Antonín Kučera
Слабая сходимость в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 2, 285--308

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105279`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

11, 2 (1970)

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Антонин КУЧЕРА, Прага

В классической математике - по определению - последовательность $\{X_k\}_k$ элементов линейного нормированного пространства $\mathcal{T}$ слабо сходится к элементу X пространства $\mathcal{T}$, если для всякого ограниченного линейного функционала f в пространстве $\mathcal{T}$ выполнено

(1) $$f(X_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(X) .$$

В конструктивной математике неверно, что всякий ограниченный линейный функционал в пространстве $\mathcal{T}$ обладает нормой. Поэтому в следующем будем рассматривать два определения слабой сходимости. В первом определении будем требовать, чтобы отношение (1) выполнялось для любого ограниченного линейного функционала, и во втором, чтобы это отношение выполнялось для нормируемых функционалов заданных вместе с их нормами. Следует заметить, что не существует нормальный алгорифм применимый к записи любого нормируемого линейного функционала и выдающий по ней норму этого функционала. В статье доказано, что в конструктивных полных линейных нормированных пространствах с базисом слабая сходимость первого типа уже совпадает с сходимостью по норме.

В дальнейшем мы пользуемся определениями и результатами из [1] и [2]. Натуральными числами (НЧ) называем положительные целые числа, конструктивными действительными числами (КДЧ) – вещественные дуплексы в алфавите $Ч_3 = \{0, 1, -, /, \Diamond\}$, последовательностями конструктивных объектов определенного типа – нормальные алгорифмы, перерабатывающие всякое натуральное число в объект этого типа. Буквы i, j, k, l, p, q служат переменными для натуральных чисел, буквы u, v переменными для конструктивных действительных чисел. В следующем нормальные алгорифмы [1] называем просто алгорифмами.

Конструктивным метрическим пространством называем пару $(\mathcal{A}, \rho)$, где $\mathcal{A}$ заданное множество слов в алфавите A (не содержащем буквы $\square$) и ρ алгорифм над алфавитом $A \cup Ч_3 \cup \{\square\}$ такой, что

1) для любых элементов P и Q из $\mathcal{A}$ алгорифм ρ применим к слову $P \square Q$, и $\rho(P \square Q)$ есть КДЧ;

2) для любого элемента P из $\mathcal{A}$ выполнено $\rho(P \square P) = 0$;

3) для любых элементов P, Q, R из $\mathcal{A}$ выполнено

$$\rho(P \square Q) \leq \rho(P \square R) + \rho(Q \square R) .$$

Элементы множества $\mathcal{A}$ назовем элементами этого конструктивного метрического пространства. Для любых элементов X, Y из $\mathcal{A}$ будем писать $X \underset{\rho}{=} Y$, если $\rho(X \square Y) = 0$. Для упрощения записи формул опускаем знак метрики под знаком равенства там, где это не может привести к недоразумениям. В дальнейшем пользуемся тоже понятиями полного и сепарабельного конструктивного метрического пространства из [2].

Конструктивным линейным нормированным пространством называем систему, состоящую из

1) множества $\mathcal{A}$ в алфавите A (не содержащем буквы $\square$);

2) алгорифма ρ над алфавитом $A \cup Ч_3 \cup \{\square\}$;

3) алгорифмов $+$ и $\cdot$ над алфавитом $A \cup \{\square\}$, соотв. $A \cup Ч_3 \cup \{\square\}$;

4) элемента σ множества $\mathcal{A}$ (нулевой элемент множества $\mathcal{A}$), если выполнены условия

а) $(\mathcal{A}, \rho)$ является конструктивным метрическим пространством;

б) алгорифм $+$ определяет операцию сложения элементов множества $\mathcal{A}$, алгорифм $\cdot$ определяет операцию умножения элементов множества $\mathcal{A}$ на КДЧ и притом для всяких X, Y, Z из $\mathcal{A}$ и КДЧ u, v выполнено

$$X + Y = Y + X; \quad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z; \quad X + \sigma = X;$$
$$X - X = \sigma; \quad u \cdot (v \cdot X) = (u \cdot v) \cdot X; \quad 1 \cdot X = X;$$
$$u \cdot (X + Y) = u \cdot X + u \cdot Y; \quad (u + v) \cdot X = u \cdot X + v \cdot X; \quad \rho(X \square Y) = \rho(\sigma \square Y - X);$$

и если $\| \ \|$ обозначает алгорифм такой, что $\|X\| \simeq \rho(\sigma \square X)$, то $\|u \cdot X\| = |u| \cdot \|X\|$.

Если X элемент множества $\mathcal{A}$, то $\|X\|$ назовем нормой элемента X . Прилагательное "конструктивный" в дальнейшем часто опускается.

Если $\mathcal{T}$ метрическое (или линейное нормированное) пространство, то буквы X, Y служат переменными для слов в алфавите этого пространства.

Определения. 1) Алгорифм Ψ назовем алгорифмическим оператором из конструктивного метрического пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ в конструктивное метрическое пространство $(\mathcal{B}, \rho')$, если выполнено

$$\forall_{PQ}(P \in \mathcal{A} \,\&\, Q \in \mathcal{A} \supset (!\,\Psi(P) \,\&\, \Psi(P) \in \mathcal{B} \,\&$$
$$\& (P \underset{\rho}{=} Q \supset \Psi(P) \underset{\rho'}{=} \Psi(Q)))) .$$

2) Пусть $\mathcal{T}$ и τ линейные нормированные пространства.

