Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Grozó Stanilov

К биаксиальной теории конгруэнции прямых

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 3, 117--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104941

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
4, 3 (1963)

К БИАКСИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

Грозьо Станилов, София

Биаксиальное пространство B_3 задается двумя скрещивающимися прямыми j, k. Мы вводим семейство реперов о которых $A_1 \in j$, $A_3 \in k$ единичная точка E находится на прямой $(A_2 + A_3, A_1 + A_4)$ где $A_2 + A_3 = (A_2 A_3) \times j$, $A_1 + A_4 = (A_1 A_4) \times k$. Инфинитизимальные преобразования координат вершин репера этого семейства даются формулами

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
d A_1 &= (\theta_4 - \theta_7) A_1 - \theta_1 A_2 - \theta_1 A_3 , \\
d A_2 &= \theta_5 A_1 + \theta_3 A_2 + \theta_6 A_3 + \theta_2 A_4 , \\
d A_3 &= -\theta_2 A_1 + (\theta_3 - \theta_6) A_3 - \theta_2 A_4 ; \\
d A_4 &= \theta_7 A_1 + \theta_1 A_2 + \theta_8 A_3 + \theta_4 A_4 ,
\end{aligned}
$$

причем формы θ_i удовлетворяют следующие уравнения структуры B_3 :

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&D \theta_1 = [\theta_1 , \theta_3 - \theta_4 + \theta_7], \quad D \theta_2 = [\theta_2 , \theta_4 - \theta_3 + \theta_6] , \\
&D \theta_3 = [\theta_1 , \theta_5 - \theta_2] , \quad D \theta_4 = [\theta_2 , \theta_8 - \theta_1] , \\
&D \theta_5 = [\theta_2 , \theta_6 + \theta_7] + [\theta_5 , \theta_4 - \theta_3 - \theta_7] , \\
&D \theta_6 = D\theta_7 = [\theta_1 , \theta_5] + [\theta_2 , \theta_8] , \\
&D \theta_8 = [\theta_1 , \theta_6 + \theta_7] + [\theta_8 , \theta_3 - \theta_4 - \theta_6]
\end{aligned}
$$

Если присоединит A_2 , A_4 к лучу $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ конгруэнции, можно выделить главные формы $\theta_5 , \theta_6 , \theta_7 , \theta_8$. Существуют следующие две линейные соотношения

$$
(3)\quad \theta_6 = a\, \theta_5 + b\, \theta_8 , \qquad \theta_7 = b' \theta_5 + c\, \theta_8
$$

которые после внешнего дифференцирования дают

$$
\begin{aligned}
&da + (a+b')(a\theta_2 + b\theta_1) + a(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) - \theta_1 = x_1\theta_5 + x_2\theta_8, \\
&db + (b+c)(a\theta_2 + b\theta_1) + b(\theta_4 - \theta_3 + \theta_6) - \theta_2 = x_2\theta_5 + x_3\theta_8, \\
(4)\quad &db' + (a+b')(b'\theta_2 + c\theta_1) + b'(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) - \theta_1 = x_1'\theta_5 + x_2'\theta_8, \\
&dc + (b+c)(b'\theta_2 + c\theta_1) + c(\theta_4 - \theta_3 + \theta_6) - \theta_2 = x_2'\theta_5 + x_3'\theta_8 .
\end{aligned}
$$

Варируя только вторичные параметры получим

$$
\begin{aligned}
&\delta a + (a+b')(aM_2 + bM_1) + a(M_3 - M_4) - M_1 = 0 \\
(5)\quad &\delta b + (b+c)(aM_2 + bM_1) + b(M_4 - M_3) - M_2 = 0 \\
&\delta b' + (a+b')(b'M_2 + cM_1) + b'(M_3 - M_4) - M_1 = 0 \\
&\delta c + (b+c)(b'M_2 + cM_1) + c(M_4 - M_3) - M_2 = 0
\end{aligned}
$$

Из (2) можно подсчитать

$$
\begin{aligned}
&\delta\theta_5 = (\theta_6 + \theta_7)M_2 + \theta_5(M_3 - M_4), \quad \delta\theta_6 = \delta\theta_7 = \theta_5 M_1 + \theta_8 M_2 \\
(6)\quad &\delta\theta_8 = (\theta_6 + \theta_7)M_1 + \theta_8(M_4 - M_3)
\end{aligned}
$$

