Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

L. V. Nakhmanson; N. N. Yakovlev

О бикомпактах, лежащих в σ-произведениях

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 22 (1981), No. 4, 705--719

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106113

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

22,4 (1981)

О БИКОМПАКТАХ, ЛЕЖАЩИХ В σ-ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Л.В. НАХМАНСОН, Н.Н. ЯКОВЛЕВ

Содержание: В работе дается топологическая характеристика бикомпактам, лежащим в σ-произведении гильбертовых кубов: это в точности бикомпакты, допускающие консервативное покрытие компактами; также получено несколько других результатов.

Ключевые слова: Бикомпакт, σ-произведение, консервативное семейство множеств, наследственная слабая паракомпактность.

Классификация: 54B10, 54D30.

В работе изучаются бикомпакты, лежащие в σ-произведении бикомпактов данного веса. Основным результатом работы является характеристика бикомпактов из σ-произведения компактов (то есть метризуемых бикомпактов) как пространства допускающих консервативное покрытие компактами. Это ответ на вопрос из статьи [1].

Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство топологических пространств, и в каждом X_α зафиксирована точка ξ_α. σ-произведением пространств X_α с центром в точке (ξ_α) называется подмножество тихоновского произведения $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ состоящее из всех таких точек $x = (x_\alpha)$, что $x_\alpha \neq \xi_\alpha$ лишь для конечного числа индексов $\alpha \in A$. Это пространство будем обозначать $\sigma(X_\alpha, \xi_\alpha)$.

Полезным для изучения бикомпактов в σ-произведениях оказалось понятие консервативности. Напомним, что семейство $\mathcal{F}=\{F\}$ называется консервативным, если для любого подсемейства $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ выполняется равенство

$$[\cup\{F: F\in\mathcal{F}'\}] = \cup\{[F]: F\in\mathcal{F}'\}.$$

<u>Теорема</u>. Бикомпакт X гомеоморфно вкладывается в σ-произведение бикомпактов веса τ тогда и только тогда, когда существует консервативное покрытие X бикомпактами веса τ.

Для простоты изложения разберем случай $\tau=\aleph_0$. Пространство, допускающее консервативное покрытие компактами, будем для краткости называть пространством с КПК. Теорема при $\tau=\aleph_0$ будет звучать следующим образом.

<u>Теорема 1</u>. Бикомпакт X гомеоморфно вкладывается в σ-произведение компактов тогда и только тогда, когда X с КПК.

Если X гомеоморфно вкладывается в σ-произведение компактов, то X с КПК. Это доказано в работе второго автора [1]. Для доказательства второго утверждения нам понадобиться ряд лемм.

Напомним, что C называется ко-нуль множеством, если $C=f^{-1}(R\setminus\{0\})$ при некотором непрерывном отображении $f: X\to R$. В нормальном пространстве ко-нуль множества совпадают с открытыми F_σ-множествами.

Система $\mathcal{F}=\{F\}$ T_0-разделяет точки X, если для любых $x,y\in X$ найдется $F\in\mathcal{F}$ такой, что $\{x,y\}\cap F\neq\emptyset$ и $\{x,y\}\cap$ $\cap(X\setminus F)\neq\emptyset$, [2].

<u>Лемма 1</u>. Бикомпакт X гомеоморфно вкладывается в σ-произведение компактов $\sigma(Q_\alpha,\xi_\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует система ко-нуль множеств в X, имеющая вид

$\{C_{\alpha,n}: \alpha \in A,\ n < \omega\}$, T_0-разделяющая точки X и такая, что система $\{C_\alpha = \bigcup_{n<\omega} C_{\alpha,n};\ \alpha \in A\}$ точечно-конечна.

Необходимость. Пусть X гомеоморфно Y и $Y \subset \sigma(Q_\alpha, \xi_\alpha)$, π_α -проекция $\Pi\{Q_\alpha : \alpha \in A\}$ на Q_α, а $\{V_{\alpha,n} : n < \omega\}$- счетная база $Q_\alpha \setminus \{\xi_\alpha\}$. Тогда система

$$C_{\alpha,n} = \pi_\alpha^{-1}(V_{\alpha,n}) \cap Y : \alpha \in A,\ n < \omega\}$$ - искомая.

