шкал номограммы в виде (см. § 12, стр. 215 работы [4]).

$$(1.14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(-\frac{\sin^2 2P}{2}e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}\right)\left(e^{-2\operatorname{Re}[\gamma z]}\right)+(\cos 2B)+(\cos 2P)=0\\&\left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2}e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}\right)\left(e^{-2\operatorname{Re}[\gamma z]}\right)+(\cos 2B)+(-\operatorname{ch} 2Q)=0\end{aligned}\right.$$

$$(1.15)\qquad \left\{\begin{aligned}&X_A=e^{2\operatorname{Re}[\gamma z]};\quad y_A=0;\quad X_B=0;\quad y_B=-\frac{1}{\cos 2B};\\&X_P=\frac{\sin^2 2P}{2\cos 2P}e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]};\quad y_P=-\frac{1}{\cos 2P};\\&X_Q=\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2\operatorname{ch} 2Q}e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]};\quad y_Q=\frac{1}{\operatorname{ch} 2Q};\\&y^2_{(P;Q)}+2e^{-\operatorname{Re}[\gamma z]}X_{(P;Q)}\,y_{(P;Q)}-1=0\end{aligned}\right.$$

Заметим, что если бы множитель $e^{2\operatorname{Re}[\gamma\omega_0]}$ отнести к множителю $e^{-2\operatorname{Re}[\gamma\omega]}$, то получили бы представления в форме (1.13) и поэтому в предыдущих формулах формально надо было бы заменить $\operatorname{Re}[\gamma z_0]$ нулем. Отсюда получаем матрицу — номограмму

$$
(1.16)\qquad \left\| \begin{matrix} e^{+2A} & 0 & \dfrac{\sin^2 2P}{2\cos 2P} & \dfrac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2\,\mathrm{ch}\, 2Q} \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2B} & -\dfrac{1}{\cos 2P} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2Q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|
$$

где первая строка — строка иксов, а вторая — строка игреков и A, B, P и Q должны быть заменены согласно (1.2).

Заменяя теперь A его выражением из (1.2) и умножая первую строку матрицы (1.14) на $e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]}$, мы получим матрицу U.

$$
(1.17)\qquad U = \left\| \begin{matrix} e^{2\mathrm{Re}[\gamma z]} & 0 & \dfrac{\sin^2 2P}{2\cos 2P}\, e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} & \dfrac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2\,\mathrm{ch}\, 2Q}\, e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2B} & -\dfrac{1}{\cos 2P} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2Q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|
$$

Пусть А — матрица 3 порядка проективного преобразования (18.1) стр. 218 работы [4] и U'-матрица, определенная в той же центральной связке прямых центро-аффинного пространства, номограмму, проективную номограмме $\| U \|$.

Так как номограммы четырехшкальные, то матрицы U и U' будут состоять из четырех столбцов, соответствующих трем однородным координатам каждой из четырех шкал номограммы, причем матрица U определяется уравнениями (12.2) стр. 215 работы [4].

Тогда результат преобразования запишется, выполняя перемножение матриц A и U по правилу строка на столбец, т. к. $A\tilde{U} = \tilde{U}'$ или в развернутой форме

$$
\left\| \begin{matrix} 0 & -\gamma^2 e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} & \gamma^2 e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} \\ 0 & \gamma^2 e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} & \gamma^2 e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot
$$

$$
\left\| \begin{matrix} e^{2\mathrm{Re}[\gamma z]} & 0 & \dfrac{\sin^2 2P}{2\cos 2P}\, e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} & \dfrac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2\,\mathrm{ch}\, 2Q}\, e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2B} & -\dfrac{1}{\cos 2P} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2Q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \equiv
$$

$$
(1.18)\qquad \equiv e^{2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} \left\| \begin{matrix} \gamma^2 & -\dfrac{\gamma^2}{\cos 2B} + \gamma^2 & \dfrac{\gamma^2}{\cos 2P} + \gamma^2 & -\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}\, 2Q} + \gamma^2 \\ \gamma^2 & \dfrac{\gamma^2}{\cos 2B} + \gamma^2 & -\dfrac{\gamma^2}{\cos 2P} + \gamma^2 & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}\, 2Q} + \gamma^2 \\ e^{2\mathrm{Re}[\gamma z] - 2\mathrm{Re}[\gamma z_0]} & 0 & \dfrac{\sin^2 2P}{2\cos 2P} & \dfrac{\mathrm{sh}^2 2Q}{2\,\mathrm{ch}\, 2Q} \end{matrix} \right\|
$$

Заметим, что в то время как введение и вынесение множителя за знак матрицы A подчиняется обычным правилам, — матрицы U и U', очевидно, в силу их геометрического смысла, определяют те же самые номограммы, если будем сверх того умножать или делить все элементы любого столбца (не обязательно всех столбцов) на любое отличное от тождественного нуля выражение, т. к. это соответствует умножению трех однородных координат точки на некоторое отличное от нуля число или даже функцию, не равную тождественно нулю.

Менее очевидно то, что и любую строку можно умножить или разделить на отличную от тождественного нуля величину, в результате чего номограмма лишь проективно исказится (см. по этому поводу § 6 первой главы). Поэтому можем записать после упрощений и указанных сокращений (например, вместо того, чтобы записать первый столбец матрицы U' в виде

$$\begin{matrix} \gamma^2\, e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} \\ \gamma^2\, e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} \\ 1 \end{matrix}$$

Мы можем, умножив все его элементы на $e^{2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]}$, записать этот столбец проще в виде

$$\begin{matrix} \gamma^2 \\ \gamma^2 \\ e^{2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} \end{matrix}$$

Таким образом получаем

$$U' = \left\| \begin{matrix} \gamma^2 & -1 + \cos 2B & \dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q} \\ \gamma^2 & 1 + \cos 2B & \dfrac{-\gamma^2}{\cos^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q} \\ e^{2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{1.19}$$

Так аналитически выглядит номограмма зависимости (1.1) (или, что то же самое (1.2) после преобразования (18.1) стр. 218 работы [4]

§ 2. Теперь возьмем соотношение

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \sin (P + Qi) \tag{2.1}$$

где P и Q имеют смысл, указанный формулами (1.2).

