Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

N. G. Perlova

Скользящие бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 15 (1974), No. 3, 407--414

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105567

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

15,3 (1974)

СКОЛЬЗЯЩИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.Г. ПЕРЛОВА, Ростов-на-Дону

Аннотация: Устанавливается существование на выпуклой поверхности вращения S класса C^2 счетного множества пар параллелей $(u_k, \tilde{u}_k)$ таких, что пояс поверхности S, заключенной между u_k и $\tilde{u}_k$, допускает бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков, при которых параллели u_k и $\tilde{u}_k$ остаются плоскими кривыми.

Ключевые слова: поверхность вращения, изгибания, плоская кривая.

AMS: 53A05 Ref. Ž.: 3.934.14

Известно [1], что на замкнутой поверхности вращения S положительной гауссовой кривизны существует счетное множество параллелей u_k таких, что каждый сегмент S_k, ограниченный параллелью u_k и неоднозначно проектирующийся на плоскость граничной параллели, допускает бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков, при которых параллель u_k остается плоской кривой (так называемые скользящие бесконечно малые изгибания).

В настоящей заметке доказывается существование на поверхности S счетного множества над параллелей $(u_k, \tilde{u}_k)$ таких, что заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$ пояс допускает скользящие бесконечно малые изгибания 1-го и 2-го порядков. Для доказательства используется метод С. Кон-Фоссена [2].

Рассмотрим поверхность вращения $S: \bar{r} = u\bar{e} + \varkappa(u)\bar{a}(v)$, отнесенную к подвижному реперу $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$ [2]. Пусть $\varkappa(u) = \sqrt{u(a-u)}\,R(u)$, $u \in [0,a]$, $R(u) \in C^2[0,a]$, $R(u) > 0$, $\varkappa''(u) < 0$ при $u \in (0,a)$. При этих условиях гауссова кривизна поверхности положительна

Методом С. Кон-Фоссена [2] отыскание бесконечно малых изгибаний 1-го порядка поверхности S сводится к решению уравнения

$$\varkappa(u)\chi''_k(u) + (k^2-1)\varkappa''(u)\chi_k(u) = 0 \tag{1}$$

при $k \geq 2$. Через функцию $\chi_k(u)$ без квадратур выражаются функции

$$\left\{\begin{array}{l} ik\varphi_k(u) = -\varkappa'(k^2-1)\chi_k - \varkappa\chi'_k \;; \\ \psi_k(u) = -ik\chi_k \;, \end{array}\right. \tag{2}$$

которые вместе с χ_k определяют изгибающее поле $\bar{z}_k$ 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\bar{z}_k(u,v) = (\varphi_k e^{ikv} + \bar{\varphi}_k e^{-ikv})\bar{e} \; + \\ + (\psi_k e^{ikv} + \bar{\psi}_k e^{-ikv})\bar{a}(v) + \\ + (\chi_k e^{ikv} + \bar{\chi}_k e^{-ikv})\bar{a}'(v)\;.\end{aligned}$$

Известно [2], что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$\chi^+_k(u) = u^{\frac{1+k}{2}}(a-u)^{\frac{1-k}{2}}X^+_k(u)\;,$$

$$\chi_k^-(u) = u^{\frac{1-k}{2}}(a-u)^{\frac{1+k}{2}} X_k^-(u) \quad ,$$

где $X_k^{\pm}(u) \in C^2[0,a]$. В силу условия $\frac{\varkappa''}{\varkappa} < 0$ из (1) следует:

$$\frac{\chi_k''}{\chi_k} > 0$$

на $(0,a)$, а потому функции $\chi_k^{\pm}(u)$ не имеют положительных максимумов и отрицательных минимумов в интервале $(0,a)$. Так как решение уравнения (1) определяется с точностью до постоянного множителя, то можно считать функции $\chi_k^{\pm}(u)$ положительными. По той же причине можно считать, что графики функций $\chi_k^+(u)$ и $\chi_k^-(u)$ (см. Рис. 1) пересекаются в точке $u = u_{экв}$, соответствующей экватору поверхности.

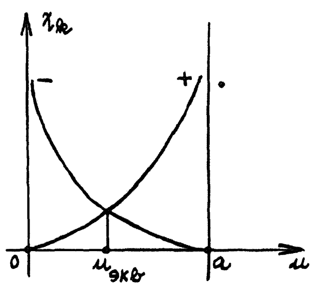

Рис.1

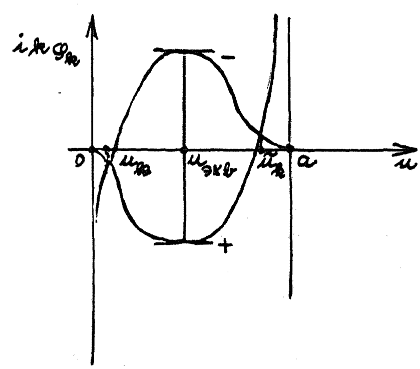

Рис. 2

На Рис. 2 изображены графики функций $ik\varphi_k^+(u)$ и $ik\varphi_k^-(u)$, которые по формуле (2_1) выражаются через $\chi_k^+(u)$ и $\chi_k^-(u)$ соответственно. Функция $ik\varphi_k(u) = ik\varphi_k^+ - ik\varphi_k^-$, очевидно имеет нули $u_k < u_{экв}$ и $\tilde{u}_k > u_{экв}$ (Рис. 3). Поэтому псяс поверхности

