Alois Kufner

Über Sobolevsche Räume mit Belegungsfunktion und das Dirichletsche Problem (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 105--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104998

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

UEBER SOBOLEVSCHE RÄUME MIT BELEGUNGSFUNKTION UND DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM

(Vorläufige Mitteilung)

A. KUFNER, Praha

In diesem Artikel wollen wir auf einige Eigenschaften der Banachschen Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}$ hinweisen und ihre Anwendung in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen - d.h. bei den Existenz- und Unizitätsfragen der schwachen Lösungen des Dirichletschen Problems - erwähnen. Die Sätze werden ohne Beweise angeführt; eine ausführliche Arbeit über das Thema dieser Mitteilung wird demnächst erscheinen. Die Mitteilung gliedert sich unmittelbar an die Arbeit von J. Nečas [1]; die benutzten Methoden entsprechen den Vorgängen in [1].

1. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im N -dimensionalen Euklidschen Raume E_N und sei P ein fester Punkt auf der Grenze S des Gebietes Ω. Mit $r(X) = |X-P|$ bezeichnen wir die Entfernung des beliebigen Punktes $X \in E_N$ von dem Punkte P.

Es sei $i = (i_1, \dots, i_N)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten. Wir bezeichnen mit $|i|$ die Summe der Komponenten i_j und mit D^i die partielle Ableitung

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$$

Es sei weiter α eine reelle Zahl und $p \geq 1$.

Dann bezeichnen wir mit $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ den Raum aller komplexwertigen, auf Ω definierten Funktionen u, deren alle Ableitungen $D^i u$ mit $|i| \leq k$ (im Sinne der Distributionen) mit der Potenz p und der Belegungsfunktion $r^{\alpha}(X)$ integrierbar sind:

$$\int_{\Omega} |D^i u|^p r^{\alpha}(x)\, dX < \infty$$

Der Raum $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ mit der Norm

$$\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i|=0}^{k} \int_{\Omega} |D^i u|^p r^{\alpha}(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

ist ein Banachscher Raum. Für $\alpha = 0$ werden wir statt $W_{p,0}^{(k)}$ einfach $W_{p}^{(k)}$ schreiben; diese Räume sind die bekannten Sobolevschen Räume (vgl. S.L.Sobolev [2]). Ähnlich schreiben wir für $k = 0$ $L_{p,\alpha}$ statt $W_{p,\alpha}^{(0)}$.

2. Es seien nun B_1 und B_2 zwei Banachsche Räume mit der Norm $\|u\|_1$ bzw. $\|u\|_2$. Wir werden sagen, dass die Einbettung

$$B_1 \subset B_2$$

s t e t i g ist, wenn eine solche Konstante c existiert, dass für alle $u \in B_1$ die Ungleichung

$$\|u\|_2 \leq c\, \|u\|_1$$

gilt.

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung kann man nun augenblicklich verschiedene Einbettungssätze ableiten, z.B.:

S a t z 1. Es sei $p > 1$, $0 < \alpha < N(p-1)$, $1 \leq q < \frac{Np}{N+\alpha}$. Dann gilt die stetige Einbettung

$$W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset W_{q}^{(k)}(\Omega).$$

S a t z 2. Es sei $p > 1$, $1 \leq q < p$, $\frac{q}{\beta+N} < \frac{p}{\alpha+N}$, $(\alpha+N)(\beta+N) > 0$. Dann gilt die stetige Einbettung

$$W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset W_{q,\beta}^{(k)}(\Omega).$$

3. Wir werden im weiteren folgendes über das Gebiet Ω voraussetzen: 1) man kann die Grenze S des Gebietes Ω lokal mit Hilfe stetiger Funktionen beschreiben; 2) das Gebiet Ω hat im Punkte P die Kegeleigenschaft von aussen, d.h. es existiert ein endlicher Kegel K mit der Spitze im Punkte P, der keine gemeinsame Punkte mit dem Gebiet Ω hat.

Wenn diese zwei Bedingungen erfüllt sind, schreiben wir das in der Form $\Omega \in \mathcal{R}^{(0)}$. Für beschränkte Gebiete $\Omega \in \mathcal{R}^{(0)}$ gelten nun folgende Sätze:

S a t z 3. Der Raum $\mathcal{E}(\Omega)$ aller in $\overline{\Omega}$ unendlich differenzierbarer Funktionen ist dicht im Raume $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ für $\alpha \geq 0$ und $p \geq 1$, d.h. es gilt

$$\overline{\mathcal{E}(\Omega)} = W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$$

in der Norm (1)

S a t z 4. Es sei $p \geq 1$. Dann gelten folgende stetige Einbettungen: 1) für $\alpha > p-1$ ist

$$W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p}(\Omega);$$

2) für $0 \leq \alpha \leq p-1$ ist

$$W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_{p,-1+\varepsilon}(\Omega),$$

wo ε eine beliebige positive Zahl ist.