Тогда (см. (13.1) и (13.2) стр. 215 работы [4]), каноническое представление для (2.1), как для вещественного так и для чисто-мнимого γ, примет вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma(z-z_0)}{\gamma}\right]^2 + \left(-\dfrac{\gamma^2}{\cos^2 P}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Im}\,\gamma(z-z_0)}{\gamma}\right]^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma(z-z_0)}{\gamma}\right]^2 + \left(\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q}\right)\left[\dfrac{\mathrm{Im}\,\gamma(z-z_0)}{\gamma}\right]^2 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Уравнения шкал номограммы зависимости (2.1) будут, очевидно,

$$(2.3)\quad \begin{cases} X_a = \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2; \quad Y_a = 0; \quad X_b = 0; \quad Y_b = \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 \\ X_P = \dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P}; \quad Y_P = -\dfrac{\gamma^2}{\cos^2 P}; \quad X_Q = \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q}; \quad Y_Q = \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q} \end{cases}$$

$$\frac{1}{X^1_{(P;Q)}} - \frac{1}{Y^1_{(P;Q)}} = \frac{1}{\gamma^2}$$

или в матричной форме, обозначая через V матрицу номограммы (2.3),

$$(2.4)\qquad V \equiv \begin{Vmatrix} \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 & 0 & \dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q} \\ 0 & \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 & -\dfrac{\gamma^2}{\cos^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Наряду с (2.2), можно было бы еще записать каноническое представление для (2.1) так

$$(2.5)\quad \begin{cases} \left(-\dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P}\right)\left\{\dfrac{2\,\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}{\gamma}\right\}^2 + \left(\dfrac{\gamma^2}{\cos^2 P}\right)\left\{\dfrac{2\,\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}{\gamma}\right\}^2 = 1 \\ \left(-\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q}\right)\left\{\dfrac{2\,\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}{\gamma}\right\}^2 + \left(-\dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q}\right)\left\{\dfrac{2\,\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}{\gamma}\right\}^2 = 1 \end{cases}$$

При этом вместо матрицы (2.4) мы получили бы другую, отличающуюся от (2.4) умножением первых двух строк (2.4) на (—1). А мы уже знаем, что эта операция сохраняет номограмму (с точностью до коллинеации). Сравнивая теперь матрицу U' с матрицей V (см. (1.19) и (2.4)), мы видим, что их столбцы P и Q соответственно одинаковые, что и завершает доказательство возможности для уравнений (1.1) и (2.1) одной шестишкальной конической номограммы второго жанра с одним выравниванием (см. п. 18, стр. 218 работы [4]), представляемой, очевидно, матрицей.

$$(2.6)\quad \begin{Vmatrix} \gamma^2 & -1+\cos 2B & \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 & .0 & \dfrac{\gamma^2}{\sin^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\, Q} \\ \gamma^2 & 1+\cos 2B & 0 & \left\{\dfrac{\gamma}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 & -\dfrac{\gamma^2}{\cos^2 P} & \dfrac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2\, Q} \\ e^{2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

где вместо $e^{2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]}$ можно в силу (1.2) писать и e^{2A}.

Итак, мы получили шестишкальную номограмму (2.6) для системы

$$(2.7)\qquad e^{A+Bi} = \gamma(z-z_0) = \sin(P+Qi)$$

Хотя A и B также выражаются через z и z_0, так что может показаться, что (2.6) есть номограмма

$$e^{\gamma(z-z_0)} = \gamma(z - z_0) = \sin(P + Qi) \tag{2.8}$$

но это неверно, т. к. z в левой части и в средней части для данного ω, т. е. P и Q имеют разные значения.

Если желательно коническое сечение превратить в окружность, то последние строки матриц (1.19) и (2.4) умножаем на γ^2 и отнимаем их от первых строк и прибавляем ко вторым, затем деля обе матрицы на γ^2.

После этого умножаем третьи столбцы на $\mathrm{tg}^2 P$ и четвертые — на $(-\mathrm{cth}^2 Q)$ и еще, наконец, второй столбец получившейся матрицы U' умножаем на γ^2.

В результате получаем с точностью до коллинеации, что

$$U = \begin{Vmatrix} e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} - 1 & -1 + \cos 2B & 1 & 1 \\ e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(z-z_0)]} + 1 & 1 + \cos 2B & -\mathrm{tg}^4 P & -\mathrm{cth}^4 Q \\ 1 & 0 & \mathrm{tg}^2 P & -\mathrm{cth}^2 Q \end{Vmatrix} \tag{1.19'}$$

$$V = \begin{Vmatrix} \left\{\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z - z_0)]}\right\}^2 - 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \left\{\dfrac{1}{\mathrm{Im}\,[\gamma(z - z_0)]}\right\}^2 + 1 & -\mathrm{tg}^4 P & -\mathrm{cth}^4 Q \\ 1 & 1 & \mathrm{tg}^2 P & -\mathrm{cth}^2 Q \end{Vmatrix} \tag{2.4'}$$

Принимая во внимание обозначения (1.2), можем переписать номограммы (1.19′) и (2.4′) в виде матриц

$$U' = \begin{Vmatrix} e^{-2A} - 1 & -1 + \cos 2B & 1 & 1 \\ e^{-2A} + 1 & 1 + \cos 2B & -\mathrm{tg}^4 P & -\mathrm{cth}^4 Q \\ 1 & 0 & \mathrm{tg}^2 P & -\mathrm{cth}^2 Q \end{Vmatrix} \tag{1.19''}$$

$$V = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{A^2} - 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{B^2} + 1 & -\mathrm{tg}^4 P & -\mathrm{cth}^4 Q \\ 1 & 1 & \mathrm{tg}^2 P & -\mathrm{cth}^2 Q \end{Vmatrix} \tag{2.4''}$$

При этом мы пользовались правилами преобразования номограммы (матриц), изложенными в § 6 первой главы.

Полагая

$$f_3 = \mathrm{tg}^2 P, \qquad f_4 = -\mathrm{cth}^2 Q$$

можем переписать (1.19′) и (2.4′), обозначая остальные элементы этих матриц для сокращения письма через φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 (для 1.19′)) и через ξ_1, h_1 (для (2.4′)), получим

$$(1.19''') \qquad U' = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 1 & 1 \\ \psi_1 & \psi_2 & -f_3^2 & -f_4^2 \\ 1 & 0 & f_3 & f_4 \end{matrix} \right\|$$

$$(2.4''') \qquad V = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & h_1 & -f_3^2 & -f_4^2 \\ 1 & 1 & f_3 & f_4 \end{matrix} \right\|$$

где

$$(2.9) \begin{cases} \varphi_1 = e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(Z-Z_0)]} - 1 \equiv e^{-2A} - 1, & \psi_1 = e^{-2\mathrm{Re}[\gamma(Z-Z_0)]} + 1 \equiv e^{-2A} + 1 \\ \varphi_2 = -1 + \cos 2B, & \psi_2 = 1 + \cos 2B \\ \xi_1 = \left\{\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 - 1 \equiv \dfrac{1}{A^2} - 1, & h_1 = \left\{\dfrac{1}{\mathrm{Im}\,[\gamma(z-z_0)]}\right\}^2 + 1 \equiv \dfrac{1}{B^2} + 1 \end{cases}$$

