Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

N. G. Okromeshko

О пространствах, каждое факторное отображение на которые псевдооткрыто

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 23 (1982), No. 1, 1--10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106128`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

23,1 (1982)

О ПРОСТРАНСТВАХ, КАЖДОЕ ФАКТОРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА КОТОРЫЕ ПСЕВДООТКРЫТО

Н.Г. ОКРОМЕШКО

Содержание. Дается внутренняя характеристика пространств, каждое факторное отображение на которые псевдооткрыто. В частности, характеризуются регулярные пространства, принадлежащие к этому классу.

Ключевые слова: Факторное отображение, псевдооткрытое отображение.

Classification: 54B15, 54C10

Интерес к псевдооткрытым отображениям, введеным А.В. Архангельским [2], вызван тем, что, занимая по своим свойствам промежуточное положение между факторными и открытыми отображениями, они позволяют установить существенные связи между широкими классами топологических пространств [3, 4]. Известно, что всякое псевдооткрытое отображение факторно [2], но обратное, вообще говоря, не верно. Существуют, однако, пространства, внутренняя структура которых гарантирует, что каждое факторное отображение на них псевдооткрыто (таковы, например, хаусдорфовы пространства Фреше-Урысона). Не трудно заметить, что свойство быть хаусдорфовым пространством Фреше-Урысона не является в этом смысле необходимым: к тому же классу относятся пространства, порядок разреженности которых равен 2 [x].

В данной заметке при помощи некоторого обобщения классического понятия последовательности решается задача нахождения необходимых и достаточных условий того, чтобы каждое факторное отображение на пространство было псевдооткрытым.

Если X - топологическое пространство, $A \subset X' \subset X$, то $[A]$ и $[A]_{X'}$ означают, соответственно, замыкание A в X и в X' (с топологией, индуцированной из X); $GA = [A] \setminus A$ - нарост A в X. $\mathrm{Int}\, A$ - внутренность A в X. Символом Λ обозначается пустое множество. Все отображения предполагаются непрерывными отображениями "на". В остальном терминология и обозначения те же, что в [1].

<u>Определение 1</u>. Множество $\xi \subset X$ называется p-последовательностью, сходящейся к точке $x \in X$, если $x \in G\xi$ и x изолирована в $G\xi$. В этом случае пишем: $\xi \longrightarrow x$.

<u>Определение 2</u>. Пространство X называется pF-пространством, если из $A \subset X$ и $x \in GA$ следует: существует p-последовательность $\xi \subset A$ такая, что $\xi \longrightarrow x$.

Вспомогательные определения:

<u>Определение 3</u>. Пространство X называется ps-пространством, если из $A \subset X$ и $GA \neq \Lambda$ следует: существуют точка $x \in GA$ и p-последовательность $\xi \subset A$ такие, что $\xi \longrightarrow x$.

<u>Определение 4</u>. Пусть X - пространство и $\mathcal{T}$ -топология на нем. Для каждой точки $x_0 \in X$ рассмотрим пространство

----

x) Пространство имеет порядок разреженности 2, если оно является объединением двух своих дискретных подпространств, одно из которых открыто.

X_{x_0} , определенное на множестве X с топологией $\mathcal{T}(x_0)$, задаваемой следующим образом: если $x \in X \setminus \{x_0\}$, то x изолирована в X_{x_0} , а базы точки x_0 в X и в X_{x_0} совпадают. Семейство $\lambda = \{\mathcal{T}(x) : x \in X\}$ определенных таким образом топологий называется стандартным семейством над пространством X .

