Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Helmut Meister
Zum Fixpunktverhalten nichtexpansiver Abbildungen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 2, 319--331

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105999

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,2 (1980)

ZUM FIXPUNKTVERHALTEN NICHTEXPANSIVER ABBILDUNGEN

H. MEISTER

Inhalt: Es wird das Fixpunktverhalten nichtexpansiver Abbildungen auf unbeschränkten Teilmengen von Hilberträumen untersucht und ein Fixpunktsatz für nichtexpansive mengenwertige Abbildungen mit nicht notwendig konvexen Werten bewiesen.

Schlüsselwörter: Fixpunkt, nichtexpansive Abbildung, linearbeschränkt, mengenwertige Abbildung, Leray-Schauder-Bedingung, Opial-Bedingung.

Klassifikation: 47H10

Einleitung: Im ersten Teil der Arbeit wird das Fixpunktverhalten nichtexpansiver Abbildungen auf unbeschränkten Mengen untersucht, im zweiten Teil wird der Fixpunktsatz für mengenwertige Banachkontraktionen mit Leray-Schauder-Bedingung auf mengenwertige Abbildungen mit nicht notwendig konvexen Werten verallgemeinert und das Ergebnis zum Beweis eines Fixpunktsatzes für nichtexpansive mengenwertige Abbildungen ausgenutzt.

Es bezeichne clX, intX bzw. ∂X bzw. coX Abschluss, Inneres, Rand bzw. konvexe Hülle einer Teilmenge X eines Banachraumes E.

Definition: Seien M, N metrische Räume. Ein Operator $T:M \longrightarrow N$ heisst nichtexpansiv, wenn gilt $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$

$(x,y \in M)$.

1. Über das Fixpunktverhalten nichtexpansiver Abbildungen auf nicht notwendig beschränkten Mengen

1.0. Einleitung: Smart (vgl. [13]) konstruiert in einem beliebigen separablen Banachraum E mit dim $E \geq 2$ eine unbeschränkte sternförmige Menge Y mit der Eigenschaft, dass jede stetige Selbstabbildung von Y einen Fixpunkt besitzt. Andererseits setzen viele Fixpunktsätze für nichtexpansive Abbildungen - etwa von Browder-Göhde-Kirk (vgl. [2],[4] bzw. [7]), Lami Dozo (vgl. [8]) oder Göhde (vgl. [5]) Beschränktheit des Definitionsbereiches voraus. Es ergibt sich die Frage, ob sich diese Bedingung abschwächen lässt oder ob man sogar völlig auf sie verzichten kann. Ein Resultat in dieser Richtung erzielte O. Ray (vgl. [10]): Auf geeigneten konvexen linearbeschränkten Mengen X haben nichtexpansive Selbstabbildungen T die Eigenschaft $\inf(|x-Tx|: x \in X) = 0$ ("Fastfixpunkteigenschaft"). Unter Verschärfung der Voraussetzungen an den unterliegenden Raum wird dieses Resultat in der vorliegenden Arbeit für sternförmige Mengen verallgemeinert (Abschnitt 1.1). In Abschnitt 1.2 wird gezeigt, dass man die Aussage des Satzes von O. Ray nicht zur Existenz eines Fixpunktes verschärfen kann: Auf jeder unbeschränkten konvexen Teilmenge eines Hilbertraumes lässt sich eine nichtexpansive fixpunktfreie Selbstabbildung konstruieren.
Sei E ein normierter Raum, $X \subseteq E$. X ist linearbeschränkt, wenn der Durchschnitt von X mit jeder Geraden beschränkt ist, und X is sternförmig bzgl. des Sternpunktes $x_0 \in X$, wenn

aus $x \in X$, $t \in [0,1]$ folgt $tx+(1-t)x_0 \in X$. In einem Hilbertraum H sei für $e_1 \ldots e_n \in H$ $\mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)$ die lineare Hülle von $e_1 \ldots e_n$ und $\mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp}$ deren orthogonales Komplement.

1.1. Eine Fastfixpunktaussage

Satz 1.1. Sei H ein Hilbertraum, $X \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen, linearbeschränkt, sternförmig bzgl. $x_0 \in X$, $T: X \longrightarrow X$ nichtexpansiv. Dann existiert für jedes $t \in [0,1]$ genau ein $x_t \in X$ mit $t(Tx_t - x_0) = x_t - x_0$, und es gilt $\lim |Tx_t - x_t| = 0$ für $t \longrightarrow 1$.