Умножая теперь слева матрицы (1.19‴) и (2.4‴) на невырождающуюся при $\lambda \neq 0$ матрицу

$$(2.10) \qquad \left\| \begin{matrix} M^2 + 1 & -\lambda^2 & 2\lambda M \\ MD_2^2 & 0 & \lambda D_2 \\ D_1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

получим не выписывая первые два столбца, что

$$(1.19'''') \qquad U' = \left\| \begin{matrix} \ldots & 1 + (\lambda f_3 + M)^2 & 1 + (\lambda f_4 + M)^2 \\ \ldots & D_2(\lambda f_3 + M) & D_2(\lambda f_4 + M) \\ \ldots & D_1 & D_1 \end{matrix} \right\|$$

$$(2.4'''') \qquad V = \left\| \begin{matrix} \ldots & 1 + (\lambda f_3 + M)^2 & 1 + (\lambda f_4 + M)^2 \\ \ldots & D_2(\lambda f_3 + M) & D_2(\lambda f_4 + M) \\ \ldots & D_1 & D_1 \end{matrix} \right\|$$

Отсюда, принимая за однородные координаты X_1, $У_1$, Z_1 соответственно элементы, третьей, второй и первой строк, принадлежащие к одному и тому же столбцу (первому, второму, третьему, четвертому) и переходя для каждого из четырех столбцов от однородных координат X_1, $У_1$, Z_1 к декартовым координатам x и y по формулам

$$(2.11) \qquad x = \frac{X_2}{Z_1}, \qquad y = \frac{У_2}{Z_1}$$

получим в силу матриц (1.19⁗) и (2.4⁗) соответственно (выписываем лишь уравнения шкал P и Q

$$(2.12) \qquad \ldots \quad x_3 = \frac{D_1}{1 + (\lambda f_3 + M)^2}, \qquad y_3 = \frac{D_2(\lambda f_3 + M)}{1 + (\lambda f_3 + M)^2}$$

$$(2.13) \qquad \ldots . x_4 = \frac{D_1}{1 + (\lambda f + M)^2}, \qquad y_4 = \frac{D_2(\lambda f_4 + M)}{1 + (\lambda f + M)^2}$$

Исключая f_3 из обоих равенств (2.12) и f_4 из обоих равенств (2.13), в обоих случаях, как и должно быть, получим одно и то же уравнение эллипса, несущего шкалы P и Q)

$$(2.14) \qquad \frac{\left(x - \frac{D_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{D_1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{D_2}{2}\right)^2} = 1$$

который, в частности, при

$$(2.15) \qquad D_1 = D_2 = 2R$$

превращается в окружность радиуса R.

$$(2.16) \qquad (x - R)^2 + y^2 = R^2$$

§ 3. Рассмотрим теперь вопрос о совместимости по ω номограмм зависимостей (4.1) и (16.1) при любом k.

Так как при $k = 0$, как мы конструктивно показали выше, эти номограммы совместимы по w, то априоры они могут быть совместимы и при любом k.

Полагая, в частности, $k = 1$, получим согласно (4.1) и (16.1) две зависимости нулевого жанра (3.1) и (3.2), которые мы запишем в нескольких соответственно равносильных между собой видах, подчеркнув аналогичные основные виды этих равенств (3.1) и (3.2)

$$(3.1) \qquad \underline{z = \ln \operatorname{th} w}, \qquad e^z = \operatorname{th} w, \qquad \operatorname{sh} 2w = -\frac{1}{\operatorname{sh} z},$$

$$\operatorname{th} z = -\frac{1}{\operatorname{ch} 2w}, \qquad \operatorname{th} 2w = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \qquad \underline{-2w = \ln \operatorname{th}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

$$z = 2 \operatorname{arctg} e^{\omega} - \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^{\omega}$$

$$(3.2) \qquad w = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\omega}, \qquad \underline{\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \operatorname{th}\frac{w}{2}}$$

$$\sin z = \operatorname{th} w, \qquad \cos z = \pm\frac{1}{\operatorname{ch} w}, \qquad \operatorname{tg} z = \pm \operatorname{sh} w$$

$$\underline{\operatorname{th}\frac{rz}{2} = \operatorname{tg}\frac{rw}{2}}$$

где, напоминаем, (3.1) соответствует (4.1) и (3.2) соответствует (16.1) второй главы при $k = 1$.

Наряду с этим, рассмотрим также равносильные зависимости

$$
(3.3)\qquad \begin{gathered}
w = \ln \operatorname{th} z, \qquad e^{w} = \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{sh} 2z = -\frac{1}{\operatorname{sh} w} \\
w + \frac{\pi r'}{2} = \ln \operatorname{tg}(r'z), \qquad \operatorname{th} 2z = \frac{1}{\operatorname{ch} w} \\
-2z = \ln \operatorname{th}\left(\pm \frac{w}{2}\right)
\end{gathered}
$$

являющиеся частным случаем (при $k = 1$) зависимости

$$
(3.4)\qquad w = \ln \operatorname{sn}(z; k)
$$

которая отличается от зависимости (4.1) второй главы перестановкой переменных z и w.

Выпишем теперь, пользуясь соответственно (4.2) и (16.4) (или (16.5)) следующие канонические представления для зависимостей (3.1) (т. е. (4.1) при $k = 1$ главы II) и (3.2) (т. е. для 16.1) при $k = 1$ главы II) в виде двух попарно равносильных между собой форм канонических представлений (3.1_1) и (3.1_2) соответственно (3.2_1 и 3.2_2), вытекающих из наличия подчеркнутых в каждой из группы равенств (3.1) и (3.2) пар аналогичных и равносильных между собой двух видов зависимостей (3.1) и аналогично — двух видов зависимостей (3.2).