а) Алгорифмический оператор Ψ из пространства $\mathcal{T}$ в пространство τ назовем линейным оператором, если для любых элементов X, Y пространства $\mathcal{T}$ и любого КДЧ u выполнено

$$\Psi(X+Y) = \Psi(X) + \Psi(Y) \text{ и } \Psi(u \cdot X) = u \cdot \Psi(X) .$$

б) Линейный оператор f из пространства $\mathcal{T}$ в пространство КДЧ назовем линейным функционалом в пространстве $\mathcal{T}$.

в) Скажем, что КДЧ $\varkappa$ является нормой линейного функционала f в пространстве $\mathcal{T}$, если выполнено

$$\forall_X (X \in \mathcal{T} \supset |f(X)| \le \varkappa \cdot \|X\|) \,\&\, \forall_k \exists_X (X \in \mathcal{T} \,\&$$
$$\& \|X\| \le 1 \,\&\, |f(X)| > \varkappa - \frac{1}{2^k}) .$$

Определения. Пусть $\mathcal{T}$ линейное нормированное пространство, $\{X_k\}_k$ последовательность элементов пространства $\mathcal{T}$ и X элемент пространства $\mathcal{T}$. Скажем, что

1) последовательность $\{X_k\}_k$ w-сходится к элементу X и обозначим $X_k \xrightarrow{w} X$, если для всякого ограниченного линейного функционала f в простран-

стве $\mathcal{T}$ выполнено

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |f(X_k) - f(X)| < \frac{1}{p}) ;$$

2) последовательность $\{X_k\}_k$ слабо сходится к элементу X и обозначим $X_k \xrightarrow{c} X$, если для всякой пары $f * z$, где f линейный функционал в пространстве $\mathcal{T}$ и z КДЧ являющееся нормой f, имеет место

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |f(X_k) - f(X)| < \frac{1}{p}) .$$

<u>Определение</u>: Пусть $\mathcal{T}$ линейное нормированное пространство. Последовательность $\{E_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$ вместе с алгорифмом β назовем базисом пространства $\mathcal{T}$, если выполнены условия

1) $\forall_k (\| E_k \| = 1)$;

2) для всякого элемента X пространства $\mathcal{T}$ имеет место

а) для всякого НЧ k алгорифм β применим к паре $k * X$, причем алгорифм $\widetilde{\beta}_{k*}$ является линейным функционалом в пространстве $\mathcal{T}$;

б) $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X - \sum_{i=1}^{k} \beta(i * X) \cdot E_i \| < \frac{1}{p})$;

в) если $\{u_k\}_k$ последовательность КДЧ такая, что

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X - \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot E_i \| < \frac{1}{p}) ,$$

то

$$\forall_k (u_k = \beta(k * X)) .$$

<u>Определение</u>. Полное конструктивное линейное нормированное пространство $\mathcal{T}$ назовем E-пространством, если существует базис этого пространства.

Если $\mathcal{T}$ является E-пространством, то последовательность $\{E_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$ и алгорифм β будут в дальнейшем всегда обозначать базис этого пространства.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство. Тогда
1) пространство $\mathcal{T}$ является сепарабельным;
2) линейные функционалы и линейные операторы в пространстве $\mathcal{T}$ являются ограниченными, т.е. например, если Ψ линейный оператор из пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{T}$, то существует КДЧ $M > 0$ такое, что

$$\forall_X (X \in \mathcal{T} \supset \| \Psi(X) \| \leq M \cdot \| X \|).$$

Доказательство. Сепарабельность пространства $\mathcal{T}$ очевидна. Затем 2) непосредственно следует из теоремы Цейтина [2].

Определение. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство, n и s НЧ, $n \leq s$. Обозначим $X \in \mathcal{A}_{n,s} \rightleftharpoons X \in \mathcal{T} \& X = \sum_{i=n}^{s} \beta(i * X) \cdot E_i$. Тогда посредством $\mathcal{T}_{n,s}$ будем обозначать подпространство пространства $\mathcal{T}$, образованное множеством $\mathcal{A}_{n,s}$. Иногда подпространство $\mathcal{T}_{n,s}$ будем обозначать тоже посредством $\{E_n, \ldots\ldots, E_s\}$. Пусть f линейный функционал в пространстве $\mathcal{T}$. Скажем, что КДЧ x является нормой функционала f относительно подпространства $\mathcal{T}_{n,s}$, если x является нормой функционала f в пространстве $\mathcal{T}_{n,s}$.

Лемма 2. Пусть $(\mathcal{A}, \rho)$ полное сепарабельное метрическое пространство, и $\mathcal{G}$ алгорифм такой, что выполнено

1) для всякого НЧ k алгорифм $\widetilde{\mathcal{G}}_{k*}$ является алгорифмическим оператором из пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ в простран-

ство КДЧ;

2) для всякого элемента X пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ выполнено

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geqslant q \supset |\varphi(k * X)| \leq \frac{1}{p}) .$$

Тогда для всякого элемента X_0 пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ имеет место

$$\forall_p \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \mathcal{A} \,\&\, \rho(X \square X_0) \leq \frac{1}{q} \,\&\, k \geqslant q \supset$$
$$\supset |\varphi(k * X)| \leq \frac{1}{p}) .$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ множество слов типа $X * u$, где $X \in \mathcal{A}$ и u КДЧ. Для любых элементов X, Y пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ и КДЧ u, v положим $\rho_1(X * u \square Y * v) \leftrightharpoons max(\rho(X \square Y), |u - v|)$. Тогда $(\mathcal{B}, \rho_1)$ является метрическим пространством. Так как пространство $(\mathcal{A}, \rho)$ и пространство КДЧ являются полными и сепарабельными, то пространство $(\mathcal{B}, \rho_1)$ тоже полно и сепарабельно. Можно построить алгорифм $\mathcal{L}$ такой, что для всяких $X \in \mathcal{A}$, рационального числа a и НЧ k алгорифм $\mathcal{L}$ применим к паре $X * a$ и выдает по ней КДЧ, причем выполнено