Beweis: Die Abbildung $x \longmapsto x_0 + t(Tx - x_0)$ ist eine kontrahierende Selbstabbildung von X, die nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt x_t besitzt; offenbar gilt $t(Tx_t - x_0) = x_t - x_0$.
Sei im folgenden o.B.d.A. $x_0 = 0$.
Es gelte $0 \leq s < t < 1$. Einsetzen von $Tx_t - Tx_s = (x_s - x_t) + Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t)$ in die linke Seite der Ungleichung $|Tx_t - Tx_s| \leq |x_t - x_s|$ und quadrieren liefert $(x_s - x_t, Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t)) \leq -\frac{1}{2}((Tx_s - x_s) - (Tx_t - x_t))^2 \leq 0$, woraus folgt

$$\frac{(1-t)(1-s)}{t-s}\,(x_t - x_s, Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t)) + \frac{s(1-t)}{t-s}(Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t))^2 \geq 0.$$

Zusammen mit der sich aus der Definition von x_t, x_s ergebenden Gleichung

$$\frac{(1-t)(1-s)}{t-s}\,(x_t - x_s) + \frac{s(1-t)}{t-s}\,(Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t)) = Tx_t - x_t$$

erhält man $(Tx_t - x_t, Tx_s - x_s - (Tx_t - x_t)) \geq 0$ (+).
Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt $|Tx_s - x_s| \geq |Tx_t - x_t|$. Sei $a := \lim |Tx_t - x_t|$ $(t \uparrow 1)$.

Wir nehmen an, es ist $a > 0$. Nach (+) gilt dann

$$\frac{(Tx_t-x_t, Tx_s-x_s)}{|Tx_t-x_t|\cdot|Tx_s-x_s|} \geq \frac{|Tx_t-x_t|}{|Tx_s-x_s|} \geq \frac{a}{|Tx_s-x_s|},$$

$$\left[\frac{Tx_t-x_t}{|Tx_t-x_t|} - \frac{Tx_s-x_s}{|Tx_s-x_s|}\right]^2 \leq 2-2\frac{a}{|Tx_s-x_s|} = 2(1-\frac{a}{|Tx_s-x_s|}).$$

Da diese Ungleichung für beliebige s, t mit $0 \leq s < t < 1$ gilt, existiert

$y := \lim \frac{Tx_t-x_t}{|Tx_t-x_t|}$ $(t \uparrow 1)$. Sei $b > 0$ beliebig. Dann gilt für hinreichend nahe bei 1 gelegene $s < 1$ die Ungleichung $b \leq \frac{1}{1-s}\, a$; das bedeutet nach der Definition von a und x_s aber $|Tx_s| \geq b$. Wegen der Sternförmigkeit von X bzgl. Null folgt $b\frac{Tx_s}{|Tx_s|} \in X$ für hinreichend grosse s, d.h. $by \in X$. Somit ist im Widerspruch zur Voraussetzung X nicht linear beschränkt, d.h. $a = 0$.

<u>Bemerkungen:</u> 1. Man könnte die lineare Beschränktheit ersetzen durch die zunächst schwächer scheinende Forderung, dass der Durchschnitt mit jeder Geraden, die den Sternpunkt enthält, beschränkt ist. Es folgt jedoch wegen der Sternförmigkeit von X sofort die lineare Beschränktheit.

2.0. Ray [10] fordert in seinem Satz Konvexität des Definitionsbereiches, lässt aber statt Hilberträumen reflexive Banachräume mit schwach folgenstetiger Dualitätsabbildung zu.

1.2. <u>Existenz nichtexpansiver fixpunktfreier Abbildungen</u>

<u>Lemma 1.2.</u> Sei E ein Banachraum, $X \subseteq E$ nichtleer, konvex. Für ein $q \in (0,1)$ habe jede q-kontrahierende Abbildung $T: X \longrightarrow X$ einen Fixpunkt. Dann ist X abgeschlossen.

