Jiří Novák

Über gewisse minimale Systeme von k-Tupeln

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 3, 397--402

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105287

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

11,3 (1970)

UEBER GEWISSE MINIMALE SYSTEME VON k-TUPELN

Jiří NOVÁK, Liberec

Es sei $E = \{1, 2, \dots, m\}$ eine Menge von m verschiedenen Elementen und k, r natürliche Zahlen, wobei $m > k > r$ ist. Wir bilden die Menge T aller k-Untermengen von E. Die Elemente von T nennen wir k-Tupel. Mit $K(m, k, r)$ bezeichnen wir ein System von k-Tupeln mit folgenden Eigenschaften: 1) Beliebige zwei k-Tupel des Systems haben höchstens r gemeinsame Elemente, 2) beliebige k-Untermenge von E muss mit irgend einem k-Tupel des Systems mindestens $r + 1$ gemeinsame Elemente besitzen.

Es entsteht die Frage nach der maximalen und minimalen Anzahl von k-Tupeln in $K(m, k, r)$ und das Problem der Konstruktion solcher extremalen Systeme. In der vorliegenden Arbeit gebe ich einige Ergebnisse über die minimalen Systeme $K(m, k, 1)$ an, während die Arbeit [1] die $K(m, k, r)$ allgemein behandelt.

Es sei $m = (k-1) \cdot t + s$, $(0 \leq s < k-1)$. Mit $M(m, k)$ bezeichnen wir nach Turán [2] die ganze Zahl $(k-2) \cdot (m^2 - s^2)/2(k-1) + \binom{s}{2}$, $k > 2$. Dann gilt folgender

<u>Satz 1.</u> Wenn q die Anzahl von k-Tupeln in

$K(n,k,1)$ bezeichnet, dann gilt folgende Abschätzung:

$$(1) \qquad q \geq \frac{\binom{n}{2} - M(n,k)}{\binom{k}{2}} = d(n,k), \quad k > 2 \quad .$$

<u>Beweis.</u> Zu jedem $K(n,k,1)$ ordnen wir einen Graphen $G(n,k)$ mit n Knotenpunkten und $q \cdot \binom{k}{2}$ Kanten zu. Den Elementen $1, 2, \ldots, n$ entsprechen die Knotenpunkte und denjenigen Paaren von Elementen, die sich in den k-Tupeln des Systems befinden, entsprechen die Kanten des Graphen, welcher keine Schlingen und Mehrfachkanten enthält, da jedes Paar von Elementen höchstens einmal in den k-Tupeln des Systems vorkommt. Jedem k-Tupel des Systems entspricht im Graphen $G(n,k)$ ein vollständiger Untergraph mit k Knotenpunkten und $\binom{k}{2}$ Kanten. Mit $\overline{G}(n,k)$ bezeichnen wir den Komplementargraphen zu $G(n,k)$. Der Komplementargraph $\overline{G}(n,k)$ kann kein vollständiges k-Eck enthalten. Wäre es denn so, dann könnte man das entsprechende k-Tupel zu $K(n,k,1)$ anfügen, was der Definition von $K(n,k,1)$ widerspricht. Wenn der Graph $\overline{G}(n,k)$ die möglichst grösste Anzahl von Kanten enthält, dann enthält der Graph $G(n,k)$ die minimale Anzahl von Kanten und infolgedessen das System $K(n,k,1)$ die minimale Anzahl von k-Tupeln. Der gesuchte extremale Graph $\overline{G}(n,k)$ ist eindeutig durch Turán's Theorem [2] bestimmt. Wir bezeichnen ihn mit $\overline{G}_1(n,k)$ und bekommen ihn folgendermassen: Die Menge von n Knotenpunkten zerlegen wir in $(k-1)$ disjunkte Klassen, wobei sich die Anzahlen der Elemente

in einzelnen Klassen höchstens um eins unterscheiden. Die Kanten des Graphen $\overline{G}_1(n, k)$ verbinden je zwei Knotenpunkte, die verschiedenen Klassen angehören und ihre Anzahl ist gleich $M(n, k)$. Für die minimale Anzahl der Kanten in $G(n, k)$ bekommen wir so $\binom{n}{2} - M(n, k)$ und für die Anzahl von k-Tupeln erhalten wir die Abschätzung (1).

Im Weiteren werden wir den Begriff des taktischen Systems $S(p, k, n)$ benützen. Es seien $0 < p < k < n$ natürliche Zahlen und $E = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Menge von n Elementen. Ein System von k-Untermengen von E heisst ein taktisches System $S(p, k, n)$ wenn beliebige p-Untermenge von E genau in einer k-Untermenge des Systems vorkommt. Es ist klar, dass jedes taktische System ein maximales $K(n, k, p-1)$ ist, da beliebige zwei k-Tupel höchstens $p-1$ Elemente gemeinsam haben und auch die zweite Bedingung ist da erfüllt.