а) $\mathcal{L}(X * \frac{1}{k}) = \mathcal{L}(X * -\frac{1}{k}) = \varphi(k * X)$ и $\mathcal{L}(X * 0) = 0$;

б) если $|a| \geqslant 1$, то $\mathcal{L}(X * a) = \mathcal{L}(X * 1)$;

в) если $0 < |a| < 1$, то

$$\mathcal{L}(X * a) = (\mathcal{L}(X * \frac{1}{k}) - \mathcal{L}(X * \frac{1}{k+1})) \cdot k \cdot$$
$$\cdot (k+1) \cdot (|a| - \frac{1}{k+1}) + \mathcal{L}(X * \frac{1}{k+1}) ,$$

где k НЧ, для которого $\frac{1}{k+1} \leq |a| < \frac{1}{k}$. Ясно, что для всякого $X \in \mathcal{A}$ алгорифм $\widetilde{\mathcal{B}}_{X*}$ является конструктивной функцией рациональной переменной, которая для всякого НЧ k является линейной на сегментах $\frac{1}{k+1} \Delta \frac{1}{k}$ и $-\frac{1}{k} \Delta -\frac{1}{k+1}$.

Ввиду этого и предположения 2) $\widetilde{\mathcal{B}}_{X*}$ равномерно непрерывная конструктивная функция рациональной переменной и, следовательно, перерабатывает любую фундаментальную последовательность рациональных чисел в фундаментальную последовательность КДЧ. Таким образом, существует алгорифм $\mathcal{U}$ такой, что

г) $\mathcal{U}$ является алгорифмическим оператором из пространства $(\mathcal{B}, \rho_1)$ в пространство КДЧ;

д) для всяких $X \in \mathcal{A}$ и рационального числа a выполнено $\mathcal{U}(X * a) = \mathcal{B}(X * a)$.

По теореме Цейтина [2] для всякого элемента X_0 пространства $(\mathcal{A}, \rho)$ оператор $\mathcal{U}$ непрерывен в точке $X_0 * 0$, т.е. выполнено

$$\forall_p \exists_q \forall_u \forall_X (X \in \mathcal{A} \,\&\, \rho_1 (X * u \,\square\, X_0 * 0) \leq \frac{1}{q} \supset \\ \supset |\mathcal{U}(X * u)| \leq \frac{1}{p})$$

и, следовательно,

$$\forall_p \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \mathcal{A} \,\&\, \rho(X \,\square\, X_0) \leq \frac{1}{q} \,\&\, k \geq q \supset |\varphi(k * X)| \leq \frac{1}{p}).$$

<u>Определение</u>. Для любых E-пространства $\mathcal{T}$ и НЧ k пусть U_k и V_k линейные операторы из пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{T}$ такие, что для всякого $X \in \mathcal{T}$

выполнено

$$U_k(X) = \sum_{i=1}^{k} \beta(i * X) \cdot E_i \quad \text{и} \quad V_k(X) = X - U_k(X) .$$

Лемма 3. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство. Тогда существует КДЧ $K > 0$ такое, что выполнено

$$(2) \quad \forall_k \forall_X (X \in \mathcal{T} \supset \| U_k(X) \| \leq K \cdot \| X \| \,\&\, \| V_k(X) \| \leq K \cdot \cdot \| X \| \,\&\, | \beta(k * X) | \leq 2 \cdot K \cdot \| X \|) .$$

Доказательство. Для всяких $X \in \mathcal{T}$ и НЧ k определим $\varphi(k * X) \rightleftharpoons \| V_k(X) \|$. Тогда алгорифм φ удовлетворяет предположениям леммы 2 и, следовательно, $\forall_p \exists_q \forall_k \forall_X (X \in \mathcal{T} \,\&\, \| X \| \leq \frac{1}{q} \,\&\, k \geq q \supset \| V_k(X) \| \leq \frac{1}{p})$.
Ввиду линейности операторов V_k существует НЧ q такое, что выполнено $\forall_k \forall_X (k \geq q \,\&\, X \in \mathcal{T} \supset \| V_k(X) \| \leq q \cdot \| X \|)$.
Согласно лемме 1 существует КДЧ $M \geq 0$ такое, что выполнено $\forall_k \forall_X (k < q \,\&\, X \in \mathcal{T} \supset \| V_k(X) \| \leq M \cdot \| X \|)$. Если обозначить $L \rightleftharpoons max(M, q)$, то имеет место

$$\forall_k \forall_X (X \in \mathcal{T} \supset \| V_k(X) \| \leq L \cdot \| X \|) .$$

Так как для всяких НЧ k и $X \in \mathcal{T}$ имеет место $U_k(X) = X - V_k(X)$, и $| \beta(k * X) | = \| \beta(k * X) \cdot E_k \| \leq \| V_{k-1}(X) \| + \| V_k(X) \|$, то определив $K \leftrightharpoons L + 1$, получаем (2).

Лемма 4. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство, n и s НЧ, $n \leq s$, а f линейный функционал в пространстве $\mathcal{T}$. Тогда существует КДЧ x являющееся нормой функционала f относительно подпространства $\mathcal{T}_{n,s}$.