Wenn wir nun voraussetzen, dass die Funktionen, die lokal die Grenze S beschreiben, nicht nur stetig sind, sondern auch die Lipschitz-Bedingung erfüllen, gilt der Teil 1) des Satzes 4 nicht nur für $\alpha > p-1$, sondern auch für $\alpha > p-N$. Für solche Gebiete hat es auch Sinn von der Spur einer Funktion $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ auf der Grenze S zu sprechen, und es gilt der folgende Satz:

S a t z 5. Es sei $\alpha \geq 0$, $\alpha > p-N$. Dann existiert eine stetige lineare Abbildung Z des Raumes $W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ in den Raum $L_{p,\alpha-p+1}(S)$ so, dass für $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ $Z(u) = u$ ist.

4. Es sei $\mathfrak{D}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega)$, die ausserhalb eines Kompaktes $M \subset \Omega$ verschwinden; das Kompakt kann sich von Funktion zu Funktion ändern.

Mit $\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ bezeichnen wir die Einschliessung der Menge $\mathfrak{D}(\Omega)$ in der Norm (1) und führen hier folgenderweise eine Pseudonorm ein:

$$(2) \qquad \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i|=k} \int_{\Omega} |D^i u|^p r^{\alpha}(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

(im Unterschied von der Norm (1) wird hier also nur über Vektoren i der Länge k summiert). Es gilt nun

S a t z 6. Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p \geq 1$, α reell, m eine ganze Zahl, $0 \leq m \leq k$. Dann gilt die stetige Einbettung

$$\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{(k-m)}_{p,\alpha-mp}(\Omega)$$

und der Ausdruck (2) ist eine Norm in $\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$, die der Norm (1) äquivalent ist.

Dieser Satz hat eine grosse Bedeutung für die Anwendung der Räume $W^{(k)}_{p,\alpha}$ zur Lösung des Dirichletschen Problems.

5. Es seien nun i und j wieder N-dimensionale Vektoren mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten und es sei

$$Au = (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u)$$

ein Differentialoperator der Ordnung $2k$ mit messbaren beschränkten Koeffizienten a_{ij} (es wird hier üblicherweise über alle Vektoren i, j summiert, für die $0 \leq |i| \leq k$ und $0 \leq |j| \leq k$ gilt).

Dem Operator A is eine sesquilineare Form zugereiht:

$$B(v, u) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) D^i v \, D^j \bar{u} \, dX \quad .$$

Wir sagen, dass der Operator A elliptisch ist, wenn eine solche positive Konstante c existiert, dass für alle Funktionen $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Ungleichung

$$|B(u, u)| \geqq c \, \|u\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)}$$

gilt.

Es sei nun $\Omega \in \mathfrak{A}^{(0)}$, α eine reelle Zahl und F ein Funktional auf dem Raume $\overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,-\alpha}(\Omega)$; sei weiter u_0 eine Funktion aus $W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$. Wir sagen, dass die Funktion $u \in W^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ das Dirichletsche Problem

a) $Au = F$ auf Ω,

b) $\dfrac{\partial^s n}{\partial n^s} = \dfrac{\partial^s n_0}{\partial n^s}$ auf S

$(s = 0, 1, \ldots, k-1;$ $\dfrac{\partial n}{\partial n}$ ist die Normalableitung) im schwachen Sinne löst, wenn

a) für alle Funktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichung

$$B(v, u) = F(v)$$

gilt und

b) $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega)$ ist.

Wir bezeichnen kurz

$$H_1 = \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,-\alpha}(\Omega), \quad H_2 = \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_{2,\alpha}(\Omega) .$$

Es sei $u_i \in H_i \ (i = 1, 2)$; man kann nun zeigen, dass die Form B, die dem Differentialoperator A zugereiht ist, die folgende Eigenschaft hat:

S a t z 7. Es existieren Intervalle $I_i \ (i = 1, 2)$, die den Punkt Null enthalten, und positive Funktionen $c_i(\alpha)$, die auf I_i definiert sind, und es gilt für alle $\alpha \in I_i$:

$$(3) \quad \sup_{\substack{u_j \in H_j \\ \|u_j\|_{H_j} \leqq 1}} |B(u_1, u_2)| \geqq c_i(\alpha) \|u_i\|_{H_i} \quad (i, j = 1, 2; \ i \neq j).$$

Wenn die Ungleichung (3) erfüllt ist, sagen wir, dass die Form B (bzw. der Operator A). H_i -elliptisch ist. Aus dieser Eigenschaft folgt nun mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Satzes von Lax und Milgram (siehe [1]) das folgende Resultat:

S a t z 8. Das Dirichletsche Problem hat für $\alpha \in I_1 \cdot I_2$ genau eine Lösung $u \in W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leq c \{ \|u_0\|_{W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)} + \|F\|_{(\overset{\circ}{W}{}_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega))'} \} .$$

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s:

[1] J. NEČAS, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationelle, Ann.Scuola Norm. Sup.Pisa, ser.3,16,4(1962), 305-326.

[2] S.L. SOBOLEV, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik, Leningrad 1950 (russisch).