Достаточность. Пусть существует система $\{C_{\alpha,n} : \alpha \in A,$ $n < \omega\}$ с указанными свойствами и $\{f_{\alpha,n} : \alpha \in A, n < \omega\}$ -система функций таких, что $f_{\alpha,n} : X \to [0, \frac{1}{2^n}]$ и $C_{\alpha,n} = f_{\alpha,n}^{-1}((0, \frac{1}{2^n}])$. Для каждого $\alpha \in A$ положим $Q_\alpha = Q$, где $Q = \prod_{n<\omega} [0, \frac{1}{2^n}]$ - гильбертов кирпич. Рассмотрим диагональные произведения: $f_\alpha = \triangle_{n<\omega} f_{\alpha,n}, f_\alpha : X \to Q_\alpha$ и $f = \triangle_{\alpha \in A} f_\alpha$, $f : X \to \Pi\{Q_\alpha : \alpha \in A\}$. Назовем ξ_α точку $(0, 0, \ldots)$ на Q_α. Заметим, что $\pi_\alpha(f(x)) \neq \xi_\alpha$ если и только если $x \in \bigcup_{n<\omega} C_{\alpha,n} = C_\alpha$. Поэтому $f(X) \subset \sigma(Q_\alpha, \xi_\alpha)$. Так как семейство $\{f_{\alpha,n}\}$ разделяет точки, то f - уплотнение, а значит и гомеоморфизм. Лемма доказана.

С этого места и дальше, если нет особых оговорок, X будет обозначать бикомпакт с КПК $\mathcal{F}$, причем можно считать, что $\mathcal{F}$ принадлежат счетные объединения своих элементов. Как показано в [1], в X плотно множество точек счетного локального веса, то есть точек, у которых в X есть окрестность счетного веса. Назовем это множество G. Заметим, что G открыто.

Пусть A, B, C - подмножества X. Будем писать $\langle A, B, C\rangle$ если $B \subset A$ и $A \cap C = B \cap C$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{U}$ - открытое подмножество G. Тогда для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ такой, что $F \subset \tilde{F}$ и $\tilde{F} \cap \mathcal{U}$ - открыто.

Доказательство. Если $F \cap \mathcal{U} = \emptyset$, то достаточно положить $\tilde{F} = F$. В противном случае для каждой точки $x \in F \cap \mathcal{U}$ найдем окрестность счетного веса $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{U}$. Пространство $F \cap \mathcal{U}$ со счетной базой, поэтому $F \cap \mathcal{U} \subset \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}(x_n)$. Пусть S' счетно и плотно в $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}(x_n)$. Для каждой точки $s \in S$ зафиксируем компакт $F_s \in \mathcal{F}$ так, чтобы $s \in F_s$. Положим $F_0 = F$ а $F_1 = \bigcup_{s\in S} F_s$. Система $\mathcal{F}$ консервативна, поэтому $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}(x_n) \subset [S] \subset F_1$. Тогда $F_0 \cap \mathcal{U} \subset int\,(F_1 \cap \mathcal{U})$. Система $\mathcal{F}$ содержит объединения счетного числа своих элементов, поэтому $F_1 \in \mathcal{F}$. Продолжая построение таким же образом, получим последовательность $\{F_n : n < \omega\}$ компактов из $\mathcal{F}$ такую, что $F_n \cap \mathcal{U} \subset int(F_{n+1} \cap \mathcal{U})$. Положим $\tilde{F} = \bigcup_{n<\omega} F_n$. Тогда и $\tilde{F} \in \mathcal{F}$, $F \subset \tilde{F}$ и $\tilde{F} \cap \mathcal{U}$ – открыто. Лемма доказана.

Лемма 3. Существует КПК $\tilde{\mathcal{F}}$ на X такое, что

(а) $\{\Phi \cap G : \Phi \in \tilde{\mathcal{F}}\}$ – дизъюнктное семейство открытых в X множеств.

(б) Для любого $\Phi \in \tilde{\mathcal{F}}$ найдется $F_\Phi \in \mathcal{F}$ такой, что

$$\langle F_\Phi, \Phi, X \setminus G \rangle .$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что система $\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap G$ открыто и непусто$\}$ образует КПК на X. Пусть $|G| = \tau$, и λ – первое порядковое число мощности τ^+.

