Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Katarina Salavová

Радикалы колец с инволюцией. II.

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 3, 455--466

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105791

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,3 (1977)

РАДИКАЛЫ КОЛЕЦ С ИНВОЛЮЦИЕЙ. 2

Катарина САЛАВОВА, Братислава

Резюме: Статья является продолжением [10]. В [1] было показано, что радикал в категории всех ассоциативных колец $\mathcal{R}$ может быть описан внешним образом на языке модулей. Показано, что и в категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ это так.

Ключевые слова: Инволюция, категория колец с инволюцией, $*$-идеал, симметрические элементы, радикал.

AMS : 16A21 Реф. Ж.: 2.723.211

---

0. Обозначения. Будем рассматривать категорию колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$. Объектами этой категории считаем ассоциативные кольца с инволюцией, т.е. антиавтоморфизмом порядка два. Морфизмами в этой категории считаем $*$ - гомоморфизмы, т.е. такой гомоморфизм φ, что для любого $x \in A$, $\varphi(x^*) = (\varphi(x))^*$. Множество I будем называть $*$ - идеалом, если I - идеал и $I^* = I$. Элемент x кольца с инволюцией A называется симметрическим (кососимметрическим), если $x^* = x$ ($x^* = -x$). Если I - $*$ - идеал, то инволюция на кольце A индуцирует инволюцию на фактор-кольце $A/_I$. Категория колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ удовлетворяет аксиомам 1 - 7 из работы [7] и поэтому в ней можно ввести понятие радикала следующим образом. Пусть $\mathfrak{p}$ - произвольное свойство колец с инволюцией. Множество I будем называть $\mathfrak{p}$ - $*$ - идеалом, если I - $*$ - идеал в кольцо, обладающие свойством $\mathfrak{p}$. Через

$\mathfrak{r}(A)$ обозначим сумму всех $\mathfrak{r}$ - $*$ - идеалов кольца A.
В категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ определен радикал $\mathfrak{r}$, если выполнены условия:

R^*1. Всякий $*$ -гомоморфный образ $\mathfrak{r}$ -кольца есть $\mathfrak{r}$ -кольцо;

R^*2. $\mathfrak{r}(A)$ является $\mathfrak{r}$ - $*$ -идеалом для всякого кольца A;

R^*3. $\mathfrak{r}\left(A/_{\mathfrak{r}(A)}\right) = 0$ для любого кольца A.

5. <u>Модулы и радикалы в</u> $\mathcal{R}^*$. В [1] было показано, что радикал в категории всех ассоциативных колец $\mathcal{R}$ может быть описан внешним образом на языке модулей. Покажем, что и в категории $\mathcal{R}^*$ это так.

Пусть A - произвольное кольцо с инволюцией. Под A - модулем будем понимать правый A - модуль. Пусть $\Sigma_{(A,*)}$ - произвольный класс A - модулей над кольцом с инволюцией A. $*$ - ядром класса $\Sigma_{(A,*)}$ называется пересечение $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = \bigcap Ann_A^*(M)$, где $M \in \Sigma_{(A,*)}$. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то считаем, что $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = A$. Если $Ker\,\Sigma_{(A,*)} = 0$, то $\Sigma_{(A,*)}$ называется $*$ -точным классом A - модулей.

Пусть каждому кольцу с инволюцией A поставлен в соответствие некоторый класс $\Sigma_{(A,*)}$ нетривиальных A - модулей (может быть и пустой), и пусть Σ_* - класс всех $\Sigma_{(A,*)}$, где A пробегает класс ассоциативных колец с инволюцией.

<u>Определение 5.1</u>. Класс модулей Σ_* назовем $*$ - общим классом модулей, если выполнены условия:

$M^*1)$ Если B - $*$ - идеал в кольце с инволюцией A, то из $M \in \Sigma_{(A/_B,\, *)}$ следует, что $M \in \Sigma_{(A,*)}$;

$M^*2)$ Если B - $*$ - идеал в кольце с инволюцией A, то из $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $B \subseteq Ann_A^*(M)$ следует, что $M \in \Sigma_{(A/_B,*)}$;

$M^*3)$ Если класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен, то $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$ для любого ненулевого $*$ - идеала B кольца с инволюцией A;

$M^*4)$ Если $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$ для любого ненулевого $*$ - идеала кольца A, то класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен.