Доказательство. Согласно лемме 3 существует КДЧ

$K > 0$ такое, что

$$\forall_k \forall_X (X \in \mathcal{J}\& \|X\| \leq 1 \supset |\beta(k * X)| \leq 2 \cdot K) .$$

Ввиду этого можно построить последовательность $\{Y_k\}_k$ элементов подпространства $\mathcal{J}_{n,s}$, для которой выполнено

а) $\forall_k (\|Y_k\| \leq 1)$;

б) $\forall_p \exists_q \forall_X \exists_k (X \in \mathcal{J}_{k,s} \& \|X\| \leq 1 \supset k \leq q \& \|X - Y_k\| < \frac{1}{p})$.

Согласно лемме 1 линейный функционал f является равномерно непрерывным в пространстве $\mathcal{J}$. Теперь аналогично доказательству теоремы, что всякая равномерно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ конструктивная функция имеет точную верхнюю границу [2]стр.435 , нетрудно доказать утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{J}$ E -пространство, n и s НЧ, $n \leq s$, а X элемент подпространства $\mathcal{J}_{n,s}$, $\|X\| > 0$. Тогда не может не существовать линейный функционал f в пространстве $\mathcal{J}$ такой, что

1) КДЧ 1 является нормой функционала f относительно подпространства $\mathcal{J}_{n,s}$;

2) $f(X) = \|X\|$;

3) $\forall_k (k < n \vee k > s \supset f(E_k) = 0)$.

Доказательство. Положим $p \rightleftharpoons s - n + 1$. Лемму докажем индукцией по p . Пусть сначала $p = 1$, т.е. $n = s$. Тогда $X = \beta(n * X) \cdot E_n$ и, следовательно, $\beta(n * X) \neq 0$. Так как имеет место $\forall_u (u \neq 0 \supset u < 0 \vee u > 0)$, то положим $v \leftrightharpoons 1$, если $\beta(\varkappa * X) > 0$, и $v \leftrightharpoons -1$, если $\beta(\varkappa * X) < 0$. Для всякого элемента Y пространства $\mathcal{T}$ положим $f(Y) \leftrightharpoons \beta(\varkappa * Y) \cdot v$. Ясно, что f является требуемым функционалом.

Пусть p НЧ и пусть утверждение верно для всех НЧ k, $k \leq p$. Докажем, что тогда утверждение верно и для НЧ $p+1$.

Ввиду того, что $\| X \| > 0$, существует НЧ ℓ такое, что $\varkappa \leq \ell \leq s$ и $\beta(\ell * X) \neq 0$. Не теряя общности допустим, что $\ell = \varkappa$. Обозначим $Y_\varkappa \leftrightharpoons \frac{1}{\|X\|} \cdot X$, и для всякого НЧ k $Y_k \leftrightharpoons E_k$, если $k \neq \varkappa$. Очевидно существует алгорифм β_1 такой, что последовательность $\{Y_k\}_k$ вместе с алгорифмом β_1 является базисом пространства $\mathcal{T}$, причем подпространства $\{Y_\varkappa, \dots \dots, Y_s\}$ и $\{E_\varkappa, \dots \dots, E_s\}$ совпадают.

По индукционному предположению не может не существовать линейный функционал g в пространстве $\mathcal{T}$ такой, что

а) КДЧ 1 является нормой функционала g относительно подпространства $\mathcal{T}_0 \leftrightharpoons \{Y_\varkappa, \dots \dots, Y_{s-1}\}$;

б) $g(X) = \| X \|$;

в) $\forall_k (k < \varkappa \vee k > s-1 \supset g(E_k) = g(Y_k) = 0)$.

Допустим, что g линейный функционал обладающий свойствами а) – в). Тогда для всяких элементов Y, Z подпространства $\mathcal{T}_0$ выполнено

$$g(Y) - g(Z) = g(Y-Z) \leq \|Y-Z\| \leq \|Y+E_s\| + \|E_s+Z\|$$

и, следовательно,

(3) $\quad -\|Z+E_b\|-g(Z)\leq\|Y+E_b\|-g(Y)$.

Заметим, что левая часть этого неравенства не зависит от Y и правая часть от Z. Допустим, что выполнено

$$\neg\exists u\,\forall_Y(Y\in\pi_0\supset -\|Y+E_b\|-g(Y)\leq u\,\&$$
$$\&\, u\leq\|Y+E_b\|-g(Y))\,.$$

Нетрудно проверить, что отсюда следует

$$\neg\exists_u\forall_Y\neg\neg(Y\in\pi_0\supset -\|Y+E_b\|-g(Y)\leq u\,\&$$
$$\&\, u\leq\|Y+E_b\|-g(Y))$$

и, следовательно, $\forall_u\neg\neg\exists_Y(Y\in\pi_0\,\&\,(-\|Y+E_b\|-g(Y)> > u\vee u>\|Y+E_b\|-g(Y)))$. Тогда ввиду сепарабельности подпространства π_0 , равномерной непрерывности функционала g и нормы, и существования алгорифма $\mathcal{C}$,применимого к паре КДЧ u ✱ v тогда и только тогда, когда $u<v$, можно на основании принципа А.А. Маркова двойное отрицание снять и, следовательно, $\forall_u\exists_Y(Y\in\pi_0\,\&\,(-\|Y+E_b\|-g(Y)> > u\vee u>\|Y+E_b\|-g(Y)))$. Таким образом, существует алгорифм $\mathfrak{A}$ применимый к всякому КДЧ u и выдающий по нем НЧ 0 или 1, и такой, что для всякого КДЧ u если $\mathfrak{A}(u)\simeq 0$, то $\exists_Y(Y\in\pi_0\,\&-\|Y+E_b\|-g(Y)>u)$, и если $\mathfrak{A}(u)\simeq 1$, то $\exists_Y(Y\in\pi_0\,\&\,\|Y+E_b\|-g(Y)<u)$. Из (3) следует $\forall_{uv}(u=v\supset\mathfrak{A}(u)\simeq\mathfrak{A}(v))$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ является алгорифмическим оператором из пространства КДЧ в пространство КДЧ. Если теперь подставим в