Допустим, что для всех $\beta < \beta_0$, $\beta_0 < \lambda$ выбраны множества $F_\beta \in \mathcal{F}_1$ так, что $(G \cap F_\beta) / \cup\{F_{\beta'} : \beta' < \beta\} \neq \emptyset$. Если $G \subset \cup\{F_\beta : \beta < \beta_0\}$, то построение закончим, в противном случае, пусть $F_{\beta_0} \in \mathcal{F}_1$ и $(G \cap F_{\beta_0}) / \cup\{F_\beta : \beta < \beta_0\} \neq \emptyset$. Если ни на каком ординале мощности меньше τ^+ процесс не оборвется, то мы получим, что $|G| \geq |\{\beta : \beta < \lambda\}| = \tau^+$. Это невозможно, и поэтому $G \subset \cup\{F_\beta : \beta < \beta_0\}$ при некотором $\beta_0 < \lambda$.

Положим $\Phi_\beta = F_\beta / (G \cap \bigcup\{F_{\beta'} : \beta' < \beta\})$ и $\tilde{\mathcal{F}} = \{\Phi_\beta : \beta < \beta_0\}$. Стандартным образом проверяется, что $G \subset \bigcup\{\Phi_\beta : \beta < \beta_0\}$. Условие (б) выполняется, потому что из определения Φ_β вытекает $\langle F_\beta, \Phi_\beta, X \setminus G \rangle$ для любого $\beta < \beta_0$. Справедливо равенство $\Phi_\beta \cap G = (F_\beta \cap G) \setminus \bigcup\{F_{\beta'} : \beta' < \beta\}$, и поэтому множество $\Phi_\beta \cap G$ открыто, как разность открытого и замкнутого множеств. Если $\beta_1 < \beta_2 < \beta_0$, то

$$(\Phi_{\beta_1} \cap G) \cap (\Phi_{\beta_2} \cap G) \subset (F_{\beta_1} \cap G) \cap (G \setminus F_{\beta_1}) = \emptyset ,$$

значит условие (а) выполнено.

Проверим консервативность семейства $\tilde{\mathcal{F}}$. Пусть $\mathcal{F}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ и $x \in [\bigcup\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}'\}]$. Если $x \in G$, то $x \in \Phi$ для некоторого $\Phi \in \tilde{\mathcal{F}}$. Тогда $\Phi \cap G$ будет окрестностью x, которая пересекается лишь с одним элементом $\tilde{\mathcal{F}}$, а именно с Φ. В этом случае, непременно, $x \in \Phi \in \mathcal{F}'$.

Если $x \in X \setminus G$, то для каждого $\Phi \in \mathcal{F}'$ зафиксируем F_Φ так, чтобы $\langle F_\Phi, \Phi, X \setminus G \rangle$. Так как $\Phi \subset F_\Phi$, то $x \in [\bigcup\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}'\}] \subset [\bigcup\{F_\Phi : \Phi \in \mathcal{F}'\}] = \bigcup\{F_\Phi : \Phi \in \mathcal{F}'\}$. Значит $x \in F_\Phi$ при некотором Φ из $\mathcal{F}'$. Тогда

$$x \in F_\Phi \cap (X \setminus G) = \Phi \cap (X \setminus G) \subset \Phi .$$

Итак, семейство $\mathcal{F}'$ консервативно и покрывает G, а G плотно в X, следовательно $\tilde{\mathcal{F}}$ - КПК на X. Лемма доказана.

Введем несколько новых обозначений.

Положим $X_1 = X$, $G_1 = G$ и по индукции определим G_α - множество точек счетного локального веса X_α, а $X_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha' < \alpha} G_{\alpha'}$. Легко проверить, что $X_{\alpha+1} \subset X_\alpha$ и X_α замкнуты в X.

Пусть $\mathcal{F}$ - непустое замкнутое подмножество X. Рассмотрим множество $A = \{\alpha : X_\alpha \cap F \neq \emptyset\}$.

<u>Утверждение 1</u>. A имеет максимальный элемент.

<u>Доказательство</u>. Пусть $M(F) = \cap\{X_\alpha \cap F : \alpha \in A\}$. Так как $\{X_\alpha \cap F : \alpha \in A\}$ - центрированное семейство на F, то $M(F) \neq \emptyset$. Пусть $x \in M(F)$ и $x \in G_{\alpha_0}$. Тогда $x \notin X_\alpha$ при $\alpha > \alpha_0$. Следовательно $X_\alpha \cap F = \emptyset$ при $\alpha > \alpha_0$. Значит α_0 - искомый максимальный элемент и утверждение доказано.

Обозначим $\alpha(F) = \alpha_0$. Справедливо равенство $X = \cup\{G_\alpha : \alpha \leq \alpha(X)\}$.

<u>Утверждение 2</u>. $M(F)$ -компакт.