Замечание 5.2. Класс неприводимых модулей над кольцами с инволюцией является $*$ - общим.

Определение 5.3. Пусть Σ_* - $*$ - общий класс модулей. Тогда Σ_*- радикалом $R(\Sigma_*,A)$ кольца A назовем $*$ - ядро класса $\Sigma_{(A,*)}$, т.е. $R(\Sigma_*,A) = Ker\,\Sigma_{(A,*)} = \cap\{Ann_A^*(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}$. Отметим, что $R(\Sigma_*,A)$ - $*$ - идеал кольца A. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то кольцо A назовем Σ_*-радикальным. Если класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен, т.е. $R(\Sigma_*,A) = 0$, то кольцо A назовем Σ_* - полупростым. Заметим, что кольцо A будет Σ_* -радикальным тогда и только тогда, когда $A = R(\Sigma_*,A)$.

Предложение 5.4. $*$ - гомоморфный образ Σ_* - радикального кольца с инволюцией является Σ_*- радикальным кольцом.

Предложение 5.5. Если B такой $*$ - идеал кольца A, что $B \subseteq R(\Sigma_*,A)$, то $R(\Sigma_*, A/_B) = R(\Sigma_*,A)/_B$.

Доказательство. Если $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$, то в силу аксиомы M^*1 $\Sigma_{(A/_B,*)} = \emptyset$, т.е. $R(\Sigma_*, A/_B) = A/_B = R(\Sigma_*,A)/_B$. Если же $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$, то из включений $B \subseteq R(\Sigma_*,A) \subseteq Ann_A^*(M)$ и условий M^*1, M^*2 получаем,

что $R(\Sigma_*, B) = \cap\{Ann^*_{A/B}(M) \mid M \in \Sigma_{(A/B,*)}\} =$
$= (\cap\{Ann^*_A(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\})/_B = R(\Sigma_*, A)/_B$.

<u>Следствие 5.6.</u> $R\left(\Sigma_*, A/_{R(\Sigma_*,A)}\right) = 0$.

<u>Предложение 5.7.</u> В любом кольце с инволюцией A его Σ_* - радикал $R(\Sigma_*, A) = R$ совпадает с пересечением всех таких $*$ - идеалов T_α , фактор-кольца по которым Σ_* - полупросты.

<u>Доказательство.</u> Так как $R\left(\Sigma_*, A/_R\right) = 0$, то $R \supseteq \cap T_\alpha$. Пусть теперь $A_\alpha = A/_{T_\alpha}$ и $R(\Sigma_*, A_\alpha) = 0$, т.е. $\cap Ann^*_{A_\alpha}(M) = 0$, где $M \in \Sigma_{(A_\alpha,*)}$. Если M рассматривать как A - модуль, то $T_\alpha \subseteq Ann^*_A(M)$ и $Ann^*_A(M) =$ $= Ann^*_A(M)/_{T_\alpha}$, т.е. $\cap Ann^*_A(M) = T_\alpha$, где $M \in \Sigma_{(A_\alpha,*)}$. В силу M^*1 из последнего равенства получаем, что
$T_\alpha \supseteq \cap\{Ann^*_A(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\} = R$.
Следовательно, $\cap T_\alpha = R$.

<u>Определение 5.8.</u> Кольцо с инволюцией A называется $*$ - подпрямой суммой колец с инволюцией A_α , если в кольце существуют такие $*$ - идеалы T_α , что $\cap T_\alpha = 0$ и кольцо A_α $*$ - изоморфно кольцу $A/_{T_\alpha}$ с индуцированной инволюцией.

<u>Следствие 5.9.</u> $*$ - подпрямая сумма $*$ - полупростых колец с инволюцией A_α будет Σ_* - полупростым кольцом с инволюцией.

<u>Определение 5.10.</u> Пусть Σ_* - $*$ - общий класс модулей. Через $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ будем обозначать класс всех колец A , обладающих $*$ - точным модулем M из класса $\Sigma_{(A,*)}$.

