N. G. Perlova

О бесконечно малых изгибаниях высших порядков замкнутых ребристых поверхностей вращения

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 1, 31--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105264

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

11, 1 (1970)

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЗАМКНУТЫХ РЕБРИСТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Вопросами теории бесконечно малых изгибаний ребристых поверхностей вращения впервые занимался С.Э. Кон-Фоссен [1]. Позже аналогичными вопросами занимался В.А. Бублик [2], Г.Н. Чернис [3], В.И. Шимко [4] и в самое последнее время К.М. Белов [5].

В настоящей работе даются формулы для отыскания подчиненного известным условиям поля бесконечно малого изгибания m-го порядка замкнутой ребристой поверхности вращения и выводятся некоторые геометрические следствия из этих формул.

Работа является естественным продолжением другой работы автора [6] и существенным образом опирается на ее результаты.

Рассмотрим поверхность вращения, уравнение меридиана которой

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1(u) = \alpha_1 u, & 0 \le u \le a_1, \\ \kappa_2(u) = \alpha_2(u-a_1)+a_1\alpha_1, & a_1 \le u \le a_1+a_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \kappa_n(u) = \alpha_n(u-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\alpha_i, & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \le u \le \sum_{i=1}^{n} a_i, \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i = 0$, $a_i > 0$, и назовем ее S_n.

Отнесем S_m к подвижному реперу $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$ [1].

Установлено [6], что поле бесконечно малого изгибания m-го порядка поверхности S_m, являющегося продолжением бесконечно малого изгибания I-го порядка $\overset{(1)}{x}_k(u,v)$, имеет вид

$$(1)\quad \overset{(m)}{x}_k(u,v)=\begin{cases} x(u,v), & 0\le u\le a_1,\\ x(u,v), & a_1\le u\le a_1+a_2,\\ \dots\dots\dots\dots & \\ x(u,v), & \sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i\le u\le\sum\limits_{i=1}^{m}a_i, \end{cases}$$

где

$$(2)\quad x(u,v)=\overset{(j)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u,v)\bar{e}+\overset{(j)}{\beta}{}_k^{(m)}(u,v)\bar{a}(v)+\overset{(j)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u,v)\bar{a}'(v),$$

и

$$(3)\quad \begin{cases} \overset{(j)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{h=0}^{p}[\underset{(m)}{\overset{(j)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv}+\underset{(m)}{\overset{(j)}{\bar{\varphi}}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}],\\ \overset{(j)}{\beta}{}_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{h=0}^{p}[\underset{(m)}{\overset{(j)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv}+\underset{(m)}{\overset{(j)}{\bar{\psi}}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}],\\ \overset{(j)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u,v)=\sum\limits_{h=0}^{p}[\underset{(m)}{\overset{(j)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{(m-2h)ikv}+\underset{(m)}{\overset{(j)}{\bar{\chi}}}{}_{(m-2h)k}(u)e^{-(m-2h)ikv}], \end{cases}$$

$$p=\begin{cases} \dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном},\\ \dfrac{m}{2} & \text{при } m \text{ четном}, \end{cases}\qquad j=1,2,\dots,m.$$

В формулах (3)

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}(u) = -\frac{\alpha_j}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u) + \alpha_j\Big[(m-2h)ik + \\
&+\frac{1}{(m-2h)ik}\Big]\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}'_{(m-2h)k}(u) - \frac{r_j(u)}{(m-2h)ik}\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u) + \\
&+\frac{1}{(m-2h)ik}\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{(m-2h)k}(u)\,, \\
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u) = \frac{1}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u) - (m-2h)ik\,\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)\,, \\
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u) = \int du\int\Big[\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}'_{(m-2h)k}(u) - (m-2h)ik\,\overset{(j)}{\underset{(m)}{P}}{}_{(m-2h)k}(u)\Big]\frac{du}{r_j(u)} + \\
&\quad+\overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{C}}{}_{(m-2h)k}\,u + \overset{(2j)}{\underset{(m)}{C}}{}_{(m-2h)k}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
h = \begin{cases} 0, 1, \dots, \dfrac{m}{2} - 1 & \text{при } m \text{ четном}, \\[2ex] 0, 1, \dots, \dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном}; \end{cases}
$$

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{0}(u) = -\frac{\alpha_j}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{0}(u) + \int\overset{(j)}{\underset{(m)}{P}}{}_{0}(u)\,du + \overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{C}}{}_{0}\,, \\
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{0}(u) = \frac{1}{r_j(u)}\overset{(j)}{\underset{(m)}{R}}{}_{0}(u)\,, \\
&\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{0}(u) = r_j(u)\Big[\int\overset{(j)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{0}(u)\frac{du}{r_j^2(u)} + \overset{(2j)}{\underset{(m)}{C}}{}_{0}\Big]\,.
\end{aligned}
\right.
$$