<u>Доказательство</u>. Из определения $\alpha(F)$ следует, что $M(F) \subset X_{\alpha(F)} \setminus X_{\alpha(F)+1} = G_{\alpha(F)}$, значит, $M(F)$ - бикомпакт, каждая точка которого имеет окрестность счетного веса. Утверждение доказано.

Для каждого $\alpha \leq \alpha(X)$ рассмотрим системы $\mathcal{F}_\alpha$ такие, что:

1) F_α - КПК на X_α.

2) система $\{\Phi \cap U_\alpha : \Phi \in \mathcal{F}_\alpha\}$ состоит из попарно дизъюнктных открытых в X_α множеств.

3) Для любого $\Phi \in \mathcal{F}_\alpha$ найдется $F_\Phi \in \mathcal{F}$ такой, что $\langle F_\Phi, \Phi, X_{\alpha+1} \rangle$.

Существование систем $\mathcal{F}_\alpha$ следует из леммы 3 и из того, что X_α - бикомпакты с КПК.

<u>Лемма 4</u>. $\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \leq \alpha(X)\}$ - консервативное семейство.

<u>Доказательство</u>. Допустим, что для любого α, $\alpha < \alpha_0$, $\alpha_0 \leq \alpha(X)$ доказано, что семейство $\cup\{\mathcal{F}_{\alpha'} : \alpha' \leq \alpha\}$ консервативно. Покажем, что тогда и $\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \leq \alpha_0\}$ - консер-

вативное семейство.

Если $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$, то $\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \le \alpha_0\} = \mathcal{F}_{\alpha_1} \cup (\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \le \alpha_1\})$ консервативно как сумма двух консервативных семейств.

Пусть α_0 - предельный ординал. $M = \cup\{\Phi : \Phi \in \bigcup_{\alpha \le \alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\}$, где $\mathcal{F}'_\alpha \subset \mathcal{F}_\alpha$. Для точки $x \in [M]$ покажем, что $x \in M$. Рассмотрим два случая.

(а) $x \in G_\alpha$ при некотором $\alpha < \alpha_0$.

В силу того, что $X_{\alpha+1}$ замкнуто, и $X_{\alpha+1} \cap G_\alpha = \Phi$, множество $X \setminus X_{\alpha+1}$ будет окрестностью x, которая может пересекаться лишь с элементами системы $\bigcup_{\alpha' \le \alpha} \mathcal{F}'_\alpha$. Но последняя консервативна по предположению и поэтому в случае (а) $x \in M$.

(б) $x \in X_{\alpha_0}$.

Если $x \in [\cup\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}'_{\alpha_0}\}]$, то $x \in M$ в силу консервативности $\mathcal{F}_{\alpha_0}$. В противном случае $x \in [\cup\{\Phi : \Phi \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\}]$. Воспользуемся свойством (3) систем $\mathcal{F}_\alpha$, и для каждого Φ из $\mathcal{F}'_\alpha$ зафиксируем $F_\Phi \in \mathcal{F}$ так, чтобы $\langle F_\Phi, \Phi, X_{\alpha+1}\rangle$. Если $\Phi \subset F_\Phi$, то и $\cup\{\Phi : \Phi \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\} \subset \cup\{F_\Phi : \Phi \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\}$.

Значит, $x \in [\cup\{F_\Phi : \Phi \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\}] = \cup\{F_\Phi, \Phi \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \mathcal{F}'_\alpha\}$ и $x \in F_\Phi$ для некоторого $\Phi \in \mathcal{F}'_\alpha$, $\alpha < \alpha_0$. Ординал α_0 - предельный, поэтому если $\alpha < \alpha_0$, то и $\alpha + 1 < \alpha_0$. Тогда $X_{\alpha+1} \supset X_{\alpha_0}$. Следовательно

$$x \in F_\Phi \cap X_{\alpha_0} \subset F_\Phi \cap X_{\alpha+1} = \Phi \cap X_{\alpha+1} \subset M.$$

Таким образом, док[азано], что система $\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \le \alpha_0\}$ консервативна при любом $\alpha_0 \le \alpha(X)$, в частности консервативно и семейство $\cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \le \alpha(X)\}$. Лемма доказана.

Известно, что бикомпакт является корсоновским тогда и только тогда, когда на нем существует точечно-счетная T_0-

разделяющая точки система ко-нуль множеств.

Лемма 5. Бикомпакт с КПК – корсоновский.