Получим, как сказано, для (3.1) (т. е. для (4.1) главы II при $k = 1$)

$$
(3.1_1)\qquad \begin{cases}
(\operatorname{ch}^2 2p)(\cos 2y) + (-\operatorname{sh}^2 2p)(\operatorname{ch} 2x) + (+1) = 0 \\
(\cos^2 2q)(\cos 2y) + (\sin^2 2q)(\operatorname{ch} 2x) + (-1) = 0
\end{cases}
$$

$$
(3.1_2)\qquad \begin{cases}
(-\operatorname{sh}^2 x)(\operatorname{ch} 4p) + (\operatorname{ch}^2 x)(\cos 4q) + (+1) = 0 \\
(\sin^2 y)(\operatorname{ch} 4p) + (\cos^2 y)(\cos 4q) + (-1) = 0
\end{cases}
$$

Аналогично для (3.2) (т. е. для (16.1) главы II при $k = 1$) получим

$$
(3.2_1)\qquad \begin{cases}
(\cos 2x) + (\operatorname{ch} 2y)(\operatorname{th}^2 p) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 p}\right) = 0 \\
(\cos 2x) + (\operatorname{ch} 2y)(-\operatorname{ctg}^2 q) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 q}\right) = 0
\end{cases}
$$

$$
(3.2_2)\qquad \begin{cases}
(-\operatorname{ctg}^2 x)(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \\
(\operatorname{th}^2 y)(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y}\right) = 0
\end{cases}
$$

Аналогично, канонические представления для (3.3) получим в одной из двух следующих равносильных между собой форм (3.3_1) и (3.3_2):

$$(3.3_1)\quad \begin{cases} (-\operatorname{th}^2 p)(\operatorname{ch} 4x) + (\cos 4y) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 p}\right) = 0 \\ (\operatorname{tg}^2 q)(\operatorname{ch} 4x) + (\cos 4y) + \left(-\dfrac{1}{\cos^2 q}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(3.3_2)\quad \begin{cases} (-\operatorname{th}^2 2x)(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2x}\right) = 0 \\ (\operatorname{th}^2 2y)(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(-\dfrac{1}{\cos^2 2y}\right) = 0 \end{cases}$$

Проективные между собой в силу теоремы единственности с точностью до коллиниации номограммы для (3.1) в силу (3.1_1) и (3.1_2) запишется так:

$$(3.1_1')\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x} & 0 & \operatorname{sh}^2 2p & \sin^2 2q \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2y} & -\operatorname{ch}^2 2p & \cos^2 2q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$(2.1_2')\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4p} & 0 & \operatorname{sh}^2 x & \sin^2 y \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 4q} & -\operatorname{ch}^2 x & \cos^2 y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Аналогично, из (3.2_1) и (3.3_2) получим две проективные между собой номограммы для (3.2)

$$(3.2_1')\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\cos 2x} & 0 & \operatorname{ch}^2 p & -\sin^2 q \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2y} & \operatorname{sh}^2 p & \cos^2 q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$(3.2_2')\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2p} & 0 & \cos^2 x & \operatorname{sh}^2 y \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2q} & -\sin^2 x & \operatorname{ch}^2 y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Проективная несовместимость номограмм зависимостей (4.1) и (16.1) при $k = 1$, а, следовательно, и при любом k теперь доказывается очень просто.

Действительно, нельзя, очевидно, умножением матрицы, скажем, $(3.1_1')$ слева на постоянную матрицу превратить гиперболические функции x и тригонометрические функции y, фигурирующие в матрице $(3.2_1')$ тригонометрические функции x и гиперболические функции y, что видно из сравнения первых двух столбцов матриц ($3.1_1'$) и ($3.2_1'$).

Тем самым несовместимость номограмм зависимостей (3.1) и (3.2) (т. е. (4.1) и (16.1) главы II) относительно z доказана. Несовместимость относительно w вытекает из того, что если бы существовала постоянная матрица $\| a_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, 3$ (коллинеация), совмещающая шкалы p и q номограмм ($3.1_2'$) и ($3.2_2'$), то имели бы тождественно по p и q

$$\frac{a_{11}}{\operatorname{ch} 4p} + a_{13} \equiv \frac{1}{\operatorname{ch} 2p}, \quad \frac{a_{22}}{\cos 4q} + a_{23} \equiv \frac{1}{\cos 2q}$$

или, полагая $\operatorname{ch} 2p = u$ и, следовательно, $\operatorname{ch} 4p = 2 \operatorname{ch}^2 2p - 1 = 2u^2 - 1$, получили бы тождественно относительно u

$$\frac{a_{11}}{2u^2 - 1} + a_{13} \equiv \frac{1}{u} \text{ или } 2a_{13}u^3 + (a_{11} - a_{13})\, u \equiv 2u^2 - 1$$

невозможность очевидна. Так аналитическое представление номограмм матрицами позволяет легко и обозримо разрешать вопросы проективной совместимости номограмм, как это иллюстрируется на рассмотренном конкретном примере.

Выпишем теперь обе проективные между собой номограммы зависимости (3.3)

$$(3.3_1') \qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 4x} & 0 & \operatorname{sh}^2 p & \sin^2 q \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 4y} & -\operatorname{ch}^2 p & \cos^2 q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$(3.3_2') \qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2p} & 0 & \operatorname{sh}^2 2x & \sin^2 2y \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 2q} & -\operatorname{ch}^2 2x & \cos^2 2y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Мы видим, что эта номограмма (соотношений (3.3)) совместима по переменной ω с номограммой соотношения (3.2), т. к. первые два столбца в ($3.2_2'$) и в ($3.3_2'$) совпадают. Но пары шкал x и пары шкал y, как легко видеть, не совпадают, т. к. в номограмме ($3.2_2'$) эти шкалы лежат на паре прямых $x - y = +1$; $x - y = -1$, а в номограмме ($3.3_2'$) соответственно на паре шкал $x + y = -1$ и $x + y = +1$.

Поэтому, если в шестишкальной номограмме нулевого жанра, определяемой матрицами ($3.2_2'$) и ($3.3_2'$), состоящей из шкал p и q и пары шкал x и y из номограммы ($3.3_2'$) отбросить связующие шкалы p и q, то останется четырехшкальная номограмма нулевого жанра, состоящая из упомянутых двух пар x и y декартовы уравнения носителей которых суть $X - У = \pm 1$ и $X + У = \pm 1$. Соотношения (3.2) и (3.3), если мы во избежание недоразумений переобозначим переменную z в (3.3) через z_1 (и, значит, в ($3.3_2'$)

заменим x и y на x_1 и y_1), а в соотношениях (3.2) переобозначим z через z_0 (и значит заменим в ($3.2_2'$) x на x_0 и y на y_0, то получим совместно номографируемую относительно w зависимость $e^{\omega} = \operatorname{th} z_1$ и $e^{w} = \operatorname{tg}\left(\frac{z_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, в совокупности образующие шестишкальную номограмму нулевого жанра из трех пар шкал: w, z_0, z_1. Отсюда находим искомую зависимость нулевого жанра, номограмма которой располагается на четырех упомянутых выше прямых $X - У = \pm 1$, $X + У = \pm 1$, а именно $\operatorname{tg}\left(\frac{z_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{th} z_1$, что легко отождествляется с первой подчеркнутой зависимостью (3.2).

