Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

M. B. Kapilevič

О связи сингулярных задач Дирихле и Коши

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 1, 1--11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105088`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8, 1 (1967)

О СВЯЗИ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И КОШИ

М.Б. КАПИЛЕВИЧ, Москва

Рассмотрим в $(n+1)$-мерной области $\Omega\,[-\infty < x < \infty,\ 0 \le s < \infty,\ x = (x_1, \dots, x_n)]$ решение $z(x, s; a, b)$ сингулярной задачи Коши

$$(1)\quad Xz = z_{ss} + \frac{a}{s} z_s + b^2 z,\quad z(x,0) = \tau(x),\ z_s(x,0) = 0,$$

полагая, что a и $b = const$, X - не зависящий от s линейный оператор, действующий по переменным x, а $\tau(x)$ определена и принадлежит к классу C^2 на всей гиперплоскости $\mathcal{H}_n(-\infty < x_k < \infty,\ k = 1, 2, \dots, n)$. Ранее в работах [1] - [3] изучались формулы, которые связывают $z(x, s; a_2, b_2)$ с $z(x, s; a_1, b_1)$ и характеризуют зависимость $z(x, s; a, b)$ от параметров a и b. В настоящей заметке подобные операторы преобразования строятся в смешанном случае, когда в частности осуществляется переход от гиперболических и параболических уравнений к эллиптическим.

<u>Теорема 1</u>. Пусть оператор X наряду с задачей (1) допускает решение $u(x, s; a, b)$ сингулярной проблемы Дирихле для полупространства Ω:

$$(2)\quad Xu + u_{ss} + \frac{a}{s} u_s - b^2 u = 0,\ u(x,0) = \tau(x),\ (x \in \mathcal{H}_n,\ s \ge 0),$$

причем $\tau(x)$ ограничена и непрерывна повсюду в $\mathcal{H}_n$. Тогда при

$a = a_1 - a_0$, $a_k = 2\beta_k$, $(k = 0, 1)$, $\beta = \beta_1 - \beta_0$, $b = \sqrt{b_1^2 - b_0^2}$, $a_0 > 0$, $b_1 > b_0$

имеет место равенство

$$(3)\quad u(x, s; a_1, b_1) = \varkappa s^{1-a_1} \int_0^\infty \rho^{a_0} r^{a-2} \overline{K}_{1-\beta}(br)\, z(x, \rho; a_0, b_0)\, d\rho,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + s^2},\ \varkappa\, \Gamma(\tfrac{1}{2} + \beta_0)\Gamma(\tfrac{1}{2} - \beta_1) = 2\Gamma(1-\beta),\ \Gamma(\nu)\overline{K}_\nu(z) = 2^{1-\nu} z^\nu K_\nu(z).$$

Таким образом, если для данного X решение $z(x, s; a, b)$ известно, то по формуле (3) может быть определена и функция $u(x, s; a, b)$. Пусть, например, $a_0 = n - 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $b_0 = 0$, а X является оператором Лапласа $X = \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$; тогда $z(x, \rho; n-1, 0; \tau)$ обращается в среднее значение $M(x, \rho; \tau)$ функции $\tau(x)$ на сфере радиуса ρ с центром в точке x, и поэтому (3) дает $(a_1 = a,\ b_1 = b)$:

$$(4)\quad u(x, s; a, b) = \mu_n s^{1-a} \int_0^\infty \rho^{n-1} r^{a-n-1} \overline{K}_{\frac{n+1-a}{2}}(br)\, M(x, \rho; \tau)\, d\rho,$$

где $\mu_n \Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \beta) = 2\Gamma(\frac{1+n}{2} - \beta)$. В другом частном случае, когда X – одномерный дифференциальный оператор Бесселя $X = \mathcal{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ $(\alpha = const)$, функция $z(x, s; a, b)$ имеет вид:

$$(5)\quad z(x, s; a, b) = \gamma \int_{-1}^{1} \tau(x + \xi s)(1 - \xi^2)^{\beta-1}(1 + \xi t)^{-\alpha} Q(x, s; \xi)\, d\xi,$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)\gamma = \Gamma(\beta + \frac{1}{2})$, $t = \frac{s}{x}$, а $Q(x, s; \xi)$ – ряд Гумберта:

$$Q(x, s; \xi) = \Xi_2\left[\alpha, 1-\alpha, \beta; \frac{t^2(\xi^2 - 1)}{4(1 + \xi t)}, \frac{b^2 s^2(\xi^2 - 1)}{4}\right].$$