Доказательство. Построим систему ко-нуль множеств с указанными свойствами.

Пусть $\mathcal{F}^* = \cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \leq \alpha(X)\}$, где $\mathcal{F}_\alpha$ – семейства, определенные перед леммой 4. В лемме 4 доказано, что $\mathcal{F}^*$ – консервативное семейство. Рассмотрим систему $\{F \cap G_\alpha : F \in \mathcal{F}_\alpha\}$ при фиксированном $\alpha \leq \alpha(X)$. Элементы этой системы назовем $G_{\alpha\beta}$. Они открыты в X_α, $G_\alpha = \bigcup_\beta G_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta_1} \cap G_{\alpha\beta_2} = \emptyset$ при $\beta_1 \neq \beta_2$. Пусть A – подмножество X. Стандартным образом определим антизвезду $s(A, \mathcal{F}^*)$ множества A относительно семейства $\mathcal{F}^*$: $s(A, \mathcal{F}^*) = X \setminus \cup\{F \in \mathcal{F}^* : F \cap A = \emptyset\}$. Рассмотрим открытое покрытие $\{s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)\}$, где α и β произвольны. Пусть $x \in F \in \mathcal{F}^*$, тогда из того, что $x \in s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)$ следует, что $F \cap G_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Значит для того, чтобы показать, что система $\{s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)\}$ точечно-счетна, достаточно убедиться, что компакт F пересекает не более чем счетное число $G_{\alpha\beta}$. Пусть $L = \{\alpha : F \cap G_\alpha \neq \emptyset\}$, тогда $\{F \cap X_\alpha : \alpha \in L\}$ – строго убывающая система замкнутых множеств компакта F. Значит, $|L| \leq \aleph_0$. При фиксированном α компакт F пересекает не более чем счетное число $G_{\alpha\beta}$, так как F наследственно сепарабелен. Следовательно F пересекает не более чем счетное число $G_{\alpha\beta}$ при произвольных α и β, и система $\{s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)\}$ точечно-счетна.

Зафиксируем $G_{\alpha\beta}$ и рассмотрим замкнутое множество $Y = (X \setminus s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)) \cup G_{\alpha\beta}$. Так как $G_{\alpha\beta} = Y \cap S(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)$, то $G_{\alpha\beta}$ открыто в Y. Пусть $V \subset [V] \subset G_{\alpha\beta}$ и V – ко-нуль множество в $G_{\alpha\beta}$. Но $G_{\alpha\beta}$ открыто в Y, поэтому

V - ко-нуль множество и в Y. По теореме Урысона о продолжении, найдется ко-нуль множество V' в X такое, что $V' \subset s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)$ и $V' \cap G_{\alpha\beta} = V$. В пространстве $G_{\alpha\beta}$ есть счетная база из ко-нуль множеств, пусть $\{V^n_{\alpha\beta} : n < \omega\}$ - система ко-нуль множеств в X такая, что семейство $\{G_{\alpha\beta} \cap V^n_{\alpha\beta} : n < \omega\}$ - база $G_{\alpha\beta}$, и $V^n_{\alpha\beta} \subset s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)$. Система $\{s(G_{\alpha\beta}, \mathcal{F}^*)\}$ точечно-счетна, поэтому точечно-счетна и система $\{V^n_{\alpha\beta}\}$, где α, β, n произвольны. Легко видеть, что система $\{V^n_{\alpha\beta}\}$ T_0-разделяет точки X. Лемма доказана.

Переходим к доказательству последней леммы.

Лемма 6. Пусть Φ - точечно-счетная система открытых F_σ-множеств в X. Тогда существует точечно-конечная система $\tilde{\Phi}$, являющаяся укрупнением Φ, причем каждый элемент $\tilde{\Phi}$ - есть объединение не более чем счетного числа элементов системы Φ.

Доказательство. Будем проводить индукцию по мощности Φ. При $|\Phi| = \aleph_0$ достаточно положить $\tilde{\Phi} = \{\cup \Phi\}$. Пусть $|\Phi| = \tau$, и любую точечно-счетную систему ко-нуль множеств мощности меньше τ мы можем, укрупняя по счетному числу элементов, превращать в точечно-конечную. Вполне упорядочим Φ минимальным образом: $\Phi = \{V_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$.

По условию $V_\alpha = \bigcup_{n<\omega} K_{\alpha n}$, где каждое $K_{\alpha n}$ замкнуто в X.