В (4) - (5) $\overset{(2j-1)}{C}_{(m)(m-2h)k}$, $\overset{(2j)}{C}_{(m)(m-2h)k}$

при

$$h = \begin{cases} 0, 1, \ldots, \dfrac{m}{2}, & m \text{ - четное,} \\ \\ 0, 1, \ldots, \dfrac{m-1}{2}, & m \text{ - нечетное, суть} \end{cases}$$

произвольные постоянные;

$\overset{(j)}{P}_{(m)(m-2h)k}$, $\overset{(j)}{Q}_{(m)(m-2h)k}$, $\overset{(j)}{R}_{(m)(m-2h)k}$ при тех же значениях h суть коэффициенты при $e^{(m-2h)ikv}$ в правых частях уравнений

$$(6)\begin{cases} \overset{(j)}{\alpha}{}^{(m)}_{ku} + \alpha_j \overset{(j)}{\beta}{}^{(m)}_{ku} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{m-1}\Big[\overset{(j)}{\alpha}{}^{(l)}_{ku}\overset{(j)}{\alpha}{}^{(m-l)}_{ku} + \overset{(j)}{\beta}{}^{(l)}_{ku}\overset{(j)}{\beta}{}^{(m-l)}_{ku} + \\ \qquad\qquad + \overset{(j)}{\gamma}{}^{(l)}_{ku}\overset{(j)}{\gamma}{}^{(m-l)}_{ku}\Big], \\ \\ \overset{(j)}{\alpha}{}^{(m)}_{kv} + \alpha_j\big(\overset{(j)}{\beta}{}^{(m)}_{kv} - \overset{(j)}{\gamma}{}^{(m)}_{k}\big) + \varkappa_j(u)\overset{(j)}{\gamma}{}^{(m)}_{ku} = -\sum\limits_{l=1}^{m-1}\Big[\overset{(j)}{\alpha}{}^{(l)}_{ku}\overset{(j)}{\alpha}{}^{(m-l)}_{kv} + \\ + \overset{(j)}{\beta}{}^{(l)}_{ku}\big(\overset{(j)}{\beta}{}^{(m-l)}_{kv} - \overset{(j)}{\gamma}{}^{(m-l)}_{k}\big) + \overset{(j)}{\gamma}{}^{(l)}_{ku}\big(\overset{(j)}{\gamma}{}^{(m-l)}_{kv} + \overset{(j)}{\beta}{}^{(m-l)}_{k}\big)\Big], \\ \\ \varkappa_j(u)\big(\overset{(j)}{\gamma}{}^{(m)}_{kv} + \overset{(j)}{\beta}{}^{(m)}_{k}\big) = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{m-1}\Big[\overset{(j)}{\alpha}{}^{(l)}_{kv}\overset{(j)}{\alpha}{}^{(m-l)}_{kv} + \\ + \big(\overset{(j)}{\beta}{}^{(l)}_{kv} - \overset{(j)}{\gamma}{}^{(l)}_{k}\big)\big(\overset{(j)}{\beta}{}^{(m-l)}_{kv} - \overset{(j)}{\gamma}{}^{(m-l)}_{k}\big) + \big(\overset{(j)}{\gamma}{}^{(l)}_{kv} + \overset{(j)}{\beta}{}^{(l)}_{k}\big)\times \\ \times\big(\overset{(j)}{\gamma}{}^{(m-l)}_{kv} + \overset{(j)}{\beta}{}^{(m-l)}_{k}\big)\Big]. \end{cases}$$

При $m = 1$, $\underset{(1)}{\overset{(j)}{P}}_k(u)$, $\underset{(1)}{\overset{(j)}{Q}}_k(u)$, $\underset{(1)}{\overset{(j)}{R}}_k(u)$ тождественно равны нулю.