Нетрудно выяснить, что в согласии с нашей общей теорией, что это соотношение нулевого жанра, связывающие комплексные переменные z_0 и z_1, не является новым. Действительно, после элементарных преобразований это соотношение можно переписать в виде

$$e^{-2z_1} = \operatorname{tg}\left(= \frac{z_0}{2}\right)$$

или

$$-2z_1 = \ln\operatorname{tg}\left(-\frac{z_0}{2}\right)$$

что совпадает с последней зависимостью (3.3).

Вместо того, чтобы при решении вопроса номографической совместности уравнений (4.1) и (16.1) при $k = 1$, опираться на частное обстоятельство — идентичность двух пар первых столбцов матрицы ($3.3_2'$) и ($3.2_2'$) мы бы могли и так надо поступать в общем случае — исходить из того, что произведение некоторой постоянной матрицы $\| a_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, 3$ слева на матрицу-($3.3_2'$) должно давать матрицу ($3.2_1'$) (если только номограммы уравнений (4.1) (они даются любой из матриц ($3.3_1'$) или ($3.3_2'$)) и номограммы уравнений (16.1) (они даются любой из матриц ($3.2_1'$) или ($3.2_2'$) между собой проективны).

Так, если бы мы решали этот вопрос, имея в своем распоряжении не пару матриц ($3.3_2'$) и ($3.2_2'$), а, скажем, пару матриц ($3.3_2'$) и ($3.2_1'$), то получили бы, пытаясь совместить две одноименные шкалы р и аналогично *две* одноименные шкалы q уравнения, введя для однородных координат неопределенный множитель пропорциональности ϱ

$$(3.4) \qquad \begin{cases} a_{11}\operatorname{sh}^2 p - a_{12}\operatorname{ch}^2 p + a_{13} = \varrho_1 \operatorname{ch}^2 p \\ a_{11}\sin^2 q + a_{12}\cos^2 q + a_{13} = -\varrho_2 \sin^2 q \\ a_{21}\operatorname{sh}^2 p - a_{22}\operatorname{ch}^2 p + a_{23} = \varrho_1 \operatorname{sh}^2 p \\ a_{21}\sin^2 q + a_{22}\cos^2 q + a_{23} = \varrho_2 \cos^2 q \\ a_{31}\operatorname{sh}^2 p - a_{32}\operatorname{ch}^2 p + a_{33} = \varrho_1 \end{cases}$$

Из этой системы уравнений найдем ей равносильную систему уравнений

$$(3.5)\qquad \begin{cases} a_{11} - a_{12} = \varrho_1 & a_{13} = a_{11} \\ a_{11} - a_{12} = -\varrho_2 & a_{13} + a_{12} = 0 \\ a_{21} - a_{22} = \varrho_1 & a_{23} - a_{22} = 0 \\ a_{22} - a_{21} = \varrho_2 & a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} - a_{32} = 0 & a_{33} - a_{32} = \varrho_1 \\ a_{31} - a_{32} = 0 & a_{32} + a_{33} = \varrho_2 \end{cases}$$

решая последнюю систему уравнений, найдем

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \varrho_2 = -\varrho_1, \ a_{11} = a_{13} = -a_{12} = \dfrac{\varrho_1}{2}, \ a_{21} = -a_{22} = -a_{23} \\ a_{21} - a_{22} = \varrho_1, \ a_{21} = -a_{22} = -a_{23} = \dfrac{\varrho_1}{2} \\ a_{31} = a_{32} = -\varrho_1, \ a_{33} = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем следующую искому невырождающуюся при $\varrho_1 \neq 0$ матрицу

$$(3.7)\qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{\varrho_1}{2} & -\dfrac{\varrho_1}{2} & \dfrac{\varrho_1}{2} \\ \dfrac{\varrho_1}{2} & -\dfrac{\varrho_1}{2} & -\dfrac{\varrho_1}{2} \\ -\varrho_1 & -\varrho_1 & 0 \end{Vmatrix} = -\frac{\varrho_1}{2} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

С определителем, равным $-\varrho_3^1 \neq 0$ матрица (3.7) дает проективное преобразование, совмещающее шкалы ω номограммы (3.3_1^1) равносильных между собой зависимостей (3.3), соответствующих (сравнить (3.1) и (4.1) главы II) зависимости (см. выше (3.4))

$$(3.8)\qquad w = \ln \mathrm{sn}\,(z;\, \mathrm{k}), \qquad k = 1, \qquad w = \ln \mathrm{th}\, z$$

с одноименными шкалами w номограммы (3.2_1^1) равносильных между собой зависимостей (3.2), т. е. номограммы соотношения (16.1) главы II

$$(3.9)\qquad z = \int_0^{\omega} \mathrm{cn}\,(\xi;\, k)\, d\xi;\ k = 1;\ w = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Действительно, помножная матрицу (3.7) слева на матрицу (3.3_1^1) получим матрицу

$$(3.10)\qquad -\frac{\varrho_1}{2} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 4x} & 0 & \mathrm{sh}^2 p & \sin^2 q \\ 0 & \dfrac{1}{\cos 4y} & -\mathrm{ch}^2 p & \cos^2 q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

получим в произведении

$$-\frac{\varrho_1}{2}\left\|\begin{matrix} -\frac{1}{\mathrm{ch}\,4x}-1, & \frac{1}{\cos 4y}-1, & -\mathrm{sh}^2 p-\mathrm{ch}^2 p-1, & -\sin^2 q+\cos^2 q-1 \\ -\frac{1}{\mathrm{ch}\,4x}+1, & \frac{1}{\cos 4y}+1, & -\mathrm{sh}^2 p-\mathrm{ch}^2 p+1, & -\sin^2 q+\cos^2 q+1 \\ \frac{2}{\mathrm{ch}\,4x}, & \frac{2}{\cos 4y}, & 2\,\mathrm{sh}^2 p-2\,\mathrm{ch}^2 p, & 2\sin^2 q+2\cos^2 q \end{matrix}\right\| =$$

$$(3.11)\qquad = -\frac{\varrho_1}{2}\left\|\begin{matrix} -\frac{1}{\mathrm{ch}\,4x}-1, & \frac{1}{\cos 4y}-1, & -2\,\mathrm{ch}^2 p, & -2\sin^2 q \\ -\frac{1}{\mathrm{ch}\,4x}+1, & \frac{1}{\cos 4y}+1, & -2\,\mathrm{sh}^2 p, & 2\cos^2 q \\ \frac{2}{\mathrm{ch}\,4x}, & \frac{2}{\cos 4y}, & -2, & 2 \end{matrix}\right\|$$

что определяет, очевидно, номограмму с такими же шкалами p и q, так как у номограммы, определяемой матрицей (3.2_1^1).