Nun können wir den folgenden Satz beweisen:

<u>Satz 2</u>. Die minimalen Systeme $K(n, k, 1)$ mit genau $d(n, k)$ k-Tupeln existieren dann und nur dann, wenn n durch $k-1$ teilbar ist, und wenn es für $n_1 = n/(k-1)$ ein taktisches System $S(2, k, n_1)$ gibt. Es wird $k > 2$ vorausgesetzt.

<u>Beweis</u>. Vorausgesetzt, dass $K(n, k, 1)$ $d(n, k)$ k-Tupel enthält. Der zugeordnete Graph $G(n, k)$ besitzt $\binom{k}{2} \cdot d(n, k)$ Kanten und der komplementare Graph

$\overline{G}(n, k)$ genau $M(n, k)$ Kanten, wie aus (1) hervorgeht. Nach Turán's Theorem gibt es nur einen einzigen Graphen von Ordnung n mit $M(n, k)$ Kanten ohne vollständige k-Ecke. Es ist der früher beschriebene Graph $\overline{G}_1(n, k)$. In unserem Falle haben wir also $\overline{G}(n, k) = \overline{G}_1(n, k)$. Die Menge von Knotenpunkten im Graphen $G_1(n, k)$, der zu $\overline{G}_1(n, k)$ komplementar ist, ist daher in $k-1$ disjunkte Mengen zerlegt worden. Alle Kanten des Graphen $G_1(n, k)$ müssen daher nur je zwei Knotenpunkte in derselben Klasse verbinden. Der Graph $G_1(n, k)$ besteht daher aus $k-1$ vollständigen Untergraphen, von den jeder durch vollständige Untergraphen von Ordnung k gebildet wird. Diese letzten Untergraphen entsprechen den einzelnen k-Tupeln des Systems $K(n, k, 1)$. Hieraus folgt, dass diese k-Tupel ein taktisches System $S(2, k, n_i)$ bilden, wo $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Jedem von $k-1$ Untergraphen entspricht so ein taktisches System $S(2, k, n_i)$. Wir wissen, dass $0 \leq |n_i - n_j| \leq 1$ sein muss. Es ist aber unmöglich, dass zwei taktische Systeme $S(2, k, n_i)$ und $S(2, k, n_j)$ so existieren, dass $n_j = n_i + 1$. Vorausgesetzt, dass solche zwei Systeme existieren. Eine notwendige Bedingung für die Existenz des $S(2, k, n_i)$ ist, dass $(n_i - 1)/(k-1)$ ganzzahlig sein muss, wie wir in [3] finden. Es ist aber

$$(n_j-1)/(k-1) = n_i/(k-1) = (n_i - 1 + 1)/k-1) = (n_i-1)/(k-1) + 1/(k-1)$$

was für $k \geq 3$ ein Bruch ist. Hieraus folgt, dass für $i \neq j$

$n_i = n_j = n_1 = n/(k-1)$.

Wenn die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, dann können wir $k-1$ taktische Systeme $S_i(2, k, n_1)$ konstruieren, und zwar aus den Elementen $(i-1)n_1 + 1$, $(i-1)n_1 + 2, \dots, (i-1)n_1 + n_1$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Diese taktischen Systeme bilden ein $K(n, k, 1)$, da wir kein weiteres k-Tupel anfügen können, wie wir leicht einsehen. Wenn wir die zugehörigen Graphen $G(n, k)$ und $\overline{G}(n, k)$ betrachten, so sehen wir leicht, dass $\overline{G}(n, k)$ mit $\overline{G}_1(n, k)$ zusammenfällt. Das auf diese Weise konstruierte System $K(n, k, 1)$ enthält demnach $d(n, k)$ k-Tupel.

<u>Folgerung</u>. Da die taktischen Systeme $S(2, k, n)$ für $k = 3, 4, 5$ nach [3] bekannt sind, können wir für diese Werte von k die minimalen Systeme $K(n, k, 1)$ mit $d(n, k)$ k-Tupeln konstruieren.

L i t e r a t u r

[1] J. NOVÁK: Beitrag zur Theorie der Kombinationen, Čas.pro pěst.mat.88(1963),129-141(tschechisch).

[2] P. TURÁN: On the theory of graphs, Colloquium Math. 3(1955),19-30.

[3] H. HANANI: The existence and construction of balanced block designs, Ann.Math.Statistics,32 (1961),361-386.

Vysoká škola strojní a
textilní
Hálkova 6, Liberec I
Czechoslovakia

(Oblatum 5.12.1969)