Если F замкнуто в X, то так же, как в утверждении 2, положим $M(F) = F \cap X_{\alpha(F)}$. Пусть $M(F) = \emptyset$, если $F = \emptyset$. Если $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k} \in \Phi$, то пусть

$$M(V_{\alpha_1} \cap \ldots \cap V_{\alpha_k}) = \bigcup_{n_i<\omega} M(K_{\alpha_1 n_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_k n_k}).$$

Заметим, что $M(V_{\alpha_1}\cap\ldots\cap V_{\alpha_k})$ сепарабельно как объединение счетного числа компактов.

Пусть $\alpha<\omega(\tau)$. Положим $\Phi^0_\alpha=\{V_{\alpha'}:\alpha'\le\alpha\}$. Если система Φ^n_α определена, то $\Phi^{n+1}_\alpha=\{V_{\alpha'}\in\Phi:$ существуют элементы $V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_k}$ из системы Φ^n_α такие, что $V_{\alpha'}\cap M(V_{\alpha_1}\cap\ldots\cap V_{\alpha_k})\neq\emptyset\}$. Назовем Φ_α семейство $\bigcup_{n<\omega}\Phi^n_\alpha$. Система Φ_α обладает таким свойством: если $V_{\alpha'}\in\Phi$ и $V_{\alpha'}\cap M(V_{\alpha_1}\cap\ldots\cap V_{\alpha_k})\neq\emptyset$ для некоторых $V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_k}\in\Phi_\alpha$, $k<\omega$, то $V_{\alpha'}\in\Phi_\alpha$.

Оценим мощность Φ_α. Ясно, что $|\Phi^0_\alpha|=|\alpha|<\tau$. Пусть доказано, что $|\Phi^n_\alpha|=|\alpha|$. Тогда

$$|\{\{V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_k}\}:V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_k}\in\Phi^n_\alpha\}|=|\Phi^n_\alpha|=|\alpha|.$$

В силу того, что $M(V_{\alpha_1}\cap\ldots\cap V_{\alpha_k})$ сепарабельно, а система Φ точечно-счетна и состоит из открытых множеств

$$|\{V_{\alpha'}\in\Phi:V_{\alpha'}\cap M(V_{\alpha_1}\cap\ldots\cap V_{\alpha_k})\neq\emptyset\}|\le\aleph_0.$$

Поэтому $|\Phi^n_\alpha|\le|\alpha|\cdot\aleph_0=|\alpha|$, и, следовательно, $|\Phi_\alpha|=|\alpha|$. Рассмотрим системы $\overline{\Phi}_\alpha=\Phi_\alpha\setminus\bigcup_{\alpha'<\alpha}\Phi_{\alpha'}$, $\alpha<\omega(\tau)$. Стандартным образом проверяется, что $\Phi=\bigcup_{\alpha<\omega(\tau)}\overline{\Phi}$. Так как $|\overline{\Phi}_\alpha|\le|\Phi_\alpha|<\tau$, то воспользуемся допущением индукции, и, объединяя по счетному числу элементов, систему $\overline{\Phi}_\alpha$ укрупним в точечно-конечную систему $\widetilde{\Phi}_\alpha$ при каждом $\alpha<\omega(\tau)$.

Положим $\widetilde{\Phi}=\bigcup_{\alpha<\omega(\tau)}\widetilde{\Phi}_\alpha$. Ясно, что $\widetilde{\Phi}$ - укрупнение Φ. Докажем, что $\widetilde{\Phi}$ - точечно-конечная система. Пусть наоборот: $\mathcal{U}_n\in\overline{\Phi}_{\alpha_n}$, $\alpha_n<\alpha_{n+1}$ при $n<\omega$ и $\bigcap_{n<\omega}\mathcal{U}_n\neq\emptyset$.

Пусть $\mathcal{U}_n=\bigcup_{\ell<\omega}K_{n,\ell}$, где $K_{n,\ell}$ замкнуты в X. Тогда непусты множества $\{K_{1,\ell_1}\cap\ldots\cap K_{n,\ell_n}:n<\omega\}$ при некоторых ℓ_n. Покажем, что для любого n выполнено неравенство

$$(*)\quad \alpha(K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n,l_n}) > \alpha(K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n+1,l_{n+1}}).$$