Beweis: (*) Es genügt zu zeigen, dass aus $0 \in \mathrm{cl}X$ folgt $0 \in X$. Sei $0 \notin X$, $0 \in \mathrm{cl}X$, $y_n := \frac{1}{n} a$ für ein $a \in X (n=1, 2,\ldots)$; $m \in N$ erfülle die Bedingung $\frac{1}{m} \leq \frac{9}{9}$; $S: X \cup \{0\} \to [0, y_m]$ sei definiert durch $Sx := \frac{1}{m} \frac{|x|\ a}{(1+|x|)}$. S ist $\frac{9}{9}$ kontrahierend und hat den eindeutigen Fixpunkt Null. Ausserdem wird eine Abbildung $R: [0,a] \to X \cup \{0\}$ konstruiert:

Für y_n gelte $|Ry_n - y_n| \leq \frac{|a|}{n(n+1)}$, $Ry_n \in X$. Das ist möglich, da die y_n Häufungspunkte von X sind. Für $y = ty_n + (1-t)y_{n+1}$, $t \in [0,1]$ sei $Ry := tRy_n + (1-t)Ry_{n+1}$. R ist lipschitzstetig mit Faktor 3:

$$|Ry_n - Ry_{n+1}| \leq |Ry_n - y_n| + |y_n - y_{n+1}| + |Ry_{n+1} - y_{n+1}| \leq$$

$$\leq \frac{|a|}{n(n+1)} + |y_n - y_{n+1}| + \frac{|a|}{(n+1)(n+2)} \leq 3|y_n - y_{n+1}|.$$

$R(0)=0$ ist stetige Fortsetzung von R: Sei $(z_k) \subseteq (0,a]$, $\lim z_k = 0$ mit $z_k - t_k y_{n(k)} + (1-t_k) y_{n(k)+1}$. Es gilt $|y_{n(k)}| \geq \geq |z_k|$, $y_{n(k)} \to 0$. Daher folgt $Rz_k \to 0$ aus $Rz_k = t_k Ry_{n(k)} + (1-t_k) Ry_{n(k)+1}$. Sei $T := R \circ S : X \cup \{0\} \to X \cup \{0\}$. T ist $\frac{9}{3}$ kontrahierend und hat den eindeutigen Fixpunkt Null. Somit gilt $0 \in X$.

(*) Die hier angegebene Fassung des Beweises stammt von T. Jerofsky (Dresden), dem ich für seine nützlichen Hinweise danken möchte.

Bemerkung: Lemma 1.2 lösst Problem 3.1.5 in [12].

Lemma 1.3 (Schöneberg [12]). Sei E ein Banachraum, $X \subseteq E$ nichtleer, konvex. Jede nichtexpansive Abbildung $T: X \to X$ habe einen Fixpunkt. Dann ist X linear beschränkt.

Beweis: [12], S. 71

Lemma 1.4: Sei H ein Hilbertraum, $X \subseteq H$ nichtleer, abgeschlossen, konvex, linear beschränkt, unbeschränkt, (t_n) eine Folge nichtnegativer reller Zahlen.
Dann existieren ein Vektor $e \in X$ und eine Folge (e_i) paarweise orthogonaler Vektoren aus H mit $f_n := e + \sum_{i=1}^{n} e_i \in X$ und $|e_i| = t_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

Beweis: Der Fall n=1 ist aus den Voraussetzungen sofort ablesbar. Seien $e, e_1 \ldots e_n$ aus H gewählt mit $(e_i, e_j)=0$ für $i \neq j$, $|e_i| = t_i$. Mit $U_n := (x \in \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n) : |x| \leq (\frac{1}{2})^n)$ sei $f_n + U_n \subseteq X$. Es wird gezeigt, dass $X \cap (f_n + \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp})$ unbeschränkt ist. Existiere andernfalls ein $r > 0$ mit (*): Aus $x \in X \cap (f_n + \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp})$ folgt $|x - f_n| \leq r$. Für $x \in X$ ist nach dem Zerlegungssatz für Hilberträume die Darstellung $x = f_n + tu + y$, $u \in S_n := (x \in \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n) : |x| = (\frac{1}{2})^n)$, $t \geq 0$, $y \in \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp}$ möglich. Man erhält wegen der Konvexität von X

$$f_n + \frac{1}{t+1} y = \frac{t}{t+1}(f_n - u) + \frac{1}{t+1}(f_n + tu + y) \in X \cap (f_n + \mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp})$$

und daraus nach (*) $|y| \leq (t+1)r$. Daher ist es möglich, aus jeder unbeschränkten Folge (x_k) aus X mit $x_k = f_n + t_k u_k + y_k$, $t_k \geq 0$, $u_k \in S_k$ eine Teilfolge auszuwählen, für die gilt: (t_k) monoton wachsend, unbeschränkt, $t_1 > 0$, $\lim u_k = u \in S_n$,