Подставляя (5) в (3), придем к эксплицитной интегральной формуле для $u(x,s;a,b)$. Заменим в (3) (a_1, b_1) на (a_2, b_2), а затем исключим из двух равенств $z(x,\rho; a_0, b_0)$. Тогда, считая $a_k = 2\beta_k < 1$, $(k=1,2)$, $\beta = \beta_2 - \beta_1 > 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $b = b_2^2 - b_1^2$, $b_2 \geqslant b_1 \geqslant 0$, получим

$$(6) \qquad u(x,s;a_2,b_2) = \int_1^\infty Q_1(s,\xi)\, u(x,s\xi;a_1,b_1)\, d\xi ,$$

$$(7) \quad \Gamma(\beta)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta_2)Q_1 = 2\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta_1)\xi^{a_1}(\xi^2-1)^{\beta-1}J_{\beta-1}(bs\sqrt{\xi^2-1}) .$$

Наоборот, при $b_2 \geqslant b_1 \geqslant 0$, $b = \sqrt{b_2^2 - b_1^2}$ и неизменном значении $a_2 = a_1 = a$:

$$(8) \quad u(x,s;a,b_2) = -s^{-a}\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty \xi^a J_0[b\sqrt{\xi^2-s^2}]\, u(x,\xi;a,b_1)\, d\xi .$$

Рассмотрим теперь конфлюэнтную начальную проблему, которая возникает из (1) при одновременном росте параметра a и аргумента s . А именно, заменим в (1) a и s на $2\varepsilon - 1$ и $2\sqrt{\varepsilon s}$, $(\varepsilon = const > \frac{1}{2})$, а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to \infty$. Тогда (1) редуцируется к задаче Коши

$$(9) \qquad Xw = w_s + b^2 w, \quad w(x,0) = \tau(x), \quad (x,s) \in \Omega ,$$

где

$$w(x,s;b) = \lim_{\varepsilon\to\infty} z(x, 2\sqrt{\varepsilon s}\,;\, 2\varepsilon - 1, b) .$$

Сопоставляя (2) и (9), приходим к следующему результату:

<u>Теорема 2</u>. Предположим, что для описанного выше оператора X одновременно с (2) существует единственное решение $w(x,s;b)$ проблемы Коши (9), причем w непрерывна и ограничена в области Ω . Тогда при $a < 1$

$$(10)\ u(x,s;a,b)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)}\left(\frac{s}{2}\right)^{1-a}\int_0^\infty \rho^{\beta-\frac{3}{2}}e^{-\frac{s^2}{4\rho}}w(x,\rho;b)d\rho .$$

В частном случае $X=\Delta$, подставляя в (10) значение

$$(11)\ w(x,s;b)=\frac{2^{1-n}}{\Gamma(\frac{n}{2})}s^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty \rho^{n-1}e^{-b^2s-\frac{\rho^2}{4s}}M(x,\rho;\tau)d\rho ,$$

придем к равенству (4), и наоборот (10) появляется при исключении средних $M(x,\rho;\tau)$ из (4) и (11). Если X - линейный дифференциальный оператор первого порядка

$X=\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}$, то

$$(12)\qquad w(x,s;b)=e^{-b^2s}\tau(x_1+s,\ldots,x_n+s),$$

и здесь (10) дает решение $u(x,s;a,b)$:

$$(13)\ u=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)}\left(\frac{s}{2}\right)^{1-a}\int_0^\infty \rho^{\beta-\frac{3}{2}}e^{-b^2\rho-\frac{s^2}{4\rho}}\tau(x_1+\rho,\ldots,x_n+\rho)d\rho .$$