(3) $Z = \mathcal{O}$, то получаем $\forall_Y (Y \in \Pi_0 \supset \| Y + E_s \| - g(Y) \geq -1)$, и если $Y = \mathcal{O}$, то получаем $\forall_Y (Y \in \Pi_0 \supset -\| Y + E_s \| - g(Y) \leq$ $\leq 1)$. Отсюда следует

$$\forall_u ((u < -1 \supset \mathfrak{A}(u) \equiv 0) \& (u > 1 \supset \mathfrak{A}(u) \equiv 1)) .$$

По теореме Цейтина [2] $\mathfrak{A}$ является непрерывным оператором. Но так как алгорифм $\mathfrak{A}$ принимает в точности два значения 0 и 1, то это невозможно. Следовательно, не может не существовать КДЧ u такое, что

(4) $$\forall_Y (Y \in \Pi_0 \supset -\| Y + E_s \| - g(Y) \leq u \& u \leq \| Y + E_s \| - g(Y)) .$$

Пусть u КДЧ обладающее свойством (4). (Заметим, что $E_s = Y_s$.) Для всякого элемента Z пространства Π положим

$$f(Z) \rightleftharpoons g\left(\sum_{j=r}^{s-1} \beta_1(j * Z) \cdot Y_j\right) + \beta_1(s * Z) \cdot u .$$

Нетрудно проверить, что f является линейным функционалом в пространстве Π, для которого выполнено

$$f(X) = g(X) = \| X \| \quad \text{и} \quad \forall_k (k < r \vee k > s \supset f(E_k) = 0) .$$

Из (4) следует $\forall_Y (Y \in \Pi_{r,s} \supset |f(Y)| \leq \| Y \|)$.

Таким образом, линейный функционал f удовлетворяет всем требуемым условиям.

Но ввиду того, что не могут не существовать линейный функционал g и КДЧ u такие, что выполнено а) – в) и (4), то не может не существовать линейный функционал f с требуемыми свойствами.

Замечание. Пример в конце статьи показывает, что утверждение леммы 5 нельзя усилить.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство, n и s НЧ, $n \leq s$, а X элемент подпространства $\mathcal{T}_{n,s}$, $\|X\| > 0$. Тогда существует линейный функционал f в пространстве $\mathcal{T}$ такой, что выполнено

1) $|f(X)| > \frac{1}{2} \cdot \|X\|$;

2) $\forall_Y (Y \in \mathcal{T}_{n,s} \supset |f(Y)| \leq 2 \cdot \|Y\|)$;

3) $\forall_k (k < n \vee k > s \supset f(E_k) = 0)$.

На основании принципа А.А. Маркова утверждение легко следует из предшествующей леммы.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство. Тогда существует КДЧ $M > 0$ такое, что для любых НЧ n и s, $n \leq s$, и $X \in \mathcal{T}_{n,s}$, $\|X\| > 0$ существует линейный функционал f в пространстве $\mathcal{T}$ такой, что

1) $|f(X)| > \frac{1}{2} \cdot \|X\|$;

2) $\forall_k (k < n \vee k > s \supset f(E_k) = 0)$;

3) $\forall_Y (Y \in \mathcal{T} \supset |f(Y)| \leq M \cdot \|Y\|)$.

Доказательство. Согласно лемме 3 существует КДЧ $K > 0$ такое, что $\forall_k \forall_X (X \in \mathcal{T} \supset \|U_k(X)\| \leq K \cdot \|X\|)$. Обозначим $M \leftrightharpoons 4 \cdot K$ и покажем, что M обладает требуемым свойством. Итак, пусть n и s НЧ, $n \leq s$, $X \in \mathcal{T}_{n,s}$ и $\|X\| > 0$. По лемме 6 существует линейный функционал f в пространстве $\mathcal{T}$, который обладает свойствами 1) и 2), причем выполнено $\forall_Y (Y \in \mathcal{T}_{n,s} \supset |f(Y)| \leq 2 \cdot \|Y\|)$. Таким образом, достаточно пока-

зать, что выполнено $\forall_Y (Y \in \mathcal{T} \supset |f(Y)| \leq M \cdot \|Y\|)$.
Пусть $Y \in \mathcal{T}$ и обозначим $Y_0 \leftrightharpoons \sum_{i=k}^{s} \beta(i * Y) \cdot E_i$.
Тогда $Y_0 \in \mathcal{T}_{k,s}$ и $f(Y) = f(Y_0)$ и, следовательно, $|f(Y)| \leq 2 \cdot \|Y_0\|$. Но по лемме 3 имеем

$$\|Y_0\| = \left\|\sum_{i=1}^{s} \beta(i * Y) \cdot E_i - \sum_{i=1}^{k-1} \beta(i * Y) \cdot E_i\right\| \leq 2 \cdot K \cdot \|Y\| .$$

Сложив теперь обе оценки, получаем $|f(Y)| \leq 4 \cdot K \cdot \|Y\|$, что и требовалось доказать.