$\mathrm{wlim}\, \frac{y_k}{t_k} = y$ (wlim bezeichne den schwachen Grenzwert; es wird ausgenutzt, dass Kugeln im Hilbertraum schwach kompakt sind).
Sei nun $b \geq 0$ beliebig. Es gilt für fast alle $k \in N$

$f_n + \frac{b}{t_k}(t_k u_k + y_k) \in X$, da $f_n \in X$, $x_k \in X$ und X konvex. Somit $f_n + b(u+y) \in X$ wegen der schwachen Abgeschlossenheit von X.
Da b frei wählbar ist, ist X nicht linearbeschränkt: (*) ist zum Widerspruch geführt.

Man kann daher e_{n+1} so wählen, dass gilt $|e_{n+1}| = t_{n+1}$, $f_n+3e_{n+1} \in X \cap (f_n+\mathrm{lin}(e_1 \ldots e_n)^{\perp})$. Aus der letzten Beziehung zusammen mit der Konvexität von X und $f_n+U_n \subseteq X$ leitet man leicht ab $f_{n+1}+U_{n+1} \subseteq X$ und beendet damit den Induktionsschritt.

Der Beweis zum folgenden Lemma ist unmittelbar einsichtig und wird daher weggelassen.

Lemma 1.5: Sei H ein Hilbertraum, (e_i) paarweise orthogonale Vektoren aus H, $f_n := e+\sum_{i=1}^{m} e_i$. Dann sind für $x \in H$ äquivalent:

(i) $x \in \mathrm{c}\ell\mathrm{co}(e, f_1, f_2 \ldots)$

(ii) $x = e+\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$.

Satz 1.6: Sei H ein Hilbertraum, $X \subseteq H$ nichtleer, konvex. Jede nichtexpansive Abbildung $T: X \rightarrow X$ habe einen Fixpunkt.
Dann ist X beschränkt.

Beweis: Sei X unbeschränkt. Nach den Lemmata 1.2 und 1.3 ist X abgeschlossen und linear beschränkt, d.h. es lassen sich Folgen (e_n) und (f_n) nach Lemma 1.4 auswählen mit $t_n=1$ für $n \in N$, und es gilt $Y := \mathrm{c}\ell\mathrm{co}(e, f_1, f_2, \ldots) \subseteq X$. Sei $x = e+\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in Y$. Durch $Sx := e+e_1+\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i$ $(x \in Y)$ wird eine nichtexpansive und fixpunktfreie Selbstabbildung von Y definiert (Lemma 1.5), aus der man durch Verknüpfung mit der metrischen Projektion von X auf Y eine nichtexpansive fixpunktfreie Selbstabbildung von X erhält im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Somit is X beschränkt.

Bemerkung: Satz 1.6 ist eine Teillösung von Problem 3.1.6 in [12], wo vermutet wird, dass man in Lemma 1.3 zur

Beschränktheit von X verschärfen kann.

2. Ein Fixpunktsatz vom Leray-Schauder-Typ für mengenwertige Banachkontraktionen

2.0. Einleitung: Die Leray-Schauder-Bedingung entstand bei der Untersuchung kompakter Abbildungen. Das ist noch spürbar bei den Fixpunktsätzen für mengenwertige Abbildungen, die die Leray-Schauder-Bedingung verwenden: Banachkontraktionen werden i.a. als Spezialfall kondensierender Abbildungen betrachtet (vgl. etwa [3],[6],[11]). Das führt dazu, dass nur konvexe kompakte Werte zugelassen werden können (bzw. azyklische kompakte Werte). In der vorliegenden Arbeit wird die Unterordnung von Banachkontraktionen unter kondensierende Abbildungen nicht ausgenutzt. Dadurch kann man beliebige abgeschlossene beschränkte Werte zulassen. Analoge Sätze wurden bereits von Nadler [9] bzw. Assad/Kirk [1] bewiesen, die statt der Leray-Schauder-Bedingung fordern, dass eine Selbstabbildung vorliegt bzw. zumindest der Rand des Definitionsbereiches in den Definitionsbereich abgebildet wird. In Banachräumen, die die Opial-Bedingung erfüllen, führt das Ergebnis für mengenwertige Banchkontraktionen über den Begriff "demiabgeschlossen" zu einem Fixpunktsatz für mengenwertige nichtexpansive Abbildungen mit kompakten Werten. Damit werden Resultate z.B. von Reich [11] verallgemeinert, die aus den oben beschriebenen Gründen die Konvexität der Werte benutzen.