Теорема. Для того, чтобы пространство X было pF - пространством необходимо и достаточно, чтобы каждое факторное отображение на X было псевдооткрыто.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: Y \to X$ - факторное отображение; X - pF -пространство; $B \subset X' \subset X$, $Y' = f^{-1}X'$ и $A = f^{-1}B$ замкнуто в Y' . Предположим, что B не замкнуто в X' . Тогда найдутся $x_0 \in X' \cap GB$ и $\xi \subset B$ такие, что $\xi \to x_0$, если $G^*\xi = G\xi \setminus \{x_0\}$, то $x_0 \notin [G^*\xi]$. Положим: $A' = f^{-1}\xi$; $S = f^{-1}(G^*\xi)$ и $F = f^{-1}x_0$; тогда $\Phi = f^{-1}[\xi] = A' \cup S \cup F$ замкнуто в Y . Покажем, что $P = \Phi | F$ замкнуто в Y . Действительно, если это не так, то для некоторой точки $y_0 \in F$ имеем: $y_0 \in [P] = [A'] \cup [S]$. Поскольку $A' \subset A = [A]_{Y'}$, $F \subset Y'$ и $F \cap A' \neq \Lambda$, то $y_0 \notin [A]$; следовательно, $y_0 \in [S]$; но тогда, так как f непрерывно, $x_0 \in [fS] = [G^*\xi]$ - противоречие. Таким образом, P действительно замкнуто в Y ; но $P = f^{-1}(\xi \cup G^*\xi)$, поэтому $\xi \cup G^*\xi$ замкнуто в X , то есть $x_0 \notin [\xi]$ - противоречие. Мы показали, что отображение наследственно факторно по полным прообразам подпространств X . Как известно, это равносильно тому, что f псевдооткрыто [2].

Достаточность. Легко показать, что верны:

<u>Лемма 1</u>. Всякое разреженное пространство x) является ps -пространством.

<u>Лемма 2</u>. Пересечение стандартного семейства топологий над произвольным пространством совпадает с его топологией.

Пусть $\mathcal{T}$ - топология пространства X и X не является pF -пространством. Построим пространство Z и факторное отображение $\varphi: Z \longrightarrow X$ которое не псевдооткрыто. xx)

Построим сначала пространство Y и почти открытое отображение xxx) $g: Y \longrightarrow X$ удовлетворяющее некоторым специальным условиям.

Пусть $Y = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $X_i \cap X_j = \Lambda$ при $i \neq j$ и $|X_i| = |X|$; для каждого $i \leq 3$ зафиксируем взаимооднозначное отображение $h_i: X_i \longrightarrow X$. Примем следующие обозначения: если $A \subset X$, то $A_i = h_i^{-1} A$, в частности, если $x \in X$, то $x_i = h_i^{-1} x$. Поскольку X не является pF -пространством, то найдутся точка $x^* \in X$ и множество $A^* \subset X$ такие, что $x^* \in GA$ и ни одна p-последовательность из A^* не сходится к x^*. Если $y \in X_1 \setminus \{x_1^*\}$ и $h_1 y = x$, то полагаем: $K(y) = \{x_3\}$; если $y \in X_2 \setminus \{x_2^*\}$ и $h_2 y = x$, то $K(y) = \{x_3, x_3^*\}$; если $y = x_1^*$, то $K(y) = \{x_2^*, x_3^*\}$. Зададим топологию τ на Y, определив базу β_y в каждой точ-

----

x) Напомним, что пространство называется разреженным если любое его не пустое подпространство имеет изолированную точку.

xx) Если X - T_1 -пространство, то Z - паракомпакт.

xxx) Отображение $g: Y \longrightarrow X$ называется почти открытым [5], если для любой точки $x_0 \in X$ существует точка $y_0 \in g^{-1} x_0$ такая, что из $y_0 \in U$ и U открыто в Y следует: $x_0 \in \operatorname{Int} g U$.

ке $y \in Y$: если $y \in X_3 \cup \{x_2^*\}$, то $\beta_y = \{\{y\}\}$; если $y \in (X_1 \cup X_2) \setminus \{x_1^*, x_2^*\}$, то $\beta_y = \{\mathcal{U}(y, 0) = \{y\} \cup (O_3 \setminus K(y)) : h_i y \in O \in \mathcal{T}\}$; если $y = x_1^*$, то $\beta_y = \{\mathcal{U}(y, 0) = \{y\} \cup (((O_2 \setminus A_2^*) \cup O_3) \setminus K(y)) : x^* \in O \in \mathcal{T}\}$.
Легко проверить, что данное определение корректно. Заметим также, что если $X - T_1$ - пространство, то и $Y - T_1$ - пространство.