Определение. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство. Будем говорить, что последовательность $\{X_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$ обладает свойством (Д), если существуют возрастающие последовательности НЧ $\{q_k\}_k$ и $\{t_k\}_k$ такие, что выполнено

(5) $\forall_k \forall_\ell (\ell \geq t_k \supset \beta(\ell * X_k) = 0)$;

(6) $\forall_k \forall_\ell \forall_p (p \leq k \,\&\, \ell \geq q_k \supset \beta(p * X_\ell) = 0)$.

Лемма 8. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство, $\{Z_k\}_k$ последовательность элементов пространства $\mathcal{T}$ такая, что выполнено $Z_k \xrightarrow{w} \sigma$. Тогда существует последовательность $\{X_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$, для которой выполнено

1) $X_k \xrightarrow{w} \sigma$;

2) $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \|Z_k - X_k\| < \frac{1}{p})$;

3) последовательность $\{X_k\}_k$ обладает свойством (Д).

Доказательство. Для всякого $X \in \mathcal{T}$ выполнено $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \|V_k(X)\| < \frac{1}{p})$ и, следовательно, можно построить последовательность $\{W_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$ и возрастающую последовательность НЧ $\{t_k\}_k$ такие, что выполнено

а) $\forall_k \forall_\ell (\ell \geq t_k \supset \beta(\ell * W_k) = 0)$;

б) $\forall_k (\| Z_k - W_k \| < \frac{1}{k})$.

Очевидно, что $W_k \xrightarrow{w} \sigma$ и, следовательно, для всякого НЧ p выполнено $\forall_k \exists_q \forall_\ell (\ell \geq q \supset |\beta(p * W_\ell)| < \frac{1}{k})$. Ввиду этого существует возрастающая последовательность НЧ $\{q_k\}_k$ такая, что выполнено

$$\forall_k \forall_\ell \forall_p (p \leq k \,\&\, \ell \geq q_k \supset |\beta(p * W_\ell)| < \frac{1}{k^2}) .$$

Пусть теперь ℓ НЧ. Возможны два случая

а) $\ell < q_1$ и тогда обозначим $X_\ell \leftrightharpoons W_\ell$;

б) существует НЧ k такое, что $q_k \leq \ell < q_{k+1}$ и тогда обозначим $X_\ell \leftrightharpoons W_\ell - \sum_{j=1}^{k} \beta(j * W_\ell) \cdot E_j$.

Таким образом, построена последовательность $\{X_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$, которая очевидно обладает свойством (Д). Пусть теперь p НЧ. Тогда для всякого НЧ k , $k \geq q_p$ существует НЧ ℓ такое, что $\ell \geq p$ и $q_\ell \leq k < q_{\ell+1}$. Следовательно,

$$\| X_k - W_k \| = \| \sum_{j=1}^{\ell} \beta(j * W_k) \cdot E_j \| < \ell \cdot \frac{1}{\ell^2} = \frac{1}{\ell} < \frac{1}{p} .$$

Таким образом, доказано $\forall_p \forall_k (k \geq q_p \supset \| X_k - W_k \| < \frac{1}{p})$, и так как выполнено $\forall_k (\| Z_k - W_k \| < \frac{1}{k})$, то имеет место 2).

Свойство 1) является непосредственным следствием 2).

Лемма 9. Пусть $\mathcal{T}$ $\dot{E}$ -пространство, $\{X_k\}_k$ последовательность элементов пространства $\mathcal{T}$, а $\{q_k\}_k$ и $\{t_k\}_k$ возрастающие последовательности НЧ, для которых выполнено (5) и (6). Тогда существуют КДЧ $M > 0$ и последовательность $\{f_k\}_k$ линейных функционалов в пространстве $\mathcal{T}$ такие, что для любого НЧ k выполнено

1) $\forall_X (X \in \mathcal{T} \supset |f_k(X)| \leq M \cdot \|X\|)$;

2) $|f_k(X_k)| > \frac{1}{2} \cdot \|X_k\| \vee \|X_k\| < \frac{1}{k}$;

3) а) если $k < q_1$, то $\forall_\ell (\ell \geq t_k \supset f_k(E_\ell) = 0)$;

б) если $k \geq q_1$, то $\forall_\ell (\ell \geq t_k \vee \ell \leq m \supset f_k(E_\ell) = 0)$,

где m НЧ однозначно определенное условием $q_m \leq k < q_{m+1}$.

Доказательство. Ясно, что существует алгорифм $\mathfrak{U}$ применимый к всякому НЧ k и выдающий по нем НЧ 0 или 1 причем, если $\mathfrak{U}(k) \simeq 0$, то $\|X_k\| < \frac{1}{k}$ и если $\mathfrak{U}(k) \simeq 1$, то $\|X_k\| > \frac{1}{k+1}$. Пусть M_1 КДЧ, существование которого утверждает лемма 7.

Пусть k НЧ. Если $\mathfrak{U}(k) \simeq 0$, то положим f_k равно нулевому функционалу в пространстве $\mathcal{T}$, т.е. $\forall_X (X \in \mathcal{T} \supset f_k(X) = 0)$. Если $\mathfrak{U}(k) \simeq 1$, то возможны два случая

а) $k < q_1$. Тогда $X_k = \sum_{j=1}^{t_k - 1} \beta(j * X_k) \cdot E_j$. (Заметим, что $t_k - 1 \geq 1$, так как $\| X_k \| > \frac{1}{k+1}$.) Согласно лемме 7 существует линейный функционал f_k в пространстве $\mathcal{T}$ удовлетворяющий условиям 1) – 3); б) $k \geq q_1$. Тогда существует однозначно определенное НЧ m такое, что $q_m \leq k < q_{m+1}$ и, следовательно, $X_k = \sum_{j=m+1}^{t_k-1} \beta(j * X_k) \cdot E_j$. (Ясно, что $t_k - 1 \geq m + 1$, так как $\| X_k \| > \frac{1}{k+1}$.) Если применить лемму 7, получаем опять требуемый функционал f_k .