Действительно, $K_{n+1,l_{n+1}} \subset \mathcal{U}_{n+1} \in \bar{\Phi}_{\alpha_{n+1}}$ и, по предложению, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, поэтому $\Phi = \mathcal{U}_{n+1} \cap M(\mathcal{U}_1\cap\ldots\cap\mathcal{U}_n) \supset$

$$\supset K_{n+1,l_{n+1}} \cap M(K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n,l_n}) =$$

$$= K_{n+1,l_{n+1}} \cap (X_\alpha(K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n,l_n}) \cap (K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n,l_n}) =$$

$$= X_\alpha(K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n,l_n}) \cap (K_{1,l_1}\cap\ldots\cap K_{n+1,l_{n+1}}).$$

А это и означает, что неравенство $(*)$ выполнено. Таким образом получена бесконечная убывающая цепь во множестве ординалов. Противоречие. Значит $\tilde{\Phi}$ - искомое укрупнение. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 5 следует, что в X существует точечно-счетная система ко-нуль множеств, T_0 - разделяющая точки X . Лемма 6 показывает, что эта система удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, X гомеоморфно вкладывается в σ-произведение компактов. Теорема 1 доказана.

Теорема для $\tau > \aleph_0$ доказывается совершенно аналогично. Методы, примененные в лемме 6, сходны с методами работ [6],[7].

Так как непрерывное отображение бикомпакта в хаусдорфовое пространство замкнуто, то справедливо следствие

Следствие. Непрерывный хаусдорфовый образ бикомпакта из σ-произведения бикомпактов веса τ гомеоморфно вкладывается в такое же σ-произведение.

В работе [1] ставится вопрос, верно ли, что всякий бикомпакт с КПК вкладывается в σ-произведение отрезков. В такое σ-произведение не вкладывается уже гильбертов куб $I^{\aleph_0}$, так как иначе он бы вкладывался в счетное σ-произведение отрезков, что не так. Теорема 1, однако, позволяет утверждать, что всякий бикомпакт с КПК вкладывается в σ-произведение гильбертовых кирпичей.

Следующая теорема будет иметь ряд приложений.

Теорема 2. Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство T_1-пространств, $\xi_\alpha \in X_\alpha$ и для любого конечного $\varphi \subset A$ произведение $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in \varphi\}$ наследственно слабо паракомпактно. Тогда $\sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, A)$ также наследственно слабо паракомпактно.

Доказательство. Пусть $Z = \sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, A)$. Назовем L множество всех конечных подмножеств A. Если $B \subset A$, то π_B - проекция Z на $\sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, B)$. Для $\varphi \subset A$ положим
$U(\varphi) = \{x \in Z : \pi_\alpha(x) \in X_\alpha \setminus \{\xi_\alpha\}$ при $\alpha \in \varphi\}$,
$F(\varphi) = \{x \in U(\varphi) : \pi_\alpha(x) = \xi_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus \varphi\}$.
Если $\varphi \in L$, то $U(\varphi)$ непусто и открыто в Z, а при $|\varphi| \geq \aleph_0$ $U(\varphi) = \emptyset$. Система $\{U(\varphi) : \varphi \in L\}$ точечно-конечна. В самом деле, пусть $\Phi \subset L$ и $|\Phi| \geq \aleph_0$, тогда и $|\bigcup\{\varphi : \varphi \in \Phi\}| \geq \aleph_0$. Справедливы равенства $\bigcap\{U(\varphi) : \varphi \in \Phi\} = U(\bigcup\{\varphi : \varphi \in \Phi\}) = \emptyset$, что и означает точечную конечность. Важно для нас равенство