Во всех выше приведенных формулах k есть натуральный и не меньший 2-х корень уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} \overset{(j)}{A}(k) a_j = 0 , \tag{7}$$

где

$$\begin{cases} \overset{(j)}{A}(k) = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum\limits_{i=1}^{j-1} \overset{(i)}{A}(k) a_i \left[(k^2-1)(\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i \right], \; j = 2, 3, \dots, n, \\ \overset{(1)}{A}(k) = 1 . \end{cases} \tag{8}$$

Лемма 1. Для того, чтобы поле бесконечно малого изгибания m-го порядка $x(u, v)$ было непрерывно на всей поверхности S_m , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}_{(m-2h)k}(0) = 0, & h = \begin{cases} 0, 1, \dots, \dfrac{m}{2} - 1 \text{ при } m \text{ чётном}, \\ 0, 1, \dots, \dfrac{m-1}{2} \text{ при } m \text{ нечётном}, \end{cases} \\ \underset{(m)}{\overset{(1)}{\psi}}_{(m-2h)k}(0) = 0, & h = \begin{cases} 0, 1, \dots, \dfrac{m}{2} \text{ при чётном}, \\ 0, 1, \dots, \dfrac{m-1}{2} \text{ при нечётном}, \end{cases} \\ \underset{(m)}{\overset{(1)}{\chi}}_{(m-2h)k}(0) = 0, & \text{———— " ————} \end{cases} \tag{9}$$

$$
(10)\begin{cases}
\overset{(j-1)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), & \text{———} \;''\; \text{———} \\[2ex]
\overset{(j-1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), & \text{———} \;''\; \text{———} \\[2ex]
\overset{(j-1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right) = \overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i\right), & \text{———} \;''\; \text{———}
\end{cases}
$$

$$
(11)\begin{cases}
\overset{(m)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right) = 0, & h = \begin{cases} 0,1,\ldots,\dfrac{m}{2}-1 & \text{при } m \text{ четном,} \\[1ex] 0,1,\ldots,\dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном,} \end{cases} \\[4ex]
\overset{(m)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right) = 0, & h = \begin{cases} 0,1,\ldots,\dfrac{m}{2} & \text{при } m \text{ четном ,} \\[1ex] 0,1,\ldots,\dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном ,} \end{cases} \\[4ex]
\overset{(m)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right) = 0, & \text{————} \;''\; \text{————} \;.
\end{cases}
$$

<u>Доказательство</u>. Установленно [6], что функции (4) при $m = 1$ и функции (4) - (5) при $m = 2$ суть дробно-рациональные со знаменателем $[\kappa_j(u)]^q$, $q \geqslant 0$. Построенные из них функции (4) при $m = 3$, как показывает структура правых частей уравнений (6) и

формул (4), суть также дробно-рациональные со знаменателем $[\varkappa_j(u)]^{q_1}$, $q_1 \geqslant 0$, быть может, содержащие также аддитивно $\ln \varkappa_j(u)$.

При $m = 4$ функции (4) - (5) представят собой линейные комбинации выражений вида $[\varkappa_j(u)]^{q_2} \cdot [\ln \varkappa_j(u)]^{q_3}$, $q_3 \geqslant 0$, $q_2 \geqq 0$, а т.к. интеграл от такой линейной комбинации есть линейная комбинация выражений того же вида, то и при произвольном m функции (4) - (5) будут иметь указанный вид.

Т.к. $\varkappa_j(u) \neq 0$ при $u \in [\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^{j} a_i]$, $j = 2,3,\dots,n-1$; при $u \in (0, a_1]$, $j = 1$; при $u \in [\sum_{i=1}^{n-1} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i)$, $j = n$, то функции (4) - (5) при произвольном m непрерывны в указанных интервалах. Следовательно, условия (10) необходимы и достаточны для непрерывности поля $x_k^{(m)}(u, v)$ на всей поверхности S_m, кроме ее полюсов.

В полюсе $u = 0$ поле $x_k^{(m)}(u, v)$ имеет значение:

$$x_k^{(m)}(0,v) = \sum_{h=0}^{n} [\underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}_{(m-2h)k}(0) e^{(m-2h)ikv} +$$

$$+ \underset{(m)}{\overset{(1)}{\bar{\varphi}}}_{(m-2h)k}(0) e^{-(m-2h)ikv}] \bar{e} +$$

$$+\sum_{h=0}^{p}\Big[\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{(m-2h)ikv}+\overset{(1)}{\underset{(m)}{\bar\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{-(m-2h)ikv}\Big]\bar a(v)+$$

$$+\sum_{h=0}^{p}\Big[\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{(m-2h)ikv}+\overset{(1)}{\underset{(m)}{\bar\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{-(m-2h)ikv}\Big]\bar a'(v).$$

Для непрерывности поля ${}^{(m)}_{k}$ в полюсе $u = 0$ необходимо и достаточно, чтобы значение ${}^{(m)}_{k}(0, v)$ не зависело от v, для чего необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}(0)=0, \qquad h \neq \frac{m}{2} \quad ,$$