формулы (3),(6) и (10) определяют операторы преобразования G_s, T_s, S_s, аналогичные тем, которые рассматривались ранее в [1] -[3]. Их обращения G_s^{-1}, T_s^{-1}, S_s^{-1} можно получить, решив интегральные уравнения (3),(6),(10) относительно z, u и w. Так, например, из (6) при $b_2=b_1=b$ и условии $\lim\limits_{s\to\infty}[s^{a_2-1}u(x,s;a_2,b)]=0$ следует

$$(14)\ u(x,s;a_1,b)=\delta s^{1-a_1}\int_s^\infty(\xi^2-s^2)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi^{a_2-1}u(x,\xi;a_2,b)]d\xi ,$$

где $\delta\Gamma(1-\beta)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta_1)=-\Gamma(\frac{1}{2}-\beta_2)$. Для G_s, S_s и любой $f(s)\in C^2\ (0\le s\le\infty)$ имеют место тождества:

(15) $G_s[L_s^{(0)} f(s)] = L_{is}^{(1)}[G_s f(s)],\ S_s[\Lambda_s f(s)] = L_{is}[S_s f(s)]$,

в которых $L_s^{(k)} z = z_{ss} + \frac{a_k}{s} z_s + b_k^2 z,\ (k=0,1),\ \Lambda_s z = z_s + b^2 z,\ i = \sqrt{-1}$.

Эти тождества доказываются путем непосредственной подстановки в (15) одномерных интегральных операторов Сонина-Гегенбауэра G_s и S_s. Опираясь на (15) и полагая, что X коммутирует с G_s и S_s, устанавливаются теоремы 1 и 2. С помощью связей (3),(4) и (10), зная поведение z и w, можно получить соответствующие свойства функции $u(x,s)$. Пусть, например, $X = \Delta$, $a \geq n-1$, а $\tau(x) \in C^2(\mathcal{H}_n)$ -субгармоническая функция в области $\mathcal{H}_n$ $(\Delta\tau \geq 0,\ x \in \mathcal{H}_n)$. Тогда $M(x,s;\tau), z(x,s;a,0)$ и $w(x,s;0)$ возрастают с ростом s, причем M и z являются выпуклыми функциями от s^{2-n} и $\ln s$ при $n \neq 2$ и $n = 2$ соответственно, а $w(x,s;0)$ выпукла относительно $s^{\frac{2-n}{2}}$, когда $n \neq 2$, или относительно $\ln s$, если $n = 2$ [4]-[7]. Из (3),(4) (при $b_2 = b_0 = 0$, $\rho = \xi s$) и (10) (при $b = 0$, $\rho = \xi s^2$) заключаем, что аналогичными свойствами обладает и $u(x,s;a,0)$. Подставим далее в (10) функцию $w(x,s;b) = e^{-sb_1^2} w(x,s;b_0)$, $b_1 = \sqrt{b^2 - b_0^2}$, а затем, используя разложение $e^{-sb_1^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-sb_1^2)^m$, применим (10) к каждому возникающему интегралу. Это приводит к теореме сложения по параметру b:

(16) $u(x,s;a,b) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(s)(b^2 - b_0^2)^m u(x,s;a+2m,b_0)$,

где $A_m m!(\beta + \frac{1}{2})_m = (\frac{s}{2})^{2m}$. Аналогичный результат может быть получен и для функции $z(x,s;a,b)$, если воспользоваться формулой связи:

$$(17)\quad z(x,s;a,b)=\frac{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\beta-\frac{1}{2}} e^{t} w(x,\frac{s^2}{ut};b)\,dt,\ (a>0),$$

где интегрирование ведется вдоль прямой $\mathrm{Reel}\ t = c$ на плоскости комплексной переменной t с произвольной абсциссой $c > 0$. Соответствующую теорему сложения для $u(x,s;a,b)$ и $z(x,s;a,b)$ по аргументу s обнаруживаем, исходя из (10),(17) и равенства

$$(18)\quad w(x,s_0+s;b)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s_0^m}{m!}(X-b^2)^m w(x,s;b)=e^{s_0(X-b^2)}w(x,s;b).$$