$$(1) \qquad \bigcup\{F(\varphi) : \varphi \in L\} = Z .$$

Пусть γ - произвольное открытое семейство в Z. Для доказательства теоремы достаточно в γ вписать открытое точечно-конечное семейство λ такое, что $\bigcup\lambda = \bigcup\gamma$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{K}(\varphi) = \{V \cap F(\varphi) : V \in \gamma\}$, где $\varphi \in L$. Пространство $F(\varphi)$ гомеоморфно $\Pi\{X_\alpha \setminus \{\xi_\alpha\} : \alpha \in \varphi\}$, значит существует открытое в $F(\varphi)$ точечно-конечное семейство $\mathcal{M}(\varphi)$ вписанное в $\mathcal{K}(\varphi)$ и такое, что $\cup\{V: V\in\mathcal{M}(\varphi)\}=\cup\{V: V\in\mathcal{K}(\varphi)\}$. Пусть $\mathcal{M}'(\varphi)=\{\pi_\varphi(V): V\in\mathcal{M}(\varphi)$. Это семейство открыто в $\Pi\{X_\alpha\setminus\{\xi_\alpha\}:\alpha\in\varphi\}$ и точечно-конечно. Для каждого $V\in\mathcal{M}(\varphi)$ зафиксируем открытое в Z множество $\tilde{V}$ так, чтобы $\tilde{V}$ содержалось в каком-нибудь элементе γ и $\tilde{V}\cap F(\varphi)=V$. Пусть $\bar{V}=\tilde{V}\cap\mathcal{U}(\varphi)\cap\cap(\pi_\varphi(V)\times\sigma(X_\alpha,\xi_\alpha,A\setminus\varphi))$. Тогда $\bar{V}$ открыто в Z, $\bar{V}\subset\mathcal{U}(\varphi)$, $\pi_\varphi(\bar{V})=\pi_\varphi(V)$ и $\bar{V}\cap F(\varphi)=V$. Система $P(\varphi)=\{\bar{V}: V\in\mathcal{M}(\varphi)\}$ комбинаторно вписана в систему $R(\varphi)=\{\pi_\varphi(V)\times\sigma(X_\alpha,\xi_\alpha, A\setminus\varphi): V\in\mathcal{M}(\varphi)\}$. А система $R(\varphi)$ точечно-конечна в силу точечной конечности $\mathcal{M}'(\varphi)$. Следовательно, и система $P(\varphi)$ точечно-конечна. Так как $\cup P(\varphi)\subset\mathcal{U}(\varphi)$, то точечно-конечна и система $\lambda=\cup\{P(\varphi):\varphi\in L\}$. Семейство λ - искомое: оно открыто в Z, вписано в γ, а в силу (1) $\cup\lambda=\cup\gamma$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и того, что компакт наследственно слабо паракомпактен, вытекает

Следствие. Бикомпакт с КПК наследственно слабо паракомпактен.

Также из теоремы 1 следует, что бикомпакт с КПК обладает свойством Фреше, в частности теснота его счетна. Оказывается верна более общая теорема.

Теорема 3. Если бикомпакт допускает консервативное покрытие бикомпактами счетной тесноты, то и его теснота счетна.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ - покрытие бикомпакта X бикомпактами счетной тесноты, и $\mathcal{F}$ консервативно.

Допустим, что $t(X)>\aleph_0$, тогда в X найдется свободная в смысле Архангельского последовательность $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Обозначим $[A]_{\aleph_0}$ множество $\bigcup\{[A'] : A' \subset A$ и $|A'| = \aleph_0\}$. Нетрудно убедиться, что для любого бикомпакта $\Phi \subset X$ счетной тесноты найдется $\alpha(\Phi) < \omega_1$ такое, что $\Phi \cap [\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha(\Phi)\}_{\aleph_0}] = \emptyset$.

По индукции построим последовательность $\{F_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{F}$ такую, что

$$x_\alpha(F_1) \in F_2,\ x_\alpha(F_1 \cup F_2) \in F_3,\ x_\alpha(F_1 \cup \ldots \cup F_n) \in F_{n+1}, \ldots .$$

Так как X бикомпакт, то найдется точка x^* предельная для множества $\{x_\alpha(F_1 \cup \ldots \cup F_n)\}$. Тогда для любого $m < \omega$ $x^* \in [\{x_\alpha(F_1 \cup \ldots \cup F_n) : n \geq m\}] \subset [\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha(F_1 \cup \ldots \cup F_m)\}]_{\aleph_0}$.

Следовательно, x^* не принадлежит $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, хотя $x^* \in [\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n]$. Это противоречит консервативности покрытия $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

Литература

[1] N.N. YAKOVLEV: On bicompacta in Σ-products and related spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980), 263-283.

[2] H. ROSENTHAL: The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces, Comp. Math. 28 (1974), 83-111.

[3] P. SIMON: On continuous images of Eberlein compacts, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 179-194.

[4] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе, Успехи Мат. Наук 31(1976). 17-32.

[5] D. PREIS, P. SIMON: A weakly pseudocompact subspace of Banach space is weakly compact, Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 603-609.

[6] R.O. DAVIS: Covering the Plane with Denumerably Many Curves, J. London Math. Soc. 38(1963), 433-438.

[7] K. ALSTER: Almost Disjoint Families and some Characterizations of Alephs, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 25(1977), 1203-1206.

Уральский университет имени А.М. Горького, Свердловск, СССР

(Oblatum 19.5. 1981)