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{(m-2h)ikv}\,\bar a(v)+\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)\,e^{(m-2h)ikv}\,\bar a'(v)=$$

$$= const \quad .$$

Дифференцируя последнее равенство по v, получим:

$$\Big[\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)(m-2h)ik-\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)\Big]e^{(m-2h)ikv}\,\bar a(v)+$$

$$+\Big[\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)+(m-2h)ik\,\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)\Big]e^{(m-2h)ikv}\,\bar a'(v)=0,$$

откуда, в силу линейной независимости $\bar a(v)$ и $\bar a'(v)$ и в силу неравенства нулю $e^{(m-2h)ikv}$ следует:

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)(m-2h)ik-\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)=0\ ,$$

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0)+\overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0)(m-2h)ik=0\ .$$

Т.к. $(m-2h)^2 k^2 \neq 1$ для целых $m-2k$ и k, то

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(0) = 0, \qquad \overset{(1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(0) = 0 .$$

Необходимость и достаточность условий (9) для непрерывности поля $x_k^{(m)}(u,v)$ в полюсе $u = 0$ доказана. Аналогично доказывается необходимость и достаточность условий (11) для непрерывности поля $x_k^{(m)}(u,v)$ в полюсе $u = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$.

Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения будут иметь целью выяснить, возможно ли выполнение условий (9) - (11) для заданной поверхности S_m .

__Лемма 2__. Если функции $\overset{(1)}{\alpha}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(1)}{\beta}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(1)}{\gamma}{}_k^{(\ell)}(u,v)$ при $\ell = 1, 2, \ldots, m-1$ линейно зависят от u , то функция $\overset{(1)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u,v)$ также линейно зависит от u .

__Доказательство__. Продифференцируем 1-е уравнение системы (6) при $j = 1$ по v, 2-е уравнение - по u и вычтем затем 1-е из 2-го. Учитывая, что, в силу условия леммы, $\overset{(1)}{\alpha}{}_{kuu}^{(\ell)} = 0$, $\overset{(1)}{\beta}{}_{kuu}^{(\ell)} = 0$, $\overset{(1)}{\gamma}{}_{kuu}^{(\ell)} = 0$, при $\ell = 1, 2, \ldots, m-1$, получим:

$$\overset{(1)}{\gamma}{}_{kuu}^{(m)} = 0 \,, \quad \text{ч.т.д.}$$

__Следствие__. При выполнении условий леммы 2

$$\overset{(1)}{\underset{(m)}{Q}}{}'_{(m-2h)k}(u)-(m-2h)ik\,\overset{(1)}{\underset{(m)}{P}}_{(m-2h)k}(u)=0$$

при

$$(12)\qquad h=\begin{cases} 0,1,\dots,\dfrac{m}{2}-1 & \text{при } m \text{ четном,}\\[2ex] 0,1,\dots,\dfrac{m-1}{2} & \text{при } m \text{ нечетном;}\end{cases}$$

$\overset{(1)}{\underset{(m)}{Q}}{}_0 = const$.

<u>Доказательство</u> непосредственно следует из формул (4,3) и (5,3) при $j=1$ и леммы 2.

<u>Лемма 3.</u> Если 1) функции $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(l)}_k(u,v)$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(l)}_k(u,v)$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(l)}_k(u,v)$ при $l=1,2,\dots,m-1$ линейно и однородно зависят от u, кроме $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(l)}_k(u,v)$ при l четном,

2) функции $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(l)}_k(u,v)$ при

$$l=\begin{cases} 2,4,\dots,m-1, & m \text{ - нечетное,}\\ 2,4,\dots,m-2, & m \text{ - четное,}\end{cases}$$

зависят от u линейно неоднородно, но $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(l)}_{kv}$ зависят от u *линейно и однородно*,

то 1) функции $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(m)}_k(u,v)$, $\overset{(1)}{\beta}{}^{(m)}_k(u,v)$, $\overset{(1)}{\gamma}{}^{(m)}_k(u,v)$, кроме $\overset{(1)}{\alpha}{}^{(m)}_k(u,v)$ в случае четного m, зависят от u линейно и могут быть сделаны однородными за счет выбора произвольных постоянных,

2) функция $\overset{(1)}{\alpha}{}_{k}^{(m)}(u,v)$ в случае четного m зависит от u линейно неоднородно, но $\overset{(1)}{\alpha}{}_{kv}^{(m)}$ зависит от u линейно и может быть сделана однородной за счет выбора произвольных постоянных интегрирования.