Определим отображение $g : Y \to X$ следующим образом: если $y \in X_i$, то $gy = h_i y$. Непрерывность отображения g следует из очевидного включения $\mathcal{U}(y, O) \subset g^{-1} O$, если $gy \in O$. Кроме того, для любой точки $y \in X_1$ из $\mathcal{U} = \mathcal{U}(O, y) \in \beta_y$ следует: $gy \in g\mathcal{U} = O \in \mathcal{T}$; поскольку $g(X_1) = X$, то это означает, что отображение g почти открыто (и, тем более, факторно).

Очевидно, Y - разреженное пространство, поэтому из леммы 1 следует:

(1) $Y - ps$ - пространство.

Нам понадобится также следующий факт:

(П) Для каждой точки $y \in Y$ семейство $\gamma(y) = \{A \subset Y : y \in GA$ и ни одна p-последовательность из A не сходится к $y\}$ замкнуто относительно конечных объединених, то есть если $\nu \subset \gamma(y)$ и $|\nu| < \aleph_0$, то $\cup\nu \in \gamma(y)$.

Достаточно показать, что семейство $\gamma(y)$ замкнуто относительно попарных объединений. Положим: $X_1^* = \{x_1^*\}$, $X_2^* = (X_1 \cup X_2) \setminus \{x_1^*, x_2^*\}$; $X_3^* = X_3 \cup \{x_2^*\}$. Очевидно, $Y = X_1^* \cup X_2^* \cup X_3^*$ и для любого $i \leq 3$ X_i^* дискретно и всюду плотно в $\cup\{X_j^* : j \leq i\}$ поэтому если $\xi \subset X_i^*$, то $G\xi \cap (\cup\{X_j^* : j \geq i\}) = \Lambda$. Следовательно, если $y \neq x_1^*$, то

$\gamma(y) = \Lambda$. Пусть $\{B, C\} \subset \gamma(x_1^*)$ и $\mathcal{D} = B \cup C$. Предположим, что $\mathcal{D} \notin \gamma(x_1^*)$ и зафиксируем p-последовательность $\xi \subset \mathcal{D}$ такую, что $\xi \longrightarrow x_1^*$. Положим: $\xi' = \xi \cap X_2^*$; $\xi'(B) = \xi' \cap B$; $\xi'(C) = \xi' \cap C$. Если $x_1^* \in [\xi']$, то справедливо по крайней мере одно из следующих включений: $x_1^* \in [\xi'(B)]$ либо $x_1^* \in [\xi'(C)]$. Пусть, для определенности, $x_1^* \in [\xi'(B)]$, тогда, очевидно, $G\xi'(B) = \{x_1^*\}$, то есть $\xi'(B) \longrightarrow x_1^*$, но $\xi'(B) \subset B$, что противоречит выбору $B \in \gamma(x_1^*)$. Таким образом, $x_1^* \notin [\xi']$; так как $x_1^* \notin \xi$, то $\xi'' = \xi \setminus [\xi'] \subset X_3^*$ и $x_1^* \in G\xi''$; но тогда $\xi'' \longrightarrow x_1^*$. Действительно, $G\xi'' \subset G\xi \cup [\xi']$; фиксируем $U_1, U_2 \in \beta x_1^*$ такие, что $U_1 \cap [\xi'] = \Lambda$ и $U_2 \cap (G\xi \setminus \{x_1^*\}) = \Lambda$, очевидно $x_1^* \in U \in \tau$ и $U \cap (G\xi'' \setminus \{x_1^*\}) = \Lambda$, то есть $\xi'' \longrightarrow x_1^*$ Положим: $\xi^{(1)} = \xi'' \cap B$, $\xi^{(2)} = \xi'' \setminus \xi^{(1)}$; тогда $G\xi'' = [\xi^{(1)} \cup \xi^{(2)}] \setminus \xi'' = ((G\xi^{(1)} \cup \xi^{(1)} \setminus \xi'') \cup ((G\xi^{(2)} \cup \xi^{(2)}) \setminus \xi''))$.