Достаточно положить $\varrho_1 = 1$ и умножить $-\frac{\varrho_1}{2} = -\frac{1}{2}$ на матрицу.

Доказанная сейчас проективная совместимость относительной переменно w номограммы соотношений (3.3) (или, что то же самое, (3.8)) и (3.2) (или, что то же самое, (3.9)) интересна еще тем, что показывает, что из совместимости номограмм по w не следует их совместимость по z и наоборот. Однако зависимости (3.9) и (3.8) несовместимы ни по z ни по w при $k = 0$, в чем легко убедиться. Однако зависимости (3.9) и (3.8) несовместимы.

Итак, любое соотношение (3.3) и любое — (3.2), например

$$(3.12)\qquad \omega = \ln \mathrm{th}\, z \ \text{и}\ \omega = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

номографически совместимы по ω, и получаем шестишкальную номограмму нулевого жанра.

Для двух зависимостей

$$(3.13)\qquad \omega = \ln \mathrm{th}\, z_1 = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{z_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

или, что то же самое, для зависимостей

$$(3.14)\qquad e^{\omega} = \mathrm{th}\, z_1 = \mathrm{tg}\left(\frac{z_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

где z_1, z_2, ω — комплексные переменные.

Эту теорему — о совместимости по w уравнения (3.12) и о существовании для (3.14) шестишкальной номограммы нулевого жанра на полном шестиугольнике $z_1 = x_1 + 2y_1$, $z_2 = x_2 + 2y_2$, $w = p + iq$ мы можем поставить в один ряд с доказанной нами в работе [4] на странице 218, § 18, теоремой о номографической совместимости по w системы (5.2), (5.3) цитируемой работы и, в частности, системы

$$z = \ln \sin w, \qquad z = \sin w \tag{3.15}$$

т. е., заменяя в первом уравнении z на z_1, а во втором — z на z_2 и затем вновь переобозначив z_1, через z, а z_2 через G, получаем изобразимую на шестишкальной конической номограмме второго жанра зависимость

$$e^z = G = \sin w \tag{3.16}$$

Как уже отмечено выше, это находится в полном согласии с тем, что зависимость

$$\operatorname{th} z_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{z_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.17}$$

нулевого жанра, в чем можно убедиться, переписав последнюю зависимость в форме

$$-2z_1 = \ln \operatorname{tg}\left(-\frac{z_2}{2}\right) \tag{3.18}$$

совпадающей с последней формой зависимостей нулевого жанра (3.3).

Однако, зависимости (3.12) несовместны по z. Действительно, сравнение любой из двух матриц ($3.3_1'$), ($3.3_2'$) с любой из двух матриц ($3.2_1'$), ($3.2_2'$) ясно, что не существует такой постоянной матрицы $\| a_{ik} \|$, $i, k = 1, 2, 3$, чтобы в результате умножения на нее слева любой из матриц ($3.3_1'$), ($3.3_2'$) получилась бы матрица, двумя столбцами элементов, зависящих соответственно от x и y, совпадающими с двумя одноименными с ними столбцами x и y матриц ($3.2_1'$) или ($3.2_2'$). Это просто следует из того, что в ($3.3_1'$) и ($3.3_2'$) столбцы x и y содержат соответственно гиперболические и тригонометрические функции, а в ($3.2_1'$) и ($3.2_2'$) — наоборот, столбец x содержит тригонометрические, а столбец y — гиперболические функции.

Таким образом, если в зависимостях (3.12), оставив переменную z без изменений, изменить w в одном из уравнений на w_1, а в другом на w_2, то получившаяся система

$$w_1 = \ln \operatorname{th} z, \qquad w_2 = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.19}$$

не будет совместно номографируемой системой. Эту систему согласно (3.2) и (3.3) легко преобразовать к более простому виду

$$e^{w_1} = \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{tg} z = \pm \operatorname{sh} w_2 \ (\text{или } \sin z = \operatorname{th} w_2) \tag{3.20}$$

но эти уравнения не являются совместно номографируемыми.

Мы уже отметили, что (3.1) и (3.2) несовместны ни по w, ни по z. Это, в частности, значит, что несовместны ни по w, ни по z, зависимости

$$e^z = \operatorname{th} w, \qquad \sin z = \operatorname{th} w \tag{3.21}$$

Это значит, что, заменяя в первом z на z_1, и во втором z на z_2, получим несовместную систему

(3.22) $$e^{z_1} = \sin z_2 = \operatorname{th} w$$

Или, переписывая эту зависимость для удобства переменив z_1 на z, а z_2 на w_0 и w на w_1, получим несовместную систему

(3.23) $$e^z = \sin w_0 = \operatorname{th} w_1$$

Однако,

(3.24) $$z = \ln \sin w_0, \qquad z = \ln \operatorname{th} w_1$$

суть частные случаи номографируемой при любой k и, следовательно, и при $k = 0$ и $k = 1$ зависимости (4.1), где индексы при переменной w указывают значение модуля $k = 0$, и $k = 1$.

Мы получим парадоксальный результат:

с одной стороны мы доказали, что эта система (3.24), как вытекающая из (3.21) несовместна ни по z, ни по w (если заменить w_0 и w_1 на w). С другой стороны сейчас показав, что оба соотношения (3.24) входя в номографируемую при любом к зависимость (4.1) главы II, должны быть, казалось бы совместно номографируемы, как две частные (при $k = 0$ и $k = 1$) зависимости из пучка ∞^1 номографируемых зависимостей (4.1) главы II.

Парадоксальность последнего заключения о номографируемости системы (3.23) одним выравниванием на шестишкальной номограмме обязана своим происхождением смешению понятия номографируемости соотношения, содержащего параметр (в данном случае соотношения (4.1) главы II, содержащего параметр k) и совместной номографируемости этой зависимости при переменном k из канонического представления (16.4) (или, что все равно, (16.5)) видна только номографируемость соотношения (16.1) при переменном параметре k, ни в коем случае не совместная номографируемость поскольку уравнения всех шкал — и шкал z и шкал w зависят от этого параметра k (не говоря уже о том, что случай $k = 0$ не содержится в (16.4), (16.5), как предельный и элементарный. Поскольку, таким образом, из (16.4), (16.5) мы видим, что шкалы z зависят от k, то соотношение (3.23) не номографируемо номограммой с одним выравниванием и никакого противоречия нет.