<u>Доказательство</u>. Линейность функции $\overset{(1)}{\gamma}{}_{k}^{(m)}(u,v)$ относительно u доказана в лемме 2. Докажем, что $\overset{(1)}{\gamma}{}_{k}^{(m)}$ может быть сделана однородной относительно u за счет выбора произвольных постоянных. Как показывает формула (4.3) при $j=1$ с учетом следствия леммы 2, функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)$ при $h \neq \frac{m}{2}$ будут однородными относительно u, если положить $\underset{(m)}{\overset{(2)}{c}}{}_{(m-2h)k} = 0$,

$$h = \begin{cases} 0,1,\ldots,\frac{m}{2}-1, & m \text{ - четное,} \\ 0,1,\ldots,\frac{m-1}{2}, & m \text{ - нечетное.} \end{cases}$$

Обратимся к функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_{0}(u)$. Функция $\underset{(m)}{\overset{(1)}{Q}}{}_{0}(u)$ есть коэффициент при e^{0} в правой части уравнения (6.2) при $j=1$, которая по условию линейно и однородно зависит от u.

Значит, $\underset{(m)}{\overset{(1)}{Q}}{}_{0}(u)$ с одной стороны, имеет вид cu, $c = const$, а с другой стороны, в силу следствия леммы 2, $\underset{(m)}{\overset{(1)}{Q}}{}_{0}(u) = const$. Следовательно, $\underset{(m)}{\overset{(1)}{Q}}{}_{0}(u) = 0$, а потому $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_{0}(u) = \alpha_1 u \underset{(m)}{\overset{(2)}{c}}{}_{0}$. Обращаясь теперь к формуле (3.3), заключаем, что функция $\overset{(1)}{\gamma}{}_{k}^{(m)}(u,v)$

может быть сделана однородной за счет выбора произвольных постоянных.

Займемся функциями $\overset{(1)}{\beta}{}_k^{(m)}(u,v)$ и $\overset{(1)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u,v)$. По условию леммы, правая часть уравнения (6.3) при $j=1$, а следовательно, и функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{R}}{}_{(m-2h)k}(u)$ при всех допустимых значениях h линейно и однородно зависят от квадрата u. Обращаясь к формулам (4.2) и (5.2) при $j = 1$, заключаем, что функция $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\psi}}{}_0(u)$ линейно и однородно зависит от u, а функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\psi}}{}_{(m-2h)k}(u)$ при $h \neq \frac{m}{2}$ зависят от u линейно и могут быть сделаны однородными за счет выбора произвольных постоянных (одновременно с $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}$).

Отсюда следует утверждение леммы о функции $\overset{(1)}{\beta}{}_k^{(m)}(u,v)$.

По условию леммы, правая часть уравнения (6.2) при $j = 1$, а следовательно, и функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{Q}}{}_{(m-2h)k}(u)$ при всех допустимых значениях h линейно и однородно зависят от u. Обращаясь к формуле (4.1) при $j = 1$, заключаем, что функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_{(m-2h)k}$ при $h \neq \frac{m}{2}$, а следовательно, функции $\overset{(1)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u,v)$ при нечетном m и $\overset{(1)}{\alpha}{}_{kv}^{(m)}(u,v)$ при любом m линейно и однородно зависят от u и могут быть сделаны однородными относительно u за счет выбора произвольных постоянных (одновременно с $\overset{(1)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u,v)$).

По условию леммы, правая часть уравнения (6.1) при $j=1$ и следовательно, и функции $\underset{(m)}{\overset{(1)}{P}}{}_0(u)$ есть постоянная. Обращаясь к формуле (5.1) при $j=1$, заключаем, что функция $\underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_0(u)$, вообще говоря, линейно неоднородно зависит от u. Следовательно, функция $\overset{(1)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u,v)$ при четном m, вообще говоря, линейно неоднородно зависит от u.

Лемма доказана.

Положим

(13) $$\underset{(\ell)}{\overset{(2)}{c}}{}_{(\ell-2h)k} = 0, \qquad \ell = 1, 2, \dots, m,$$

$$h = \begin{cases} 0, 1, \dots, \frac{\ell}{2} - 1 & \text{при } \ell \text{ четном,} \\ 0, 1, \dots, \frac{\ell-1}{2} & \text{при } \ell \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Условия (9) выполнены.

<u>Лемма 2-а</u>. Если функции $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(n)}{\beta}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(\ell)}(u,v)$ при $\ell = 1, 2, \dots, m-1$ линейно зависят от u, то функция $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u,v)$ также линейно зависит от u.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству леммы 2.