Seien M, N metrische Räume. C(M) bezeichne die Menge der nichtleeren kompakten Teilmengen von M, AB(M) die Menge der nichtleeren abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von M.

AB(M) wird durch $D(H,K):=\max((\sup d(x,H):x\in K),(\sup d(y,K):y\in H))(H,K\in AB(M))$ mit einer Metrik versehen, der "Hausdorff-Metrik". Dabei sei $d(x,H):=\inf(d(x,y):y\in H)$.

Eine Abbildung $T:N \longrightarrow AB(M)$ heisst Banachkontraktion (nichtexpansiv), wenn für ein $k<1$ $(k=1)$ gilt $D(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$ $(x,y\in N)$.

2.1. Ein Fixpunktsatz für mengenwertige Banachkontraktionen

Satz 2.1: Sei E ein Banachraum, $U\subseteq E$ nichtleer, offen, $T:c\ell U \longrightarrow AB(E)$ Banachkontraktion mit: $T(c\ell U)$ beschränkt,

(LS) Es existiert ein $x_0\in U$, so dass aus $t(x-s)\in Tx-a$ folgt $t\leq 1$ für $x\in \partial U$. Dann hat T einen Fixpunkt.

Beweis: Betrachtet wird die Homotopie $H(t,x):=(1-t)x_0+tTx$, $t\in[0,1]$. Sei q die Kontraktionskonstante von T, $k\in(q,1)$ mit $k<2q$;

$R:=\sup(|x_0-x|:x\in T(c\ell U))$. P bezeichne die Menge aller Paare (L,u) mit $L\subseteq[0,1]$, $u:L\longrightarrow c\ell U$, für die gilt:

(i) $u(t)\in H(t,u(t))$ für $t\in L$,

(ii) $u(t)\in U$ für $t\in L\cap[0,1]$,

(iii) u ist auf $L\cap[0,1)$ lipschitzstetig mit Faktor $\frac{kR}{(1-k)q}$.

P ist nichtleer: $(\{0\},u_0)\in P$ mit $u_0\equiv x_0$. P wird mit einer Halbordnung versehen: $(L_1,u_1)\leq(L_2,u_2)$ genau dann, wenn $L_1\subseteq L_2$ und $u_2|L_1=u_1$. Offenbar ist für jede Kette $((L_i,u_i))_{i\in I}$ das Paar $(\bigcup_{i\in I} L_i,u)$ mit $u|L_i=u_i$ $(i\in I)$ eine obere Schranke. Nach dem Zorn'schen Lemma existiert also ein maximales Element (M,w) von P. $a:=\sup M$.

Sei $a \notin M$. (t_n) sei eine Folge aus M mit $\lim t_n = a$. Wegen der Lipschitzstetigkeit von w existiert $\lim w(t_n)$. Mit $\bar{M} := M \cup \{a\}$ und $\bar{w}(t) := \begin{cases} w(t) & \text{für } t \in M \\ \lim w(t_n) & \text{für } t = a \end{cases}$ gilt $(\bar{M}, \bar{w}) \in P$:

$$(i)\, d(H(a,\bar{w}(a)), \bar{w}(a)) \leq d(H(a,\bar{w}(a)), w(t_n)) + |w(t_n) - \bar{w}(a)| \leq$$
$$\leq D(H(a,\bar{w}(a)), H(t_n, w(t_n))) + d(H(t_n, w(t_n)), w(t_n)) + |w(t_n) -$$
$$-\bar{w}(a)| \leq D(H(a,\bar{w}(a)), H(a, w(t_n)) + D((1-t_n)x_o + t_n Tw(t_n),$$
$$(1-a)x_o + aTw(t_n)) + |w(t_n) - \bar{w}(a)| \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty .$$

(ii) folgt aus (i) und (LS), (iii) ist trivial.