Теперь формы $\varkappa = \theta_6\theta_7 - \theta_5\theta_8$, $p = (\theta_6 + \theta_7)^2 - 4\theta_5\theta_8$, $q = \theta_6 - \theta_7$ – инвариантны. Нулевыми многообразиями формы τ являются развертывающимися поверхности конгруэнции. Уравнение $q = 0$ определяет специальную линейчатую поверхность конгруэнции, которую мы называем абсолютной линейчатой поверхностью. Чтобы выяснить, что дает $p = 0$ рассмотрим касательную плоскость к произвольной линейчатой поверхности в B_3 в точке $P = A_2 + \sigma A_4$. Она пересекает абсолютные прямые в точках соответственно J, K. Прямая (J, K) пересекает луч $(A_2 A_4)$ в точке $P' = A_2 + \sigma' A_4$ так, что

$$
\sigma' = \frac{\theta_5 + \sigma\theta_7}{\theta_6 + \sigma\theta_8}
$$

Таким образом соответствие $P \rightarrow P'$ есть проективность с двойными элементами, для которых

$$
(7)\quad \theta_8\sigma^2 + (\theta_6 + \theta_7)\sigma + \theta_5 = 0
$$

Точки $P(\sigma)$ находящиеся на луче $(A_2 A_4)$ линейчатой поверхности в B_3, которые определяются уравнением (7) называются узловыми точками. Если они совпадают, поверхность называется параболической. Для них $p=(\theta_6+\theta_7)^2-4\theta_5\theta_8=0$. Тогда можно сказать, что нулевые многообразия формы P являются параболическими поверхностями конгруэнции. Они, имея ввиду (3), определяются уравнением

$$(a+b')^2\theta_5^2+[2(a+b')(b+c)-4]\theta_5\theta_8+(b+c)^2\theta_8^2=0 .$$

Если отнести конгруэнцию к двум ее параболическим поверхностям, получим $b+c=0$, $a+b'=0$. Тогда A_2, A_4 - параболические точки луча конгруэнции. Теперь $M_1=M_2=0$, $\delta(ab)=0$, что показывает, что ab - инвариант первого порядка. Нормирование $a=1$, и

$$(A_1 A_2 A_3 A_4)=1$$

приводит к каноническому реперу. Основные формулы будут

$$\begin{aligned}
&\theta_1=\alpha\theta_5+\beta\theta_8,\ \theta_2=\beta\theta_5+\gamma\theta_8,\ \theta_3=m\theta_5+n\theta_8\\
(8)\quad &\theta_4=-m\theta_5-n\theta_8,\ \theta_6=-\theta_7=\theta_5+b\theta_8,\\
&m=\frac{1}{2}(x_1+\alpha+1),\quad n=\frac{1}{2}(x_2+\beta+b).
\end{aligned}$$

Коефициенты $b,\alpha,\beta,\gamma,x_1,x_2$ будут инварианты. Нетрудно дать геометрическое толкования для них. Например, если $\delta=(A_2,A_4,F_1,F_2)$, где F_1, F_2 фокусы луча, то

$$b=-\frac{\delta}{(\delta+1)^2}$$

Произвольная линейчатая поверхность конгруэнции определяется уравнением

$$\theta_5=f\theta_8$$

Две линейчатые поверхности пересекаются гармонически когда

$$(9)\qquad f_2=\frac{-(2b+1)f_1-2b^2}{2f_1+(2b+1)}$$

Узловые точки двух поверхностей образуют гармоническую группу когда

(10) $$f_2 = -f_1 \;.$$

Инволюции (9) и (10) имеют общую пару и они определяются соответственно

$$\theta_5 = -b\,\theta_8 \;, \qquad \theta_5 = b\,\theta_8 \;.$$

Первая, это абсолютная поверхность конгруэнции, а вторая - гармоническая поверхность. Она определяется тем условием, что ее узловые точки и фокусы луча конгруэнции образуют гармоническую группу.

Если $b = -\dfrac{1}{4}$, конгруэнция параболическая.

Подробнее изложение этой работы будет опубликовано в Чехословацком математическом журнале.