Итак, вообще говоря, если z соотношение $F(z; w) = 0$ и $f(z; w) = 0$ номографически совместных по w (соответственно по z), то они не обязательно номографически совместны по z (соответственно — по w).

Но вот пример, когда, однако, это имеет место:

(3.21′) $$z = \sin w; \qquad z = \cos w$$

эти соотношения номографически совместны по w ибо, взяв

(3.22′) $$z_1 = \sin w; \qquad z_2 = \cos w$$

получим

(3.23′) $$z_1^2 + z_2^2 = 1$$

Это номографическое соотношение 4 жанра на двух конических сечениях. И, следовательно, система (3.21′) номографируемо на шестишкальной номограмме с одним выравниванием на двух конических сечениях, несущих шкалы z_1 и z_2 и паре прямолинейных шкал w.

Соотношения (3.21′) совместны по z, ибо система

(3.24′) $$z = \sin w_1, \qquad z = \cos w_2$$

допускает тривиальную номограмму нулевого жанра для линейной зависимости

(3.25) $$w_2 = (-1)^{k+1} w_1 - k\pi + \frac{\pi}{2}$$

между комплексными переменными w_1 и w_2 с вещественными коэффициентами $(-1)^{k+1}$ при w_1 и свободным членом $-k\pi + \frac{\pi}{2}$

Итак, мы выяснили, что зависимости (4.1) и (16.1) главы II, будучи совместны по w при $k = 0$, — несовместны ни по z, ни по w при $k = 1$. Наоборот, зависимости (3.8) (см. выше) и (16.1) главы II, будучи совместны по w при $k = 1$ — несовместны ни по z, ни по w при $k = 0$.

Следовательно, соотношения (4.1) и (16.1) главы II при произвольном k несовместны.

Итак, зависимости, рассмотренные в главах I, II работы [1] при произвольном k несовместны и могут быть совместны для одних значений k по той или иной переменной w либо z и — не совместны по другой. И этот вопрос должен исследоваться в каждом случае отдельно.

Поскольку каждой вещественной зависимости между гауссовыми комплексными аргументами в силу прямого принципа перенесения отвечает такая же вещественная зависимость между клиффордовыми комплексными аргументами, — все, что было изложено выше для таких зависимостей сохраняет силу, если везде над комплексными аргументами поставить знак тильда.

В тех же вышеупомянутых соотношениях, в которых явно входят вещественные ($\mathrm{Re}\, z$ или $\mathrm{Re}\, w$) и коэффициенты при мнимых частях ($\mathrm{Im}\, z$ и $\mathrm{Im}\, w$), — необходимо сделать преобразования перенесения (2.5) и (4.3) главы I работы [1].

Рассмотрим теперь дальнейшие примеры номографирования элементарных зависимостей.

§ 4. Пусть надо построить номограмму зависимости

(4.1) $$w = \ln \mathrm{tg}\, z$$

Используем этого канонического представления (3.2_1), (3.2_2). Сравнивая (4.1) с третьим соотношением (3.2), находим, что, если в канонических представлениях (3.2_1), (3.2_2) сделать замену

(4.2) $$\begin{cases} \dfrac{z}{2} + \dfrac{\pi}{4} \to z \\ w \to w \\ x \to 2x - \dfrac{\pi}{2} \\ y \to 2y \\ p \to p \\ q \to q \end{cases}$$

то получим следующие канонические представления для зависимостей (4.1)

$$(4.3_1)\qquad \begin{cases} (\cos 4x) + (\operatorname{ch} 4y)\,(-\operatorname{th}^2 p) + \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 p}\right) = 0 \\ (\cos 4x) + (\operatorname{ch} 4y)\,(\operatorname{ctg}^2 q) + \left(-\dfrac{1}{\sin^2 q}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(4.3_2)\qquad \begin{cases} (-\operatorname{tg}^2 2x)\,(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(\dfrac{1}{\cos^2 2x}\right) = 0 \\ (\operatorname{th}^2 2y)\,(\operatorname{ch} 2p) + (\cos 2q) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2y}\right) = 0 \end{cases}$$

§ 5. Рассмотрим теперь зависимость

$$(5.1)\qquad \operatorname{cth} w = \operatorname{tg} z$$

которую перепишем в виде

$$(5.2)\qquad 2w = \ln \operatorname{tg}\left(-z - \frac{\pi}{4}\right)$$

Для перехода от (4.1) к (5.1) достаточно сделать замену

$$(5.3)\qquad \begin{cases} z \to -z - \dfrac{\pi}{4} \\ w \to 2w \\ x \to -x - \dfrac{\pi}{4} \\ y \to -y \\ p \to 2p \\ q \to 2q \end{cases}$$

Отсюда

$$(5.4)\qquad \begin{cases} 4x \to -4x - \pi \\ 4y \to -4y \\ 2x \to -2x - \dfrac{\pi}{2} \\ 2y \to -2y \\ p \to 2p \\ q \to 2q \end{cases}$$

Выполняя это преобразование в (4.3_1) и (4.3_2), получим следующие канонические представления зависимости нулевого жанра (5.1):

$$(5.4_1)\qquad \begin{cases} (\cos 4x) + (\operatorname{ch} 4y)\,(\operatorname{th}^2 2p) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2p}\right) = 0 \\ (\cos 4x) + (\operatorname{ch} 4y)\,(-\operatorname{ctg}^2 2q) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 2q}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(5.4_2)\qquad \begin{cases} (-\operatorname{ctg}^2 2x)(\operatorname{ch} 4p) + (\cos 4q) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right) = 0 \\ (\operatorname{th}^2 2y)(\operatorname{ch} 4p) + (\cos 4q) + \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2y}\right) = 0 \end{cases}$$

Этот же результат мы получили бы, очевидно, сделав согласно (4.2) и (5.3) в (3.2) и соответствующих (3.2) канонических представлениях (3.2_1), (3.3_2) замену

$$(5.5)\qquad \begin{cases} z \to -2z - \pi \\ w \to 2w \\ x \to -2x - \pi \\ y \to -2y \\ p \to 2p \\ q \to 2q \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(5.6)\qquad \begin{cases} 2x \to -4x - 2\pi \\ 2y \to -4y \\ p \to 2p \\ q \to 2q \end{cases}$$

§ 6. Канонические представления зависимости

$$(6.1)\qquad z = \sin w$$

которую мы уже в другой более общей форме рассматривали выше в § 2 и в § 16 главы II, а также в работе [4], стр. 206, (5.2), (5.3) и стр. 215, 216, имеют вид