Лемма 10. Пусть $\mathcal{T}$ E -пространство, $\{ X_k \}_k$ последовательность элементов пространства $\mathcal{T}$ обладающая свойством (Д), и пусть выполнено $X_k \xrightarrow{w} \mathcal{O}$. Тогда последовательность $\{ X_k \}_k$ сходится по норме к $\mathcal{O}$, т.е. $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X_k \| < \frac{1}{p})$.

Доказательство. Последовательность $\{ X_k \}_k$ обладает свойством (Д), и, по определению, существуют возрастающие последовательности $\{ q_k \}_k$ и $\{ t_k \}_k$ НЧ удовлетворяющие условиям (5) и (6). Таким образом, согласно предшествующей лемме, существуют КДЧ $M > 0$ и последовательность $\{ f_k \}_k$ линейных функционалов в пространстве $\mathcal{T}$ с приведенными свойствами.

Аналогично доказательству леммы 2 построим полное сепарабельное метрическое пространство τ , элементы которого пары $u * X$, где u КДЧ и $X \in \mathcal{T}$, и алгорифм $\mathcal{L}$, который для всяких $X \in \mathcal{T}$, НЧ k и рационального числа a применим к паре $a * X$ и выдает по ней КДЧ, причем выполнено $\mathscr{L}(\frac{1}{k} * X) = f_k(X)$ и $\mathscr{L}(0 * X) = 0$ и пункты б) и в) упомянутого доказательства.

Докажем, что для всякого $X \in \mathscr{T}$ выполнено

(7) $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |f_k(X)| < \frac{1}{p})$.

Пусть $X \in \mathscr{T}$ и p НЧ. Тогда существует НЧ m такое, что $\forall_\ell (\ell \geq m \supset \| V_\ell(X) \| < \frac{1}{M \cdot p})$. Если теперь k НЧ, $k \geq q_m$, то существует НЧ ℓ такое, что $\ell \geq m$ и $q_{\ell+1} > k \geq q_\ell$. Следовательно,

$$|f_k(X)| = |f_k(V_\ell(X))| \leq M \cdot \| V_\ell(X) \| < \frac{1}{p} .$$

Таким образом, (7) доказано.

Теперь аналогично доказательству леммы 2 можно построить алгорифмический оператор $\mathscr{U}$ из пространства $\mathscr{T}$ в пространство КДЧ такой, что для любых $X \in \mathscr{T}$ и рационального числа a выполнено $\mathscr{U}(a * X) = \mathscr{L}(a * X)$. Для всякого КДЧ u алгорифм $\widetilde{\mathscr{U}}_{u *}$ является линейным функционалом в пространстве $\mathscr{T}$. (Это очевидно, когда $u = \frac{1}{k}$, где k НЧ; затем это легко проверяется для рациональных чисел и наконец для любого КДЧ.)

Для всяких КДЧ u и НЧ k положим $\varphi(k * u) \leftrightharpoons \mathscr{U}(u * X_k)$. Так как $X \xrightarrow{w} \mathcal{O}$, то ввиду свойств алгорифма $\mathscr{U}$ получаем, что алгорифм φ удовлетворяет предположениям леммы 2 и, следовательно,

$$\forall_p \exists_q \forall_k \forall_u (k \geq q \,\&\, |u| \leq \frac{1}{q} \supset |\varphi(k * u)| \leq \frac{1}{2p}).$$

Но для всякого НЧ k имеем $\varphi(k * \frac{1}{k}) = \mathscr{U}(\frac{1}{k} * X_k) =$

$= \mathscr{L}(\frac{1}{k} * X_k) = f_k(X_k)$ и, следовательно,

$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |f_k(X_k)| \leq \frac{1}{2p})$.

Согласно лемме 9 имеем $\forall_k (|f_k(X_k)| > \frac{1}{2} \| X_k \| \vee$

$\vee \| X_k \| < \frac{1}{k})$, и, таким образом,

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X_k \| < \frac{1}{p}) .$$

Теорема. Пусть $\mathcal{T}$ E-пространство, $\{X_k\}_k$ последовательность элементов пространства $\mathcal{T}$, X элемент пространства $\mathcal{T}$ и пусть выполнено $X_k \xrightarrow{w} X$. Тогда имеет место

$$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X_k - X \| < \frac{1}{p}) .$$

Доказательство. Очевидно достаточно ограничиться случаем $X = \mathcal{O}$. Согласно лемме 8 существует последовательность $\{Z_k\}_k$ элементов пространства $\mathcal{T}$ обладающая свойством (Д), причем выполнено $Z_k \xrightarrow{w} \mathcal{O}$ и $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| Z_k - X_k \| < \frac{1}{p})$.

Но согласно предшествующей лемме имеет место

$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| Z_k \| < \frac{1}{p})$ и, следовательно, выполнено $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset \| X_k \| < \frac{1}{p})$. Теорема доказана.

Пример. Можно построить E-пространство ℓ_1 , для которого имеют место следующие утверждения.

1) Неверно, что для всякого элемента X подпространства $(\ell_1)_{1,2}$, для которого $\| X \| >. 0$ существует линейный функционал f в пространстве ℓ_1 такой,

что КДЧ 1 является нормой функционала f относительно подпространства $(\ell_1)_{1,2}$ и $f(X) = \| X \|$.