<u>Следствие 5.11.</u> Кольцо с инволюцией A является Σ_* - полупростым тогда и только тогда, когда A - $*$ - подпрямая

сумма колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

<u>Лемма 5.12</u>. Если B - Σ_* - радикальный $*$ - идеал кольца A, то $B \subseteq R(\Sigma_*, A)$.

<u>Доказательство</u>. Действительно, если допустить, что $B \nsubseteq R(\Sigma_*, A)$, то существует такой A - модуль $M \in \Sigma_{(A,*)}$, что $B \nsubseteq Ann^*_A(M)$. Поэтому $\bar{B} = B/Ann^*_B(M)^* = B/B \cap Ann^*_A(M) = B + Ann^*_A(M)/Ann^*_A(M)$ - ненулевой $*$ - идеал в Σ_* - полупростом кольце $A/Ann^*_A(M)$. В силу M^*3, $\Sigma_{(\bar{B},*)} \neq \emptyset$, но тогда в силу M^*1, $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$. Получили противоречие с Σ_* - радикальностью $*$ - идеала B.

<u>Следствие 5.13</u>. Сумма T любого множества Σ_* - радикальных $*$ - идеалов R_α кольца A есть Σ_* - радикальный $*$ - идеал.

<u>Предложение 5.14</u>. Σ_* - радикал $R(\Sigma_*, A)$ кольца с инволюцией A совпадает с суммой T всех его Σ_* - радикальных $*$ - идеалов.

<u>Доказательство</u>. Ввиду следствия 5.13 и леммы 5.12 $R(\Sigma_*, A) \supseteq T$ фактор-кольцо A/T не содержит ненулевых Σ_* - радикальных $*$ - идеалов. В силу M^*4, кольцо A/T Σ_* - полупросто. В силу предложения 5.7, $R(\Sigma_*, A) \subseteq T$.

<u>Теорема 5.15</u>. а) Всякий Σ_* - радикал является радикалом в категории колец с инволюцией $\mathfrak{R}^*$, т.е. удовлетворяет условиям R^*1 - R^*3.

б) Обратно, если $\mathfrak{r}$ - произвольный радикал в категории $\mathfrak{R}^*$, то существует такой $*$ - общий класс Σ_* - модулей, что $\mathfrak{r}$ совпадает с Σ_* - радикалом.

в) Для того, чтобы некоторый класс колец $\mathfrak{M}$ совпадал с $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ для подходящего $*$ - общего класса Σ_* -

модулей необходимо и достаточно, чтобы: α) класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет свойству U^*; β) $S_{\mathfrak{M}}$ - полупростые кольца с инволюцией исчерпывались $*$ - подпрямыми суммами колец из класса $\mathfrak{M}$.

Доказательство. а) Следует непосредственно из предложения 5.4, следствия 5.6, предложения 5.14, следствия 5.13.

б) Пусть $\mathfrak{r}$ - произвольный радикал в категории $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{M} = \{A \in \mathfrak{R}^* \mid A \neq 0,\ \mathfrak{r}(A) = 0\}$.

Каждому кольцу с инволюцией A поставим в соотвествие класс $\Sigma_{(A,*)} = \{M_A \mid MA \neq 0,\ A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}\}$.

Легко видеть, что класс Σ_* всех $\Sigma_{(A,*)}$ удовлетворяет M^*1 и M^*2. Покажем, что для построенного класса Σ_* - модулей $\mathfrak{M}(\Sigma_*) = \mathfrak{M}$. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. По определению класса $\Sigma_{(A,*)}$ -модулей, $\mathfrak{r}(A) = 0$. Наоборот. Пусть кольцо A - $\mathfrak{r}$ - полупросто. Вложим кольцо A в кольцо с единицей M и рассмотрим M как A - модуль. Тогда $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Покажем, что $R(\Sigma_*, A) = \mathfrak{r}(A)$ для любого кольца с инволюцией A. Действительно, пусть $R(\Sigma_*, A) = A$, т.е. $\Sigma_{(A,*)} = \emptyset$ и $\mathfrak{r}(A) \neq A$. Тогда $\mathfrak{r}\left(A/\mathfrak{r}(A)\right) = 0$. По предыдущему замечанию и M^*1, $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$. Приходим к противоречию. Если же $\mathfrak{r}(A) = A$ и $\Sigma_{(A,*)} \neq \emptyset$, т.е. существует $M \in \Sigma_{(A,*)}$, то по предыдущему замечанию, $\mathfrak{r}\left(A/Ann^*_A(M)\right) = 0$. Ввиду предложения 1.2 из [7], $\mathfrak{r}(A) \subseteq Ann^*_A(M) \neq A$. Получили противоречие.