Подставим, например, (18) при $s_0 = s_1^2$, $s = s_2^2$ в формулу (17), заменив там s на $\sqrt{s_1^2+s_2^2}$, и сравним возникающие интегралы с (17). В итоге получим

$$(19)\quad z(x,\sqrt{s_1^2+s_2^2};a,b)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(s_1)(X-b^2)^m z(x,s_2;a+2m,b),$$

откуда при $s_1 = s\sqrt{\lambda^2-1}$ $(\lambda=\mathrm{const})$, $s_2 = s$ возникает теорема умножения по s :

$$(20)\quad z(x,\lambda s;a,b)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m(s)(\lambda^2-1)^m(X-b^2)^m z(x,s;a+2m,b).$$

При фиксированных s (4) и (11) определяют интегральные трансформации типа свертки над функцией $\tau(x)$: $u = P_{s,a,b}[\tau(x)]$, $w = W_{s,b}[\tau(x)]$, которые мы будем называть обобщенными преобразованиями Пуассона и Вейерштрасса [8]. Рассмотрим также соответствующее преобразование Сонина-Гегенбауэра $z = G_{s,a,b}[\tau(x)]$ и найдем обратные операторы $P^{-1}_{s,a,b}$, $W^{-1}_{s,b}$ и $G^{-1}_{s,a,b}$. Будем считать, что для данной функции $\tau(x)\in C^{\infty}(\mathcal{H}_n)$ ряд Пицетти $M(x,\rho;\tau)=\mathrm{I}_{\frac{n}{2}-1}(\rho\sqrt{\Delta})\tau(x)$

сходится абсолютно и равномерно на полуоси $0 \leq \rho < \infty$ и внесем его в (4) и (11), а возникающие при этом интегралы вычислим по известной формуле Сонина-Гегенбауэра. Положим также в (19) $s_2 = 0,\ s_1 = s$ и воспользуемся разложениями Ломмеля:

$$(21)\ \overline{K}_\nu(s\sqrt{b^2 - X}) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(s) X^m;\ \overline{I}_{-\nu}(s\sqrt{X - b^2}) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{B}_m(s) X^m,$$

где $\overline{B}_m(s) = A_m \overline{J}_{m-\nu}(bs),\ B_0(s) = \overline{K}_\nu(bs),\ \nu = \frac{1}{2} - \beta$, а при $m = 1, 2, \ldots$

$$(22)\qquad B_m(s) = \frac{(-1)^m \Gamma(m-\nu)}{\Gamma(\nu) m!\, b^{2m}} \left(\frac{bs}{2}\right)^{2\nu} \overline{K}_{m-\nu}(bs).$$

В итоге придем к разрешающим операторам:

$$(23)\ u = \overline{K}_\nu(s\sqrt{b^2 - X})\tau(x),\ z = \overline{I}_{-\nu}(s\sqrt{X - b^2})\tau(x),\ w = e^{s(X-b^2)}\tau(x),$$

которые остаются в силе не только когда $X = \Delta$, но также для любых описанных выше операторов X. Если $X^k[\tau(x)] = 0$, $(k = 1, 2, \ldots)$, то ряды (21),(23) обрываются на к-ом члене и их обращение при $s = const$ равносильно решению неоднородных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка относительно $\tau(x)$. Обратив экспоненциальные операторы $P_{s,0,b}$, $W_{s,b}$, и записав результат в форме Сноу и Уиддера [8],[9], находим

$$(24\ a)\ \tau(x) = P^{-1}_{s,0,b}[u] = 2\cos(s\sqrt{X - b^2})u(x,s) - P_{s,0,b}[u(x,s)],$$

$$(24\ b)\ \tau(x) = W^{-1}_{s,b}[w] = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4s}} \cos(\xi\sqrt{X - b^2}) w(x, s; b)\, d\xi .$$