Somit gilt $(\bar{M}, \bar{w}) \in P$ und $(\bar{M}, \bar{w}) > (M, w)$ im Widerspruch zur Konstruktion von (M, w), d.h. $a \in M$.

Es wird nun gezeigt, dass gilt $a=1$:

Sei $a < 1$. $r := d(\partial U, w(a))$; $s := \min(a + \frac{1}{2} \frac{r}{R}(1-k), 1)$. Es gilt

$$d(H(s,w(a)), w(a)) = d((1-s)x_o + sTw(a), w(a)) =$$
$$= \inf(|w(a) - (1-s)x_o - sx| : x \in Tw(a)) \leq$$
$$\leq \inf(|w(a) - (1-a)x_o - ax| + (s-a)|x_o - x| : x \in Tw(a)) \leq$$
$$\leq \inf(|w(a) - (1-a)x_o - ax| : x \in Tw(a)) + \sup((s-a)|x_o - x| : x \in Tw(a))$$
$$\leq d(H(a,w(a)), w(a)) + (s-a)R \leq \frac{r}{2}(1-k).$$

Durch Induktion wird eine Folge $(y_i)_{i=1,2\ldots}$ konstruiert mit $y_1 = w(a)$, $y_{i+1} \in H(s,y_i)$, $|y_{i+1} - y_i| \leq \frac{k}{q}\, d(H(s,y_i), y_i)$.

Seien $y_1 \ldots y_j$ konstruiert $(j \geq 2)$, Wegen der oben bewiesenen Ungleichung gilt $|y_2 - y_1| \leq \frac{k}{q}\, d(H(s,w(a)), w(a)) \leq \frac{k}{q} \frac{r}{2}(1-k)$.

Weiter gilt für $i=1\ldots j-1$: $|y_{i+1} - y_i| \leq \frac{k}{q}\, d(H(s,y_i), y_i) \leq$
$\leq \frac{k}{q}\, D(H(s,y_i), H(s,y_i), H(s,y_{i-1})) \leq k|y_i - y_{i-1}|$.

Es folgt durch Aufsummieren $|w(a) - y_j| \leq \frac{1}{1-k}|y_2 - y_1| \leq \frac{k}{q} \frac{r}{2}$, d.h. $y_j \in U$ nach Definition von r und k. Somit ist y_{j+1} wegen der Kontraktionsbedingung für T konstruierbar; $(y_i)_{i=1,2\ldots}$ ist nach (+) Cauchyfolge. $\bar{w}(e) := \lim y_i$.

$\bar{M}:=M\cup\{s\},\bar{w}(t):=\begin{cases} w(t) & \text{für } t\in M\\ \lim y_i & \text{für } t=s\end{cases}$. Es gilt $(\bar{M},\bar{w})\in P$, denn:

(i) $d(H(s,\bar{w}(s)),\bar{w}(s))\leq d(H(s,\bar{w}(s)),y_j)+|y_j-\bar{w}(s)|\leq$
$\leq D(H(s,\bar{w}(s)),H(s,y_{j-1}))+|y_j-\bar{w}(s)|\leq q|\bar{w}(s)-y_{j-1}|+$
$+|y_j-\bar{w}(s)|$ für $j\geq 2$, d.h. $\bar{w}(s)\in H(s,\bar{w}(s))$.

(ii) Für $s<1$ folgt aus (i) und (LS) $\bar{w}(s)\in U$.

(iii) Nach (+) kann man abschätzen $|\bar{w}(s)-w(a)|\leq\frac{1}{1-k}|y_2-y_1|\leq$
$\leq\frac{k}{q}\frac{r}{2}$, woraus für $s<1$ die geforderte Lipschitzstetigkeit folgt.

Es ist also $(\bar{M},\bar{w})\in P$, $(\bar{M},\bar{w})>(M,w)$ im Widerspruch zur Konstruktion von (M,w), d.h. $a=1$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen.

Prof. Dr. Riedrich (Dresden) möchte ich danken für wertvolle Hinweise bei der Anfertigung dieses Beweises.

