Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Luděk Granát

Metrische Eigenschaften einparametrischer Systeme von linearen Räumen der Dimension k im Euklidischen Raume E_n (Vorläufige Mitteilungen)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 2, 267--271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105110

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8, 2 (1967)

METRISCHE EIGENSCHAFTEN EINPARAMETRISCHER SYSTEME VON LINEAREN RÄUMEN DER DIMENSION k IM EUKLIDSCHEN RAUME E_n

(Vorläufige Mitteilung)

Luděk GRANÁT, Praha

Haben wir im Euklidschen Raume E_n ein einparametrisches System der k-dimensionalen Räume $(k < \frac{1}{2} n)$

$$B_k(t) = [A(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)], \quad u_\alpha u_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad , \qquad 1)$$

welches wir ein Monosystem nennen werden.

Es gelte weiter die Beziehung

$$\mathrm{Rang}\,[u_1(t), \dots, u_k(t), u_1'(t), \dots, u_k'(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_k^{(m)}(t)] = (m+1)k,$$

wo m die grösste ganze Zahl ist, für die $(m+1)k \leq n$ ist, und $u_\alpha'(t), \dots, u_\alpha^{(m)}(t)$ 1) die Ableitungen erster bis m-ter Ordnung nach t sind. Weiter setzen wir voraus, dass das Monosystem V_{k+1} nicht abwickelbar ist, d.h., dass die Vektoren $A'(t), u_1(t), \dots, u_k(t), u_1'(t), \dots, u_k'(t)$ linear unabhängig sind.

Nur mit solchen Monosystemen werden wir uns in dieser Mitteilung beschäftigen.

---

1) Die Indizen α, β, γ sollen immer die Werte 1,2,..., k durchlaufen.

Betrachten wir die Vektoren $u_1, \dots, u_k, u'_1, \dots, u'_k, \dots, u^{(i)}_1, \dots$
$\dots, u^{(i)}_k$, wo $i \leqq m$ ist; alle haben den Anfangspunkt A. Diese Vektoren bestimmen einen (i + 1) k-dimensionalen Raum, denn wir $B_{(i+1)k}$ bezeichnen. Dieser Raum hängt nicht von der Auswahl des Bezugssystems in B_k ab. Den k-dimensionalen Raum, der in $B_{(i+1)k}$ zu B_{ik} total senkrecht ist, bezeichnen wir $B^{(i)}_k$. Für den Raum B_k benützen wir auch die Bezeichnung $B^{(0)}_k$. Den zum Raum $B_{(m+1)k}$ in E_n total senkrechten Raum bezeichnen wir $C_{n-(m+1)k}$. In jedem der Räume $B^{(i)}_k$ $(1 \leqq i \leqq m)$ wählen wir ein Orthogonalbezugssystem und seine Vektoren bezeichnen wir mit $u_{ik+1}, \dots$
$\dots, u_{(i+1)k}$. Ähnlich wählen wir in $C_{n-(m+1)k}$, wo $n >$
$> (m+1)k$ ist, die Vektoren eines Orthogonalbezugsystems $u_{(m+1)k+1}, \dots, u_n$.

Wenn wir A(t) als die Kehllinie des Monosystems V_{k+1} wählen, kann man das Orthogonalbezugssystem $\{A(t), u_1(t), \dots$
$\dots, u_n(t)\}$ so wählen, dass

$A' = \sum_\alpha p_\alpha u_\alpha + \sum_{i=2k+1}^{n} p_i u_i$ ist, wobei $\sum_{i=2k+1}^{n} p_i^2 = 1 - \sum_\alpha p_\alpha^2$ ist,

$$u'_\alpha = \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} u_\gamma + d_\alpha \sum_\gamma c_{\alpha\gamma} u_{k+\gamma}$$

$$u'_{k+\alpha} = -\sum_\gamma d_\gamma c_{\gamma\alpha} u_\gamma + \sum_\gamma \omega_{k+\alpha, k+\gamma} u_{k+\gamma} + d_{k+\alpha} \sum_\gamma c_{k+\alpha, k+\gamma} u_{2k+\gamma}$$

....

$$u'_{jk+\alpha} = -\sum_\gamma d_{(j-1)k+\gamma} c_{(j-1)k+\gamma, (j-1)k+\alpha} u_{(j-1)k+\gamma} +$$
$$+ \sum_\gamma \omega_{jk+\alpha, jk+\gamma} u_{jk+\gamma} + d_{jk+\alpha} \sum_\gamma c_{jk+\alpha, jk+\gamma} u_{(j+1)k+\gamma}$$

....