При $a > 0,\ \tau(x) \in C^\infty(\mathcal{H}_n)$ $P^{-1}_{s,a,b}$ и $G^{-1}_{s,a,b}$ можно построить, если исходить из (21),(23) и степенного ряда $\bar{I}_\nu(x) = {}_0F_1(\nu+1; \frac{x^2}{4})$, которые дают:

$$(25\text{ a})\quad \tau(x) = P^{-1}_{s,a,b}[u] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}_m(s)\, X^m u(x,s;a,b),$$

$$(25\text{ b})\quad \tau(x) = G^{-1}_{s,a,b}[z] = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mathcal{D}}_m(s) X^{-m} z = \sum_{m=0}^{\infty} E_m(s)(X-b^2)^m z .$$

Здесь $\mathcal{D}_m$, $\bar{\mathcal{D}}_m$ и E_m - определители m -го порядка, составленные из B_m, $\bar{B}_m$, A_m и нулей, причем при $X = \Delta$ $\Delta^m u(x,s;\tau) = u(x,s;\Delta^m\tau)$, $\Delta^m z(x,s;\tau) = z(x,s;\Delta^m\tau)$ [5]. С другой стороны, используя (14),(20) (при $\lambda = 0$) и (24а), приходим к операторам обращения иного характера:

$$(26\text{ a})\quad \tau(x) = cs\, P^{-1}_{s,0,b} \int_s^{\infty} (\xi^2 - s^2)^{-\beta} \frac{\partial}{\partial\xi} [\xi^{a-1} u(x,\xi;a,b)]\, d\xi ,$$

$$(26\text{ b})\quad \tau(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m(s)(X-b^2)^m z(x,s;a+2m,b) ,$$

где $c\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta) = -\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)$. С помощью равенств (24) - (26) можно построить ряд обобщенных связей, где претерпевают изменения не только коэффициенты уравнений (1),(2),(9а), но также аргумент s и краевая (начальная) функция $\tau(x)$. Например, при $\tau(x) = R(x)\tau_1(x)$, $R(x) \in C^\infty(\mathcal{H}_n)$, $s_1 \geqslant s_2 \geqslant 0$ имеют место связи:

$$u(x,s_2;a,b;\tau) = P_{s_2,a,b}\{R(x) P^{-1}_{s_1,0,b_1}[G^{-1}_{s_1} u(x,s_1;a_1,b_1;\tau_1)]\} ,$$

$$u(x,s_2;a,b;\tau) = P_{s_2,a,b}[R(x) G^{-1}_{s_1,a_1,b_1} z(x,s_1;a_1,b_1;\tau_1)] .$$

Эти формулы, также как и (3),(6) - (26) при подходящем выборе значений $\tau(x)$, $R(x)$ дают функциональные соотношения для ряда высших трансцендентных функций, которые являются частными решениями проблем (1),(2),(9). Пусть, например, $X = \Delta$, а $\tau(x) \in C^2(\mathcal{H}_n)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta\tau + c^2\tau = 0$, $(x \in \mathcal{H}_n)$.

Тогда, используя теорему о среднем Вебера $M[x,\rho;\tau(x)] = \tau(x)\bar{J}_{\frac{n-2}{2}}(c\rho)$ и вычислив (4) и (11) по формулам Сонина-Гегенбауэра, получим:

$$u_1 = \tau(x)\bar{K}_{\frac{1}{2}-\beta}(b_0 s),\ z_1 = \tau(x)\bar{J}_{\beta-\frac{1}{2}}(b_0 s),\ w_1 = \tau(x)e^{-b_0^2 s},$$

где $b_0 = \sqrt{b^2 + c^2}$. Такие же значения возникают из (21),(23) при любом X, если $X\tau + c^2\tau = 0$, $\tau(x) \in C^\infty(\mathcal{H}_n)$.