<u>Лемма 3-а</u>. Если 1) функции $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(n)}{\beta}{}_k^{(\ell)}(u,v)$, $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(\ell)}(u,v)$ при $\ell = 1, 2, \dots, m-1$ линейно и однородно зависят от разности $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$,

кроме $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(\ell)}(u, v)$ при четном ℓ,

2) функции $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(\ell)}(u, v)$ при

$$\ell = \begin{cases} 2, 4, \ldots, m-1, & m \text{ - нечетное,} \\ 2, 4, \ldots, m-2, & m \text{ - четное,} \end{cases}$$

зависят от разности $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ линейно неоднородно, но $\overset{(n)}{\alpha}{}_{kv}^{(\ell)}$ зависят от $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ линейно и однородно,

то 1) функции $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u, v)$, $\overset{(n)}{\beta}{}_k^{(m)}(u, v)$, $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u, v)$ зависят от разности $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ линейно, и все они, кроме $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u, v)$ в случае четного m, могут быть сделаны однородными относительно $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ тогда и только тогда, когда таковой может быть сделана функция $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u, v)$,

2) функция $\overset{(n)}{\alpha}{}_k^{(m)}(u, v)$ в случае четного m зависит от разности $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ линейно неоднотодно, а $\overset{(n)}{\alpha}{}_{kv}^{(m)}$ может быть сделана однородной относительно $u - \sum_{i=1}^{m} a_i$ тогда и только тогда, когда таковой может быть сделана функция $\overset{(n)}{\gamma}{}_k^{(m)}(u, v)$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству леммы 3.

<u>Следствие лемм 1 и 3-а.</u> Если поверхность S_m допускает бесконечно малое изгибание $\overset{(m-1)}{x}_k$ $m-1$-го

порядка, утверждение леммы 3-а справедливо.

<u>Доказательство</u>. Если поверхность S_m допускает бесконечно малое изгибание $m-1$ -го порядка $z_k^{(m-1)}$, поля бесконечно малых изгибаний $z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(m-1)}$ непрерывны на всей поверхности S_m, а потому условия (11) выполняются для полей $1, 2, \ldots, m-1$ -го порядков.

Применим теперь лемму 3-а последовательно для $m = 2, 3, \ldots, m$. Следствие доказано.

Нетрудно проверить, что функции (4) - (5) удовлетворяют условиям (10) тогда и только тогда, когда

$$\overset{(2j)}{\underset{(m)}{c}}{}_{(m-2h)k} = -\overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{c}}{}_{(m-2h)k}\sum_{i=1}^{j-1} a_i + \sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(m)}{c}}{}_{(m-2h)k}\, a_i +$$

(14) $$+\sum_{i=2}^{j-1}\Big\{\Big[\overset{(i)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\Big]\Big(\sum_{p=1}^{i} a_p\Big) - \Big[\overset{(i)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\Big]\Big(\sum_{p=1}^{i-1} a_p\Big)\Big\} -$$

$$-\Big[\overset{(j)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\Big]\Big(\sum_{p=1}^{j-1} a_p\Big),$$

где через $\Big[\overset{(i)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\Big]$ обозначена нелинейная часть функции $\overset{(i)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}(u)$,

$$\overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{c}}{}_{(m-2h)k} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i}\sum_{i=1}^{j-1} \overset{(2i-1)}{\underset{(m)}{c}}{}_{(m-2h)k}\, a_i \{[(m-2h)^2 k^2 -$$

$$-1](\alpha_i - \alpha_j) + \alpha_i\} - \frac{(m-2h)ik}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i}\sum_{i=2}^{j} \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{\sum\limits_{p=1}^{i-1} a_p \alpha_p}\overset{(i)}{\underset{(m)}{R}}{}_{(m-2h)k}\Big(\sum_{p=1}^{i-1} a_p\Big) -$$

$$-\frac{[(m-2h)^2k^2-1]}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{s=2}^{i-1} \{ [\overset{(s)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}] (\sum_{i=1}^{s} a_i) -$$

$$-[\overset{(s)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}] (\sum_{i=1}^{s-1} a_i) \} + \sum_{i=2}^{j} \frac{\sum\limits_{s=1}^{i-1} a_s \alpha_s}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \{ [\overset{(i-1)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}]' (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) -$$

$$-[\overset{(i)}{\underset{(m)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}]' (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \} -$$

$$(15)\quad - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{j-1} a_i \alpha_i} \sum_{i=2}^{j} \{ \overset{(i-1)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{(m-2h)k} (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) - \overset{(i)}{\underset{(m)}{Q}}{}_{(m-2h)k} (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) \} ,$$