Проверим условие M^*3. Пусть класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - точен. Тогда $\mathfrak{r}(A) = 0$. Пусть $\Sigma_{(B,*)} = \emptyset$ для какого-то ненулевого $*$ - идеала B кольца A. Тогда $R(\Sigma_*, B) = B =$

$= s(B)$. Но $R(\Sigma_*, A) = s(A) = 0$. Следовательно, $B \leq$ $\leq s(A) = 0$. Получили противоречие. Свойство M^*4 проверяется аналогично.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$ для подходящего $*$ - общего класса Σ_* - модулей. Проверим необходимость условий α), β). Пусть B - $*$ - идеал кольца Z и $Z \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Тогда $R(\Sigma_*, Z) = 0$, по свойству M^*3, $\Sigma_{(B,*)} \neq \emptyset$, т.е. $R(\Sigma_*, B) \neq B$. Рассмотрим естественный эпиморфизм кольца B на кольцо $B/R(\Sigma_*, B)$. Ввиду следствия 5.11, кольцо $B/R(\Sigma_*, B)$ является $*$ - подпрямой суммой колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Следовательно, условие α) выполнено. Проверим β). Заметим, что $R(\Sigma_*, B) = S_{\mathfrak{M}(\Sigma_*)}(B)$ для любого кольца с инволюцией B . Но $R(\Sigma_*, -)$ - полупростые кольца - это $*$ - подпрямые суммы колец из класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ (следствие 2.11), т.е. выполнено условие β).

Проверим достаточность условий α) и β). Положим $\Sigma_{(A,*)} = \{M \mid MA \neq 0$ и $A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}\}$. Аналогично первой части доказательства можно показать, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$ и класс удовлетворяет условиям M^*1 - M^*4.

6. Специальные радикалы и специальные модули

Определение 6.1. Пусть каждому кольцу с инволюцией A поставлен в соответствие некоторый класс $\Sigma_{(A,*)}$ - $*$ - первичных A - модулей. Класс $\Sigma_* = \cup \Sigma_{(A,*)}$ называется $*$ - специальным классом модулей, если выполнены условия:

MS^*1) Если $M \in \Sigma_{(A/P,*)}$, где P - $*$ - идеал в A , то $M \in \Sigma_{(A,*)}$ (здесь $xa = x\bar{a}$);

MS^*2) Если $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и P - $*$ - идеал в A

такой, что $P \subseteq Ann^*_A(M)$, то $M \in \Sigma_{(A/P,*)}$;

$MS^*3)$ Если $M \in \Sigma_{(A,*)}$ и $MB \neq 0$, где B - $*$ - идеал кольца A, то $M \in \Sigma_{(B,*)}$;

$MS^*4)$ Если $M \in \Sigma_{(B,*)}$ и B - $*$ - идеал в A, то $MB \in \Sigma_{(A,*)}$. Σ_* - специальным радикалом кольца с инволюцией A назовем пересечение $R(\Sigma_*,A) = \bigcap\limits_{M\in\Sigma_{(A,*)}} Ann^*_A(M)$. Если $\Sigma_A = \emptyset$, то будем считать, что $R(\Sigma_*,A) = A$. Если $R(\Sigma_*,A) = 0$, то кольцо A назовем Σ_*- полупростым. $*$ - идеал B кольца A назовем Σ_* - радикальным если B, рассматриваемое как кольцо, является Σ_* - радикальным. Далее под Σ_*- радикалом будем понимать Σ_*- специальный радикал.

<u>Следствие 6.2</u>. Класс всех $*$ - первичных модулей над кольцами с инволюцией является $*$ - специальным классом модулей.