2.2. Ein Fixpunktsatz für mengenwertige nichtexpansive Abbildungen

Definition: Sei E ein Banachraum. E erfüllt die Opial-Bedingung, wenn für jede schwach konvergente Folge (x_n) aus E gilt:

Aus $\text{wlim}\, x_n=x$ folgt $\limsup|x_n-x|<\limsup|x_n-a|$ für $a\neq x$.

Definition: Sei E ein Banachraum, $X\subseteq E$ nichtleer, $A:X\longrightarrow C(E)$. A heisst demiabgeschlossen in Null, wenn aus $(x_n)\subseteq X$, $\text{wlim}\, x_n=x$ und $\lim d(Ax_n,0)=0$ folgt $x\in X$ und $Ax=0$.

Satz: (Lami Dozo [8]) Sei E ein Banachraum, der die Opial-Bedingung erfüllt, $X\subseteq E$ nichtleer, schwach kompakt, $T:X\longrightarrow C(E)$ nichtexpansiv. Dann ist Id-T demiabgeschlossen in Null.

Aus diesem Satz und Satz 2.1 folgt

Satz 2.2: Sei E ein Banachraum, der der Opial-Bedingung genügt, $U \subseteq E$ nichtleer, offen, $c\ell U$ schwach kompakt, $T: c\ell U \longrightarrow C(E)$ nichtexpansiv mit

(LS) Es existiert ein $a \in U$, so dass aus $t(x-a) \in Tx-a$ folgt $t \leq 1$ für $x \in \partial U$. Dann hat T einen Fixpunkt.

Beweis: Nach Satz 2.1 hat die Gleichung

$$x_m \in (1-\frac{1}{m})Tx_m + \frac{1}{m}a \qquad (*)$$

für jedes $m \in N$ wenigstens eine Lösung x_m. Wählt man eine Folge (x_m) gemäss $(*)$ und eine schwach konvergente Teilfolge (y_m) von (x_m) mit wlim $y_m = y$, so liefert der zitierte Satz von Lami Dozo die Behauptung. ●

Bemerkung: Satz 2.2 ist verwandt mit einem Satz in [1], wo gefordert wird: $c\ell U$ schwach kompakt, sternförmig, $T(\partial U) \subseteq c\ell U$. Assad/Kirk benötigen für $c\ell U$ keine inneren Punkte.

Doz. Dr. S. Hahn (Dresden) möchte ich sehr herzlich danken für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Literatur

[1] N.A. ASSAD, W.A. KIRK: Fixed point theorems of contractive type, Pacific Journ. Math. 43(1972), 553-562.

[2] F.E. BROWDER: Nonexpansive nonlinear operators in Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. 54(1965), 1041-1044.

[3] P.M. FITZPATRICK, W.V. PETRYSHYN: A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 194(1974), 1-25.

[4] D. GÖHDE: Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, Math. Nachr. 30(1965), 251-258.

[5] D. GÖHDE: Elementare Bemerkungen zu nichtexpansiven Selbstabbildungen nicht konvexer Mengen im Hilbertraum, Math. Nachr. 63(1974), 331-335.

[6] S. HAHN: Zur Bedeutung des Fixpunktsatzes von Schauder für die Fixpunkttheorie nicht notwendig kompakter Abbildungen; erscheint in "Beiträge zur Analysis" (bzw. TU Dresden, Informationen 07-11-78).

[7] W.A. KIRK: A fixed point theorem for mappings which do not increase distance, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

[8] E. LAMI DOZO: Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition, Proc. Amer. Math. Soc. 38(1973), 286-289.

[9] S.B. NADLER Jr.: Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30(1969), 475-488.

[10] O. RAY: Nonexpansive mappings on unbounded convex domains, Bull. Acad. Polon. 26(1978), 241-248.

[11] S. REICH: Fixed points in locally convex spaces, Math. Zeitschrift 125(1972), 17-31.

[12] R. SCHÖNEBERG: Fixpunktsätze für einige Klassen kontraktionsartiger Abbildungen in Banachräumen über einen Fixpunktindex, eine Zentrummethode und die Fixpunkttheorie nichtexpansiver Abbildungen, Dissertation, Aachen 1977.

[13] D.R. SMART: Fixed point theorems, Cambridge University Press 1974.

Karl-Marx-Universität
Sektion Mathematik
Karl-Marx-Platz, 701 Leipzig
D D R

(Oblatum 9.8. 1979)