2) Существуют линейные функционалы f_1 и f_2 в пространстве ℓ_1 такие, что КДЧ 1 является нормой обоих функционалов, но что не существует КДЧ x являющееся нормой функционала $f_1 + f_2$.

3) Слабая сходимость в пространстве ℓ_1 совпадает с сходимостью по норме (аналогично классической математике).

Доказательство. Построим теперь конструктивный аналог классического пространства ℓ_1. Пусть $\mathcal{A}$ множество пар записей алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таких, что алгорифм $\mathfrak{A}$ последовательность КДЧ и алгорифм $\mathfrak{B}$ регулятор сходимости последовательности $\{\sum_{j=1}^{k} |\mathfrak{A}(j)|\}_k$. Аналогично классической математике (естественным образом через координаты) теперь можно определить метрическую функцию в множестве $\mathcal{A}$, операции сложения элементов множества $\mathcal{A}$ и умножения элементов множества $\mathcal{A}$ на КДЧ, а нулевой элемент $\mathcal{O}$ множества $\mathcal{A}$ такие, что эта система образует конструктивное полное сепарабельное линейное нормированное пространство, которое обозначим посредством ℓ_1. Ясно, что для всякого НЧ k существуют алгорифмы $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ и слово E_k такие, что выполнено

$$\forall_{k,\ell} (!\mathfrak{A}_k(\ell) \& \mathfrak{A}_k(k) = 1 \& (\ell \neq k \supset \mathfrak{A}_k(\ell) = 0) \& \\ \& \mathfrak{B}_k(\ell) \simeq k + 1)$$

и E_k является парой записей алгорифмов $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$. Тогда E_k элемент пространства ℓ_1 с нормой 1. Очевидно существует алгорифм β, который вместе с последовательностью $\{E_k\}_k$ элементов пространства ℓ_1 образует базис этого пространства. Таким образом, ℓ_1 является E -пространством. Следовательно, всякий линейный функционал в пространстве ℓ_1 является ограниченным. Как известно, КДЧ x является нормой линейного функционала f в пространстве ℓ_1 тогда и только тогда, когда x является точной верхней границей последовательности $\{|f(E_k)|\}_k$.

Сначала докажем 2). Согласно [2] стр.430 существует последовательность КДЧ $\{v_k\}_k$ такая, что $\forall_k (0 \le v_k \le 1)$ и что не существует КДЧ x являющееся точной верхней границей этой последовательности. Пусть f_1 и f_2 линейные функционалы в пространстве ℓ_1 такие, что

$$f_1(E_1) = 1 \& f_2(E_1) = -1 \& \forall_k (k > 1 \supset f_1(E_k) = v_k \& f_2(E_k) = 0).$$

Ясно, что f_1 и f_2 являются требуемыми функционалами, и 2) доказано.

Допустим теперь, что для всякого $X \in (\ell_1)_{1,2}$, $\|X\| > 0$ существует линейный функционал f в пространстве ℓ_1 с нормой 1 и такой, что $f(X) = \|X\|$. Пусть u КДЧ. Обозначим $X \leftrightharpoons E_1 + u \cdot E_2$. Тогда выполнено $X \in (\ell_1)_{1,2} \& \|X\| \ge 1$. Следовательно, существует линейный функционал f в пространстве ℓ_1 с нормой 1, для которого $f(X) = \|X\| = 1 + |u|$.

Ввиду этого выполнено $(u > 0 \supset f(E_2) = 1) \& (u < 0 \supset$
$\supset f(E_2) = -1)$ и, следовательно,
$(f(E_2) > 0 \supset u \geq 0) \& (f(E_2) < 1 \supset u \leq 0)$.
Легко видеть, что отсюда следует $\forall_u (u \leq 0 \vee u \geq 0)$.
Но согласно [2] стр.366 это невозможно и 1) доказано.

Остается доказать 3). Пусть $\{X_k\}_k$ последовательность элементов пространства ℓ_1 такая, что $X \xrightarrow{c} \sigma$, а f линейный функционал в пространстве ℓ_1. Согласно теореме Цейтина [2] существует КДЧ $K \geq 0$ такое, что $\forall_X (X \in \ell_1 \supset |f(X)| \leq K \cdot \|X\|)$.
Обозначим $g(X) \leftrightharpoons f(X) + (K - f(E_1)) \cdot \beta(1 * X)$.
Тогда g является линейным функционалом в пространстве ℓ_1 и КДЧ K является его нормой. Следовательно,
$\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |g(X_k)| < \frac{1}{p})$. Но КДЧ 1 является нормой линейного функционала $\widetilde{\beta}_{1*}$ и, следовательно,
выполнено тоже $\forall_p \exists_q \forall_k (k \geq q \supset |f(X_k)| < \frac{1}{p})$.
Таким образом, доказано $X \xrightarrow{w} \sigma$ и применив теперь предшествующую теорему, получаем требуемое утверждение.

<u>Замечание</u>. Слабая сходимость и w-сходимость в E-пространствах в общем случае не совпадают. Можно доказать, что если $\mathcal{H}$ полное Гильбертово пространство, последовательность $\{E_k\}_k$ и алгорифм β ортонормальный базис этого пространства (и, следовательно, $\forall_k (\|E_k\| = 1)$), то выполнено $E_k \xrightarrow{c} \sigma$.

Литература

[1] А.А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им. В.А.Стеклова, XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике 2 (сборник работ), Труды Мат.инст. им.В.А.Стеклова LXVII (1962).

Matematicko-fyzikální fakulta
Karlova Universita
Sokolovská 83, Praha Karlín
Československo

(Oblatum 19.1.1970)