$$u'_{(m-2)k+\alpha} = -\sum_{\gamma} d_{(m-3)k+\gamma}\, c_{(m-3)k+\gamma,(m-3)k+\alpha}\, u_{(m-3)k+\gamma} +$$

$$+\sum_{\gamma} \omega_{(m-2)k+\alpha,(m-2)k+\gamma}\, u_{(m-2)k+\gamma} +$$

$$+\, d_{(m-2)k+\alpha} \sum_{\gamma} c_{(m-2)k+\alpha,(m-2)k+\gamma}\, u_{(m-1)k+\gamma}$$

$$u'_{(m-1)k+\alpha} = -\sum_{\gamma} d_{(m-2)k+\gamma}\, c_{(m-2)k+\gamma,(m-2)k+\alpha}\, u_{(m-2)k+\gamma} +$$

$$+\sum_{\gamma} \omega_{(m-1)k+\alpha,(m-1)k+\gamma}\, u_{(m-1)k+\gamma} + d_{(m-1)k+\alpha}\, u_{mk+\alpha}$$

$$u'_{mk+\alpha} = -\, d_{(m-1)k+\alpha}\, u_{(m-1)k+\alpha} + \sum_{\gamma} \omega_{mk+\alpha,mk+\gamma}\, u_{mk+\gamma} + \sum_{i=1}^{\varkappa} s_{\alpha,i}\, u_{(m+1)k+i}$$

$$u'_{(m+1)k+j} = -\sum_{\gamma} s_{\gamma j}\, u_{mk+\gamma} + \sum_{i=(m+1)k+1}^{n} \omega_{(m+1)k+j,i}\, u_i\,, \quad j = 1,\dots,\varkappa\,,$$

$$\omega_{r,s} = -\,\omega_{s,r}\,, \quad r, s = 1,\dots,n\,,$$

$\|c_{jk+\alpha,\, jk+\beta}\|$, $j=0,\dots,m-2$, **sind orthogonale Matrizen,**

$\sum_{\gamma} s_{\gamma i}\, s_{\gamma j} = 0,\ i, j = 1,\dots,\varkappa,\ i \neq j,\ \varkappa = n-(m+1)k$,

gilt.

Im folgenden zeigen wir die geometrische Bedeutung einiger Invarianten der eingeführten Beziehungen.

Die Projektionen der Vektoren $u'_{\mu k+\alpha}$ $(\mu = 0,\dots,m-2)$ **in den Raum** $B_k^{(\mu+1)}$ **bezeichnen wir** $w_{\mu k+\alpha}$.

Satz 1. Die Koeffizienten $c_{\mu k+\alpha,\, \mu k+\beta}$ $(\mu = 0,\dots,m-2)$ **bestimmen die Längen der orthogonalen Projektionen der Vektoren** $w_{\mu k+\alpha}/d_{\mu k+\alpha}$ **in die Vektoren** $u_{(\mu+1)k+\beta}$ **des Bezugssystems.**

Satz 2. Es sei $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ **der Winkel der Räume** $B_{\mu k}(t)$ **und** $B_{\mu k}(t+h)$ [2], $\mu = 1,\dots,m$ **. Dann gilt bei passen-**

---

2) Die Definition des Winkels zweier linearer Unterräume E_r **und** E_s **in** E_n **siehe [4].**

der Numerierung der Winkel

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{\sin \varphi_{\alpha,\mu,h}}{h} \right| = d_{(\mu-1)k+\alpha} .$$

<u>Satz 3</u>. Es sei $\varphi_{i,h}$ der Winkel der Räume $C_{\varkappa}(t)$ und $C_{\varkappa}(t+h)$, $\varkappa = n-(m+1)k$, $i = 1,\dots,\varkappa$. Dann gilt bei passender Numerierung der Winkel

$$\lim_{h \to \infty} \left| \frac{\sin \varphi_{i,h}}{h} \right| = \sqrt{\sum_{r} s_{ri}^2} .$$

Das gemeinsame Lot zweier windschiefer linearer Räume E_k und E_s, das mit jedem dieser Räume genau einen gemeinsamen Punkt hat, nennen wir die Achse dieser Räume. Den Abstand der Schnittpunkte der gegebenen Räume von ihrer Achse nennen wir die Länge dieser Achse.

<u>Satz 4</u>. Es sei x_h die Länge der Achse der Räume $B_k(t)$ und $B_k(t+h)$. Dann gilt

$$\lim_{h \to \infty} \frac{x_h}{h} = \sqrt{1 - \sum_{\alpha} r_{\alpha}^2} .$$

Wenn wir als Drall μ-ter Ordnung ($\mu = 1,\dots,m$) den Ausdruck $\lim_{h \to \infty} |x_h / \varphi_{\alpha,\mu,h}|$ bezeichnen. wo x_h die Länge der Achse der Räume $B_k(t)$ und $B_k(t+h)$ und $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ der Winkel der Räume $B_{\mu k}(t)$ und $B_{\mu k}(t+h)$ ist, dann gilt

<u>Satz 5</u>. Das nichtabwickelbare Monosystem V_{k+1} hat für jedes t k Dralle μ-ter Ordnung ($\mu = 1,\dots,m$) $P_{\alpha\mu}$:

$$P_{\alpha,\mu} = \frac{\sqrt{1-\sum_{\alpha} r_{\alpha}^2}}{d_{(\mu-1)k+\alpha}} .$$

Die Beweise der angeführten Behauptungen werden in der Zaitschrift Časopis pro pěstování matematiky veröffentlicht.

L i t e r a t u r

[1] L. GRANÁT: Metrické vlastnosti nerozvinutelných monosystémů V_{n+1} v eukleidovském prostoru E_{2n+1}, Čas.pěst.mat.99(1966),412-422.

[2] M. JŮZA: Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée, Чех. мат. журнал, 12(87)(1962),243-250.

[3] A. JŮZOVÁ: Eukleidovské invarianty monosystémů, Čas. pěst.mat.88(1963),1-13.

[4] Č. VITNER: O úhlech lineárních podprostorů v E_n, Čas. pěst.mat.87(1962),415-422.

(Received November 8, 1966)