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin^2 p} - \dfrac{y^2}{\cos^2 p} - 1 = 0 \\ \dfrac{x^2}{\operatorname{ch}^2 q} + \dfrac{y^2}{\operatorname{sh}^2 q} - 1 = 0 \end{cases}$$

§ 7. Канонические зависимости

$$(7.1)\qquad z = \operatorname{sh} w$$

получаются из (6.2) преобразованием

$$(7.2)\qquad \begin{cases} z \to iz, & w \to iw, \\ x \to -y, & y \to x, \\ p \to -q, & q \to p, \end{cases}$$

и, следовательно, имеют вид

$$(7.3)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2(\operatorname{th}^2 p) + (-\operatorname{sh}^2 p) = 0, \\ x^2 + y^2(-\operatorname{ctg}^2 q) + (\cos^2 q) = 0. \end{cases}$$

§8. При помощи (4.1) и (4.2) главы II, полагая $k = 0$ и принимая при этом во внимание (1.1), (1.2), (1.3), найдем следующие канонические представления для зависимости

$$z = \ln \sin w, \tag{8.1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left(-\frac{\sin^2 2p}{2}\right)(e^{-2x}) + (\cos 2y) + (\cos 2p) = 0, \\ &\left(\frac{\operatorname{sh}^2 2q}{2}\right)(e^{-2x}) + (\cos 2y) + (-\operatorname{ch} 2q) = 0, \end{aligned}\right. \tag{8.2}$$

которые мы в другой, в несколько более общей форме записи, рассматривали выше в § 1 и в § 2 по поводу номографической совместности по переменной w зависимостей (6.1) и (8.1), что привело нас к существованию канонической шестишкальной номограммы второго жанра (1.5″), (2.4″) для зависимостей (см. выше)

$$e^z = \sigma = \sin w, \tag{3.16}$$

Надо только считать в (2.4″) что $A = \operatorname{Re} \sigma$ и $B = \sin \sigma$, т. е. что, хотя P и Q в (1.5″) и (2.4″) одни и те же, переменные A и B в (2.4″) и в (1.5″) — разные. А именно, в (2.4″) (см. (3.16))

$$A = \operatorname{Re} \sigma, \qquad B = \sin \sigma, \tag{8.3}$$

§ 9. Заменяя теперь в (8.1) и в (8.2) переменные z и w, согласно схеме

$$\left\{\begin{aligned} &z \to z + i\frac{2}{\pi}, \\ &w \to iw, \\ &x \to x, \\ &y \to y + \frac{\pi}{2}, \\ &p \to -q, \\ &q \to p, \end{aligned}\right. \tag{9.1}$$

получим для

$$z = \ln \operatorname{sh} w, \tag{9.2}$$

следующие канонические представления

$$\left\{\begin{aligned} &\left(-\frac{\operatorname{sh}^2 2p}{2}\right)(e^{-2x}) + (\cos 2y) + (\operatorname{ch} 2p) = 0, \\ &\left(\frac{\sin^2 2q}{2}\right)(e^{-2x}) + (\cos 2y) + (-\cos 2q) = 0. \end{aligned}\right. \tag{9.3}$$

§ 10. Канонические представления для зависимости второго жанра

$$z = w^2, \tag{10.1}$$

в силу [4], стр. 206 (5.4) и стр. 217, § 15 имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} &(x)(4p^2) + (y^2) + (-4p^4) = 0, \\ &(x)(4q^2) + (-1)(y^2) + (4q^4) = 0 \end{aligned}\right. \tag{10.2}$$

§ 11. Канонические представления для зависимости нулевого жанра

$$w = e^z, \tag{11.1}$$

имеют вид (см. [4], стр. 217, 218, § 16)

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + (e^{2x}) = 0, \\ (\mathrm{tg}^2 y)(p^2) + (-1)(q^2) = 0, \end{cases} \tag{11.2}$$

$$\begin{cases} (2p^2)(e^{-2x}) - (\cos 2y) + (-1) = 0, \\ (2q^2)(e^{-2x}) + (\cos 2y) + (-1) = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

§ 12. Наконец, для линейной зависимости

$$w = (m + ni)(z - z_0) + w_0, \tag{12.1}$$

где $m + ni$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = p_0 + iq_0$ — произвольны, получим канонические представления

$$\begin{cases} m(x - x_0) - n(y - y_0) - (p - p_0) = 0, \\ n(x - x_0) + m(y - y_0) - (q - q_0) = 0, \end{cases} \tag{12.2$_1$}$$

$$\begin{cases} m(p - p_0) + n(q - q_0) - (m^2 + n^2)(x - x_0) = 0, \\ n(p - p_0) - m(q - q_0) + (m^2 + n^2)(y - y_0) = 0. \end{cases} \tag{12.2$_2$}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вильнер, И. А. *Принцип перенесения и номографирование в вещественной проективной плоскости функций одного комплексного дуального переменного Штуди и двойного переменного Клиффорда.* Archivum mathematicum. Fasc. 2 (1965), 101—152. Fasc. 3 (1965), 153—188. Brno.

[2] Вильнер, И. А. *Номограмма для вычисления эллиптических функций и интегралов.* Успехи мат. наук, т. IX, в. 2 (60), (1954), стр. 113—124.

[3] Вильнер, И. А. *Топология и геометрия пространства мнимой анаморфозы.* Успехи мат. наук, т. XIII, в. 4 (82), (1958).

[4] Вильнер, И. А. *Номографирование систем уравнений и аналитических функций.* Номографический сборник МГУ (1951).

[5] Вильнер, И. А. *Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса.* Математический сборник, 27, вып. 1 (1950).

[6] Вильнер, И. А. *Номограммы систем уравнений и аналитических функций.* ДАН, т. 58, № 5 (1947).

[7] Вильнер, И. А. *Стереоскопическая номография и решение общей анаморфозы в N-мерном пространстве,* УМН, т. XI, в. 4 (70).

[8] Вильнер, И. А. и Галайда, П. *Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и* их *автоморфные преобразования.* Matematicko-fyzikálny časopis SAV, XIV, 1-1964, 6—43.

[9] Вильнер, И. А и Галайда, П. *Основания аналлагматической номографии.* ACTA T. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XV, 1967, 1—29.

[10] Galajda, P.: *Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej.* Aplikace matematiky 9 (1964), 131—148.

[11] Galajda, P.: *Transformácie nomogramov analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu.* Aplikace matematiky 10 (1965), 489—503.

P. Galajda
Katedra matematiky
VŠT, Košice, ČSSR