Они сводят (3),(6),(8) и (10) к известным интегральным формулам для функций Макдональда $K_\nu(z)$. В другом частном случае $n = 1$, $X = D_x^2$, $x_1 = x$, $\tau(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} x\ (-\infty < x < \infty)$ (4) и (11) дают решения Дюамеля Z, U, W задачи (1),(2),(9):

$$U = \mu x s^{1-a} r^{a-2}\mathbf{H}_3\left(1-\beta, 1, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2}, -\frac{b^2 r^2}{4}\right) - U_1,\quad r = \sqrt{x^2 + s^2},$$

$$Z = \gamma_1\frac{x}{s}\mathbf{H}_3\left(1-\beta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{s^2}, \frac{b^2 s^2}{4}\right),\quad W = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-b^2 s}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{s}}\right).$$

Здесь $\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\beta) = \Gamma(1-\beta)$, $\gamma_1\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta + \frac{1}{2})$, $\mathbf{H}_3$ - конфлюэнтная функция Горна, а U_1 определяется гипергеометрическим рядом:

$$U_1 = \frac{\mu\Gamma(\beta)}{\Gamma(2-\beta)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2-a} x s^{1-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2-\beta)_m m!}\left(\frac{br}{2}\right)^{2m} F\left(-m, 1; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right).$$

Наконец, при $n = 1$, $X = D_x^2$, $x_1 = x$, $\tau(x) = x^\alpha$ получим обобщенные автомодельные интегралы $u_2 = \sum_{m=0}^{\infty}(-\alpha)_{2m}\, x^{\alpha-2m} B_m(s)$,

$$z_2 = x^\alpha\,\Xi_2\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \beta+\frac{1}{2}; \frac{s^2}{x^2}, -\frac{b^2 s^2}{4}\right),\ w_2 = x^\alpha e^{-b^2 s}\,{}_2F_0\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{4s}{x^2}\right),$$

Подставив эти выражения u_k, z_k, w_k $(k = 1, 2)$ и U, Z, W в найденные связи, придем к ряду функциональных соотношений для перечисленных специальных функций, характеризующих их зависимость от s, a, b, c, α. Аналогичные результаты можно получить, решая в случае (2) сингулярную задачу Неймана для полупространства $s \geq 0$, и соответствующую вторую начальную проблему Коши для уравнения (1):

$$\bar{u}_{\xi}(x,0) = \nu(x), \bar{z}(x,0) = 0, \bar{z}_{\eta}(x,0) = \nu(x), \nu(x) \in C^2(\mathcal{H}_n),$$

где $\xi = -\eta = \left(\frac{s}{1-a}\right)^{1-a}$. В заключение отметим, что найденные выше равенства допускают обобщение на решения u, x, w других уравнений трех рассмотренных типов с выделенной переменной s и более сложных краевых и начальных задач, причем и здесь существование операторов преобразования обусловливает связь целого ряда свойств функций u, x, w [их поведение при $s \to 0$ и $s \to \infty$, классов корректности и единственности сопоставляемых проблем [10], и т.д.].

Цитированная литература

[1] М.Н. ОЛЕВСКИЙ: Докл.Акад.Наук СССР, том 101, № 1, стр.21, 1955.

[2] L.J. LIONS: Bull.de la Soc.math.de France, Vol.84, No 1, p.9, 1956.

[3] Б.М. ЛЕВИТАН: Операторы обобщенного сдвига, Москва, 1962.

[4] И.И. ПРИВАЛОВ: Субгармонические функции, М.-Л., стр.40, 1937.

[5] A. WEINSTEIN: Comptes rendus, Vol.243, No 25, p.1993, 1956.

[6] R. CARROLL: Comptes rendus, Vol.246, No 18, p.2560, 1958.

[7] C. PUCCI e A. WEINSTEIN; Atti della Acc.Naz.dei Lincei, Ser.8, Vol.24, No 5, p.493, 1958.

[8] И.И. ХИРШМАН и Д.В. УИДДЕР: Преобразования типа свертки, Москва, 1948.

[9] H. POLLARD, Proc.of Am.Math.Soc.Vol.14, No 2, p.285, 1963.

[10] Г.В. ДИКОПОЛОВ и Г.Е. ШИЛОВ: Сиб.матем.журнал,том 1, № 1,стр.45,1960.

(Received September 27,1966)