$$\overset{(2j-1)}{\underset{(m)}{C}}{}_0 = \sum_{i=2}^{j} [\frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{\sum\limits_{s=1}^{i-1} a_s \alpha_s} \overset{(i)}{\underset{(m)}{R}}{}_0 (\sum_{s=1}^{i-1} a_s) + \int (\overset{(i-1)}{\underset{(m)}{P}}{}_0 - \overset{(i)}{\underset{(m)}{P}}{}_0) du \Big|_{u=\sum\limits_{s=1}^{i-1} a_s}] +$$

$$(16)\qquad + \overset{(1)}{\underset{(m)}{C}}{}_0 ,$$

$$(17)\quad \overset{(2j)}{\underset{(m)}{C}}{}_0 = \sum_{i=2}^{j} \int (\overset{(i-1)}{\underset{(m)}{Q}}{}_0 / \kappa_{i-1}^2 - \overset{(i)}{\underset{(m)}{Q}}{}_0 / \kappa_i^2) du \Big|_{u=\sum\limits_{s=1}^{i-1} a_s} + \overset{(2)}{\underset{(m)}{C}}{}_0 .$$

Выясним теперь, могут ли для поверхностей S_m быть выполнены условия (11) (при условии ее нежесткости.

$m-1$ -го порядка!).

На основании следствия лемм 1 и 3-а условия (11) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\underset{(m)}{\overset{(n)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underset{(m)}{\overset{(2i-1)}{c}}{}_{(m-2h)k}\, a_i \; +$$

(18)

$$+\sum_{i=2}^{m-1}\left\{\left[\underset{(m)}{\overset{(i)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\right]\left(\sum_{s=1}^{i} a_s\right) - \left[\underset{(m)}{\overset{(i)}{\chi}}{}_{(m-2h)k}\right]\left(\sum_{s=1}^{i-1} a_s\right)\right\} = 0\;,$$

где $\underset{(m)}{\overset{(2i-1)}{c}}{}_{(m-2h)k}$ определяется формулой (15).

Равенство (18) представляет собой уравнение 1-ой степени относительно $\underset{(m)}{\overset{(1)}{c}}{}_{(m-2h)k}$ коэффициент при $\underset{(m)}{\overset{(1)}{c}}{}_{(m-2h)k}$ в котором равен, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{A}\,[(m-2h)k]\,a_i\;.$$

При m четном $h \neq \frac{m-1}{2}$, и условие (18) может быть выполнено за счет выбора $\underset{(m)}{\overset{(1)}{c}}{}_{(m-2h)k}$, если рассматриваемое нами значение k не является корнем уравнений

(19) $$\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{A}\,[(m-2h)k]\,a_i = 0$$

при $h = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1$.

Однако при m нечетном и $h = \frac{m-1}{2}$ условие (18) не может быть выполнено за счет выбора $\underset{(m)}{\overset{(1)}{c}}{}_{k}$, т.к. рассматриваемое нами значение k является корнем уравнения (7).

__Теорема 1__. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание $x_k^{(2p-1)}$ порядка $2p-1$, соответствующее тому натуральному и не меньшему 2-х корню k уравнения (7), который удовлетворяет условию $k > \frac{k_{max}}{2}$, где k_{max} есть наибольший корень уравнения (7), то поверхность S_n допускает также бесконечно малое изгибание $2p$-го порядка.

__Доказательство__. Если $k > \frac{k_{max}}{2}$, то и подавно $k > \frac{k_{max}}{4} > \frac{k_{max}}{6} > \ldots > \frac{k_{max}}{2p}$. Значит, k не является корнем уравнений (19) при $m = 2p$ и $h = 0, 1, \ldots, p-1$, и условия (18) могут быть выполнены за счет выбора произвольных постоянных.

Поле $x_k^{(2p)}$, соответствующее выбранному значению k, доставляет поверхности S_n бесконечно малое изгибание $2p$-го порядка.

__Теорема 2__. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание $x_k^{(2p)}$ порядка $2p$, соответствующее тому натуральному и не меньшему 2-х корню k уравнения (7), который удовлетворяет условию $k > \frac{k_{max}}{2}$, где k_{max} есть наибольший корень уравнения (7), и является одновременно корнем уравнения

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{n} \overset{(2i-1)}{\underset{(2p+1)k}{C}} a_i + \sum_{i=2}^{n-1} \Big\{ \big[\overset{(i)}{\underset{(2p+1)k}{\chi}} \big] \Big(\sum_{s=1}^{i} a_s \Big) - \big[\overset{(i)}{\underset{(2p+1)k}{\chi}} \big] \Big(\sum_{s=1}^{i-1} a_s \Big) \Big\} = 0,$$

(фактически не содержащего $\overset{(1)}{c}_{(2p+1)}k$), то она допускает также бесконечно малое изгибание $2p+1$ -го порядка.