Поскольку $G\xi^{(1)} \setminus \xi'' = G\xi^{(1)}$, $G\xi^{(2)} \setminus \xi'' = G\xi^{(2)}$ и $\xi^{(1)} \setminus \xi'' = \xi^{(2)} \setminus \xi'' = \Lambda$, то $G\xi'' = G\xi^{(1)} \cup G\xi^{(2)}$. Поскольку $x_1^* \in G\xi''$, то справедливо по крайней мере одно из следующих включений: $x_1^* \in G\xi^{(1)}$ либо $x_1^* \in G\xi^{(2)}$. Пусть, например, $x_1^* \in G\xi^{(1)}$; поскольку $G\xi^{(1)} \subset G\xi''$ и x_1^* изолирована в $G\xi''$, то x_1^* изолирована и в $G\xi^{(1)}$, то есть $\xi^{(1)} \longrightarrow x_1^*$ Но $\xi^{(1)} \subset B$, что противоречит выбору $B \in \gamma(x_1^*)$. Таким образом, $\mathcal{D} \in \gamma(x_1^*)$. (Л) доказано.

Покажем, что верно:

(Ш) $A_3^* \in \gamma(x_1^*)$

Предположим, что это не так и зафиксируем p-последовательность $\xi_3 \subset A_3^*$ такую, что $\xi_3 \longrightarrow x_1^*$. Положим: $\xi = \varphi\xi_3$; очевидно, $x^* \in G\xi$ и $G\xi_3 \supset (G\xi)_2$, поэтому найдется $\mathcal{U} = \mathcal{U}(O^*, x_1^*) \in \beta x_1^*$ такое, что $\mathcal{U} \cap (G\xi)_2 = \Lambda$. Но тогда $(O_2^* \setminus A_2^*) \cap (G^*\xi)_2 = \Lambda$, где $G^*\xi = G\xi \setminus \{x^*\}$ и $(O^* \setminus A^*) \cap G^*\xi = \Lambda$. Положим: $G^*\xi \cap O^* = \eta', \eta'' = G^*\xi \setminus \eta'$, ясно, что $\eta' \subset A^*$, $x^* \notin [\eta'']$ и $\xi' = \xi \cup \eta' \subset A^*$. Очевидно, $x^* \in G\xi'$ и $G^*\xi' = G\xi' \setminus \{x^*\} \subset \eta''$; но тогда $G\xi' \ni x^*$ и x^* изолирована в $\eta'' \cup \{x^*\} \supset G\xi'$. Таким образом, $\xi' \longrightarrow x^*$; но $\xi' \subset A^*$, что противоречит выбору A^*.

Построим пространство Z и факторное отображение $f: Z \to Y$. Пусть $\lambda = \{\tau(y): y \in Y\}$ - стандартное семейство топологий над Y; пространство, определенное на множестве Y с топологией $\tau(y)$ будем обозначать через Y_y. Пусть $\tau'(y)$ наименьшая топология на Y, содержащая $\tau(y)$ и всевозможные множества вида $Y \setminus A$, где $A \in \gamma(y)$ и $\gamma(y)$ определяется так же, как в (П); пространство с топологией $\tau'(y)$ будем обозначать через Y'_y. Рассмотрим семейство $\mu = \{\tau'(y): y \in Y\}$ и покажем, что $\cap \mu = \tau$. Так как $\tau(y) \subset \tau'(y)$, то в силу леммы 2, $\tau \subset \cap \mu$. Пусть $\mathcal{F}(y)$ и $\mathcal{F}'(y)$ означают семейства всех замкнутых множеств в Y_y и Y'_y, соответственно. Для доказательства включения $\cap \mu \subset \tau$ покажем, что справедливо:

(IV) $\mathcal{F}(y) \cup \gamma(y) = \mathcal{F}'(y)$ для любой точки $y \in Y$.

Действительно, если $\nu \subset \gamma(y)$ и $|\nu| < \aleph_0$, то, в силу (П): $\cup \nu \in \gamma(y)$. Если $\nu = \{A_\alpha\ \alpha \in M\} \subset \gamma(y)$ и $A = \cap \nu$, то возможны только два случая: либо $y \notin [A]$, тогда $A \in \mathcal{F}(y)$ поскольку y - единственная не изолированная в Y_y точка, либо $y \in [A]$, тогда для любого $\alpha \in M$: $A \subset A_\alpha \in \gamma(y)$, откуда следует: $A \in \gamma(y)$. Если

$A = F \cup A_\alpha$. $A_\alpha \in \gamma(y)$. $F \in \mathcal{F}(y)$, то $y \in [A]$; если $y \in F$, то, очевидно, $A \in \mathcal{F}(y)$; иначе $A \in \gamma(y)$ так как $A \subset A_\alpha$. Если $A = F \cap A_\alpha$, то из $y \in [A]$ следует: $A \in \gamma(y)$; если $y \notin [A]$, то $A \in \mathcal{F}(y)$ (JV) доказано.