<u>Доказательство</u>. Следует учесть лемму 2.11, лемму 2.13 и лемму 2.14 из [10].

<u>Предложение 6.3</u>. Если B - $*$ - идеал кольца с инволюцией A, то $R(\Sigma_*,B) = B \cap R(\Sigma_*,A)$.

<u>Доказательство</u>. Из определения 2, условий MS^*3, MS^*4 леммы 2.14 следует, что $B \cap R(\Sigma_*,A) =$

$$= B \cap (\cap Ann^*(M) \mid M \in \Sigma_{(A,*)}) = \cap\{Ann^*_B(M \mid M \in \Sigma_{(A,*)}\} \supseteq$$

$$\supseteq R(\Sigma_*,B); \; R(\Sigma_*,B) = \cap\{Ann^*_B(M) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} =$$

$$= \cap\{B \cap Ann^*_A(MB) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} =$$

$$= B \cap (\cap\{Ann^*_A(MB) \mid M \in \Sigma_{(B,*)}\} \supseteq B \cap R(\Sigma_*,A).$$

<u>Следствие 6.4</u>. Σ_* - радикал произвольного кольца A является Σ_* - радикальным $*$ - идеалом, содержащим любой другой Σ_* - радикальный $*$ - идеал кольца A.

Следствие 6.5. Любой Σ_* - $*$ - специальный класс модулей является $*$ - общим классом модулей.

Следствие 6.6. Σ_* - специальный радикал является радикалом в категории $\mathcal{R}^*$.

Теорема 6.7. Если Σ_* - $*$ - специальный класс модулей, то $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ является $*$ - специальным классом колец. Обратно, для всякого $*$ - специального класса $\mathfrak{M}$ существует $*$ - специальный класс модулей Σ_* такой, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

Доказательство. Пусть Σ_* - $*$ - специальный класс модулей. Покажем, что класс $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ удовлетворяет условиям S^*1, S^*4 и S^*5. Проверим условие S^*1. Пусть $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, тогда по лемме 2.8 в [10] A - $*$ - первичное кольцо.

S^*4) Пусть B - ненулевой $*$ -идеал кольца $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, т.е. существует $*$ -точный A - модуль $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$. Тогда $MB \neq 0$ и $M_B \in \Sigma_{(B,*)}$. Но $Ann^*_B(M) = Ann^*_A(M) \cap B = 0$, т.е. $B \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

S^*5) Пусть A - ненулевой $*$ - идеал $*$ - первичного кольца C, причем $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$, т.е. существует $*$ - точный A - модуль $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$. По свойству MS^*4, $MA \in \Sigma_{(C,*)}$ и по лемме 2.14 из [10] $0 = Ann^*_A(M) = Ann^*_C(MA) \cap A$. Из $*$ - первичности кольца C следует, что $C \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ - $*$ - специальный класс колец. Каждому кольцу с инволюцией поставим в соответствие класс $\Sigma_{(A,*)}$ всех $*$ - первичных A - модулей, удовлетворяющих условию: $A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}$. Пусть $\Sigma_* = \cup \Sigma_{(A,*)}$. Проверим, что класс Σ_* является искомым. Условия MS^*1 и MS^*2 следуют из леммы 2.11 из [10].

MS^*3) Пусть $M_A \in \Sigma_{(A,*)}$ и $MB \neq 0$ для $*$ - идеала

B кольца A. Тогда $0 \neq B/Ann^*_B(M) = B/B \cap Ann^*_A(M) =$
$= B + Ann^*_A(M)/Ann^*_A(M) \subseteq A/Ann^*_A(M) \in \mathfrak{M}$.
Следовательно, по свойству S^*4, $B/Ann^*_B(M) \in \mathfrak{M}$, т.е. $M_B \in \Sigma_{(B,*)}$.