Доказательство. Если $k > \frac{k_{max}}{2}$, то и подавно $k > \frac{k_{max}}{3} > \frac{k_{max}}{5} > \ldots > \frac{k_{max}}{2p+1}$. Значит, k не является корнем уравнений (19) при $m = 2p+1$ и $h = 0, 1, \ldots, p-1$, и условия (18) могут быть выполнены за счет выбора произвольных постоянных при $h = 0, 1, \ldots, p-1$. Т.к. k одновременно является корнем уравнения (20), то условие (18) выполнено также при $h = p$.

Поле $x_k^{(2p+1)}$, соответствующее выбранному значению k, доставляет поверхности S_n бесконечно малое изгибание $2p+1$ -го порядка.

Теорема 3. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание нечетного порядка, то расстояние между полюсами поверхности при этом изгибании не меняется.

Доказательство. Из формул (3) при условиях (9) и (11) в случае нечетного m следует:

$$x_k^{(m)}(0, v) = 0, \quad x_k^{(m)}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, v\right) = 0 \quad , \qquad \text{ч.т.д.}$$

Теорема 4. Если поверхность S_n допускает бесконечно малое изгибание четного порядка, то расстояние между полюсами поверхности при этом изгибании, вообще говоря, меняется.

Доказательство. Из формул (5) при выполнении условия (16) следует при $j=1$ и $j=n$:

$$\underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_{\circ}(0)=\underset{(m)}{\overset{(1)}{C}}{}_{\circ},$$

$$\underset{(m)}{\overset{(n)}{\varphi}}{}_{\circ}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\int\underset{(m)}{\overset{(n)}{P}}{}_{\circ}(u)\,du\Big|_{u=\sum_{i=1}^{n}a_i}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\Big[\frac{(\alpha_i-\alpha_{i-1})}{\sum_{s=1}^{i-1}a_s\alpha_s}\underset{(m)}{\overset{(i)}{R}}{}_{\circ}\left(\sum_{s=1}^{i-1}a_s\right)+$$

$$+\int\left(\underset{(m)}{\overset{(i-1)}{P}}{}_{\circ}-\underset{(m)}{\overset{(i)}{P}}{}_{\circ}\right)du\Big|_{u=\sum_{s=1}^{i-1}a_s}\Big]+\underset{(m)}{\overset{(1)}{C}}{}_{\circ}.$$

Т.к. $\underset{(m)}{\overset{(n)}{\varphi}}{}_{\circ}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)-\underset{(m)}{\overset{(1)}{\varphi}}{}_{\circ}(0)\neq 0$, вообще говоря, то

$\overset{(m)}{x}_k\left(\sum_{i=1}^{n}a_i,v\right)-\overset{(m)}{x}_k(0,v)\neq 0$, вообще говоря, ч.т.д.

<u>Замечание</u>. Теоремы 3 и 4 показывают, что если при бесконечно малом изгибании m-го порядка поверхности S_n расстояние между ее полюсами изменилось, то это изменение произошло за счет полей бесконечно малых изгибаний лишь четного порядка $2p\leq m$.

Литература

[1] S. COHN-VOSSEN: Unstarre geschlossene Flächen, Math. Ann.,102(1929),10-29(тоже С.Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Москва, Физматгиз,1959,87-114).

[2] В.А. ВУБЛИК: О числе фундаментальных бесконечно малых изгибаний замкнутых ребристых поверхностей вращения, УМН, XVIII (1963),121-125.

[3] Г.Н. ЧЕРНИС: Нежесткие ребристые поверхности с краем, Укр.матем.журнал, 4(1964), 550-558.

[4] В.И. ШИМКО: Бесконечно малые изгибания ребристых поверхностей вращения, Изв.ВУЗОВ, Матем. 9(64)(1967), 93-98.

[5] К.М. БЕЛОВ: О бесконечно малых изгибаниях торообразной поверхности вращения, Сиб.матем. журнал, IX, № 3(1968).

[6] Н.Г. ПЕРЛОВА: О бесконечно малых изгибаниях 1,2, 3-го порядков замкнутых ребристых поверхностей вращения, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 1-35.

Гос.Университет
Ростов-на-Дону
СССР

(Oblatum 20.11.1969)