Предположим, что найдется $A \subset Y$ такое, что A замкнуто в Y_μ (пространство, определенное на множестве Y с топологией $\cap\mu$), но A не замкнуто в Y. Поскольку, в силу (I), Y является ps-пространством и $[A] \neq A$, то $B = \{y \in \complement A$: существует p-последовательность $\xi \subset A$ такая, что $\xi \longrightarrow y\} \neq \Lambda$. Фиксируем произвольно $y_0 \in B$. Поскольку A замкнуто в Y_μ, то в силу (JV): $A \in \mathcal{F}(y_0) \cup \cup \gamma(y_0)$; но если $A \in \mathcal{F}(y_0)$ то $y_0 \notin [A]$ - приходим к противоречию, поэтому $A \in \gamma(y_0)$. Но тогда не существует p-последовательности из A, сходящейся к y_0, что противоречит выбору $y_0 \in B$. Таким образом, действительно, $\cap\mu = \tau$.

Пусть $\Xi = \Sigma\{Y'y : y \in Y\}$ - свободная сумма пространств $Y'y$ и $f: \Xi \longrightarrow Y$ - естественное отображение, тождественное на множестве $Y'y$ для любой точки $y \in Y$. Поскольку $\cap\mu = \tau$, то отображение f факторно. Зададим отображение $\varphi = g \circ f : \Xi \longrightarrow X$, как композицию определенных выше факторных отображений g и f. Ясно, что φ факторно; покажем, что φ не псевдооткрыто. Действительно, пусть $F = \varphi^{-1}x^*$ и $z_y = F \cap Y'_y$. Очевидно, если $y \neq x_1^*$, то точка z_y изолирована в Ξ, поэтому для любого открытого в Ξ множества $W \ni x_1^*$ система $\vartheta = \{W\} \cup \{\{z_y\} : y \in F\}$ составляет открытое покрытие множества F. Пусть $W' = \{x_1^*\} \cup \cup (X_2 \setminus A_2^*) \cup X_3$; очевидно, $W' \in \tau(x_1^*)$. В силу (Ш)

и (IV) A_3^* замкнуто в $Y'_{x_1^*}$, поэтому $W = W' \setminus A_3^* = \{x_1^*\} \cup (X_2^* \setminus A_2^*) \cup (X_3 \setminus A_3^*) \in \tau'(x_1^*)$ и, следовательно, открыто в Z. Очевидно, $\varphi W = X \setminus A^*$ причем, поскольку $x^* \in [A^*]$ то $x^* \notin Int\, \varphi W = Int\, \varphi (U \vartheta)$.
Таким образом, факторное отображение $\varphi : Z \longrightarrow X$ не псевдооткрыто. Теорема доказана.

Следствие. Для того, чтобы каждое факторное отображение на регулярное пространство X было псевдооткрыто, необходимо и достаточно, чтобы для любых $A \subset X$ и $x \in [A]$ существовало $B \subset A$, такое, что $[B] = B \cup \{x\}$.

В заключении мне приятно принести самую искреннюю благодарность Александру Владимировичу Архангельскому; этот результат получен под его руководством.

Литература

[1] П.С. АЛЕКСАНДРОВ: Введение в теорию множеств и общую топологию, изд. "Наука", Москва, 1977.

[2] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Некоторые типы факторных отображений и связи между классами топологических пространств, Доклады Академии Наук СССР, 153(1963), 743-746.

[3] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Бикомпактные множества и топология пространств, Труды Московского математического общества 13(1965), 3-55.

[4] А.В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ: Пересечение топологий и псевдооткрытые бикомпактные отображения, Доклады Академии Наук СССР, 226(1976), 745-748.

[5] П. ВОПЕНКА: О размерности компактных топологических пространств, Чехословацкий математический журнал 8(1952), 3-53.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Москва, С С С Р

(Oblatum 28.8. 1981)