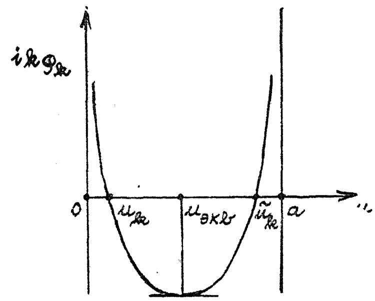

Рис. 3

S, заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$, допускает бесконечно малое изгибание 1-го порядка $\overline{z}_k$, при котором параллели u_k и $\tilde{u}_k$ скользят в своих плоскостях.

Отыскание бесконечно малого изгибания 2-го порядка поверхности S сводится к решению уравнения

$$(3)\quad \varkappa(u)\underset{(2)}{\chi''_{2k}}(u) + (4k^2-1)\varkappa''(u)\underset{(2)}{\chi_{2k}}(u) = -2ik\frac{\varkappa''(u)}{\varkappa'(u)}\varphi_k(u)\varphi'_k(u)$$

при $k \geq 2$, где $ik\varphi_k = ik\varphi_k^+ - ik\varphi_k^-$. Через функцию $\underset{(2)}{\chi_{2k}}$ без квадратур выражается функция

$$(4)\quad 2ik\underset{(2)}{\varphi_{2k}}(u) = -\varkappa'(4k^2-1)\underset{(2)}{\chi_{2k}} - \varkappa\underset{(2)}{\chi'_{2k}} + \{\varphi_k, \varphi'_k\},$$

где $\{\varphi_k, \varphi'_k\}$ - некоторое выражение, составленное из φ_k и φ'_k. Пусть $\chi^{\pm}_{2k}(u)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3), удовлетворяющая условиям: $\chi^{\pm}_{2k}(u) > 0$ при $u \in (0, a)$, $\chi^{+}_{2k}(u_{экв}) = \chi^{-}_{2k}(u_{экв})$. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\underset{(2)}{\chi}_{2k}(u) = c_1\chi^{+}_{2k}(u) + c_2\chi^{-}_{2k}(u) + \underset{(2)}{\hat{\chi}}_{2k}(u) ,$$

где $\underset{(2)}{\hat{\chi}}_{2k}$ - частное решение уравнения (3), c_1 и c_2 - произвольные постоянные. По формуле (4) найдем функцию

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u) = c_1 2ik\varphi^{+}_{2k}(u) + c_2 2ik\varphi^{-}_{2k}(u) + 2ik\underset{(2)}{\hat{\varphi}}_{2k}(u)$$

и покажем, что постоянные c_1 и c_2 можно выбрать так, что будут иметь место равенства:

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k) = 0 ,$$

$$2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k) = 0 .$$

Для этого достаточно убедиться, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2ik\varphi^{+}_{2k}(u_k) & , 2ik\varphi^{-}_{2k}(u_k) \\ 2ik\varphi^{+}_{2k}(\tilde{u}_k) & 2ik\varphi^{-}_{2k}(\tilde{u}_k) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Выясним поведение нулей функции $ik\varphi_{k}(u)$ при возрастании k. Пусть натуральное число $m > k$, $\chi_k = \chi^{+}_k - \chi^{-}_k$, $\chi_m = \chi^{+}_m - \chi^{-}_m$ (Рис. 4).

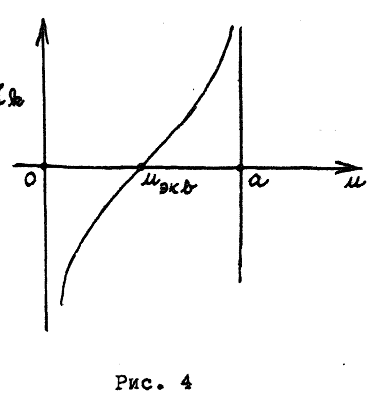

Рис. 4

Из уравнения (1) следует:

$$\chi_k'' = -(k^2-1)\frac{r''}{r}\chi_k ,$$
$$\chi_m'' = -(m^2-1)\frac{r''}{r}\chi_m ,$$

откуда получаем:

(5) $$(m^2-1)\chi_k''\chi_m - (k^2-1)\chi_m''\chi_k = 0 .$$

Интегрируя (5) по частям в интервале от $u \in (0, u_{экв})$ до $u_{экв}$, получим:

$$-(m^2-1)\chi_k'\chi_m + (k^2-1)\chi_m'\chi_k =$$
$$= \int_u^{u_{экв}} (m^2-k^2)\chi_k'\chi_m'\,du > 0 ,$$

откуда следует неравенство

(6) $$\frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m} > \frac{\chi_k'}{(k^2-1)\chi_k}$$

при $u \in (0, u_{экв})$. Учитывая, что $\chi_m(u) < 0$ при $u \in$ $\in (0, u_{экв})$, из (6) находим, что в точке $u = u_k$

$$im\,\varphi_m = -r(m^2-1)\chi_m\left[\frac{r'}{r} + \frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m}\right] > 0 .$$

Интегрируя (5) по частям в интервале от $u_{экв}$ до $u \in (u_{экв}, a)$, получим:

$$(m^2-1)\chi_k'\chi_m - (k^2-1)\chi_m'\chi_k = \int_{u_{экв}}^{u} (m^2-k^2)\chi_k'\chi_m'\,du > 0 ,$$

откуда следует:

(7) $$\frac{\chi_m'}{(m^2-1)\chi_m} < \frac{\chi_k'}{(k^2-1)\chi_k}$$

при $u \in (u_{экв}, a)$. Учитывая, что $\chi_m(u) > 0$ при $u \in (u_{экв}, a)$, из (7) найдем, что в точке $u = \tilde{u}_k$

$$i m \varphi_m = -\varkappa (m^2-1)\chi_m \left[\frac{\varkappa'}{\varkappa} + \frac{\chi'_m}{(m^2-1)\chi_m}\right] > 0 .$$

Таким образом, при возрастании k нули функции $ik\varphi_k(u)$ перемещаются в направлении экватора поверхности. Поэтому абсциссы точек пересечения графиков функций $2ik\varphi^+_{2k}(u)$ и $2ik\varphi^-_{2k}(u)$ лежат ближе к точке $u = u_{экв}$, нежели точки u_k и $\tilde{u}_k$ (см. Рис.5).

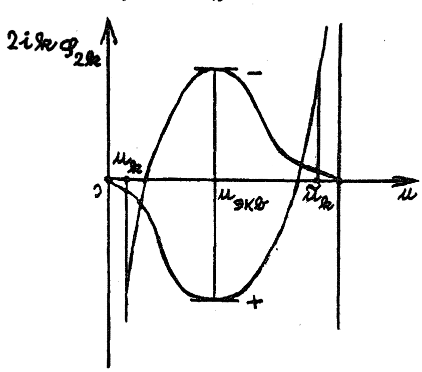

Рис. 5

Это означает, что

$$\frac{2ik\varphi^+_{2k}(u_k)}{2ik\varphi^-_{2k}(u_k)} < 1 , \quad \frac{2ik\varphi^+_{2k}(\tilde{u}_k)}{2ik\varphi^-_{2k}(\tilde{u}_k)} > 1 .$$

и потому определитель D отличен от нуля.

Итак, постоянные c_1 и c_2 могут быть выбраны так, что $2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k) = 2ik\underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k) = 0$. При таком выборе c_1 и c_2 проекция изгибающего поля $\underset{(2)}{z}_k$ 2-го порядка на ось поверхности постоянна во всех точках каждой из граничных параллелей:

$$(\underset{(2)}{\bar{z}}_k, \bar{e})\Big|_{u=u_k} = \underset{(2)}{\varphi}_{2k}(u_k)\, e^{2ikv} + \underset{(2)}{\varphi}_0(u_k) + \underset{(2)}{\bar{\varphi}}_{2k}(u_k)\, e^{-2ikv} = const\,,$$

$$(\underset{(2)}{\bar{z}}_k, \bar{e})\Big|_{u=\tilde{u}_k} = \underset{(2)}{\varphi}_{2k}(\tilde{u}_k)\, e^{2ikv} + \underset{(2)}{\varphi}_0(\tilde{u}_k) + \underset{(2)}{\bar{\varphi}}_{2k}(\tilde{u}_k)\, e^{-2ikv} = const\,.$$

Следовательно, пояс поверхности S, заключенный между параллелями u_k и $\tilde{u}_k$ допускает бесконечно малое изгибание и 2-го порядка, при котором параллели u_k и $\tilde{u}_k$ остаются плоскими кривыми.

Литература

[1] E. REMBS: Über Gleitverbiegungen, Math.Ann.,111,4(1935), 587-595.

[2] С. КОН-ФОССЕН: Нежесткие замкнутые поверхности, в сб. "Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом", М., Физматгиз,1959,стр.87-114.

Ростов.гос.университет

кафедра геометрии

Ростов-на-Дону

С С С Р

(Oblatum 18.2.1974)