$MS^*4)$ Пусть $M \in \Sigma_{(B,*)}$ и B - $*$ - идеал кольца A. По лемме 2.14 из [10], MB $*$ - первичный A - модуль. Имеет место цепочка включений: $A/Ann^*_A(MB) \supseteq B +$
$+ Ann^*_A(MB)/Ann^*_A(MB) \cong B/Ann^*_A(MB) \cap B = B/Ann^*_B(M)$.
Но $B/Ann^*_B(M) \in \mathfrak{M}$ и $A/Ann^*_A(MB)$ - $*$ - первичное кольцо. Применяя S^*4, получаем, что $A/Ann^*_A(MB) \in \mathfrak{M}$, т.е. $MB \in \Sigma_{(A,*)}$.

Осталось показать, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Sigma_*)$. Из определения класса $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ следует, что $\mathfrak{M}(\Sigma_*) \subseteq \mathfrak{M}$. Наоборот, пусть $A \in \mathfrak{M}$, тогда A - $*$ - первичное кольцо, и по лемме 2.8 из [10] существует $*$ - точный, $*$ - первичный A - модуль M, т.е. $A \in \mathfrak{M}(\Sigma_*)$.

<u>Следствие 6.8.</u> Радикал ρ является $*$ - специальным радикалом в $\mathcal{R}^*$ тогда и только тогда, когда существует $*$ - специальный класс Σ_* - модулей такой, что $R(\Sigma_*, -) = \rho$.

7. Примеры $*$ - специальных радикалов

<u>Замечание 7.1.</u> Пусть Σ - специальный класс модулей (см. [9]) и радикал $R(\Sigma, -)$ замкнут относительно инволюции. Для любого кольца с инволюцией положим $\Sigma_{(A,*)} = \Sigma_A$. Тогда Σ_* $*$ - специальный класс модулей и $R(\Sigma_*, A) =$
$= R(\Sigma, A)$.

Приведем несколько примеров $*$ - специальных классов модулей.

1. Класс Σ_* всех $*$ - первичных модулей. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - первичных колец. Следовательно, ввиду теоремы 6 из [4], $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с первичным радикалом кольца A.

2. Класс Σ_* всех первичных модулей над кольцами с инволюцией. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - первичных колец. Ввиду замечания 7.1, $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с первичным радикалом кольца A.

3. Класс Σ_* всех неприводимых модулей над кольцами с инволюцией. Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - примитивных колец (см. [8]). $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с радикалом Джекобсона и равен пересечению всех его $*$ - примитивных идеалов.

4. Класс Σ_* всех простых модулей (см. [9]). Соответствующий Σ_* - $*$ - специальный класс колец $\mathfrak{M}(\Sigma_*)$ совпадает с классом всех $*$ - простых колец (т.е. не имеющих собственных $*$ - идеалов) с единицей. $R(\Sigma_*, A)$ совпадает с радикалом Брауна-Маккоя.

Отметим, что в примере 1.4 из [10] $*$ - специальный радикал существенно зависит от инволюции кольца и, следовательно, он не может быть продолжен до (специального) радикала в категории колец.

В заключение автор приносит благодарность доценту А.В.

Михалеву за внимание к работе.

Литература

[1] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯБУХИН: Модули и радикалы, Докл. Акад. Наук СССР 156(1964), 991-994.

[2] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Первичные модули и радикалы Бэра, Сибирский мат. журнал 2(1961), 801-806.

[3] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Радикалы ассоциативных колец, Математический сборник 44(1958), 179-212.

[4] MARTINDALE W.S. 3rd.: Rings with involution and polynomial identities, J. algebra 11(1966), 186-194.

[5] SZASZ F.: Radikale der Ringe, Akademiai Kiadó, Budapest, 1975.

[6] COZZENS J.H.: Simple principal left ideal domains, J. algebra 23(1972), 66-75.

[7] Ю.М. РЯБУХИН: Радикалы в категориях, Математические исследования 2(1967), 107-165.

[8] BAXTER W.E., MARTINDALE W.S. 3rd.: Rings with involution and polynomial identities, Canad. J. Math. 20(1968), 465-473.

[9] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯБУХИН: Специальные модули и специальные радикалы, Докл. Акад. Наук СССР 147(1962), 1274-1277.

[10] К. САЛАВОВА: Радикалы колец с инволюцией 1, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 367-381.

Podtatranského 8
80100 Bratislava
Československo

(Oblatum 13.4. 1977)