Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Tong Van Duc

Un théorème d'équivalence pour les Γ-structures feuilletées

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 2, 281--286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106226

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
24,2(1983)

UN THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE POUR LES Γ-STRUCTURES FEUILLETÉES

TONG VAN DUC

Abstract : It is shown that if the general theorem of equivalence is true for the Γ_M-structures, it is also true for the Γ_M-foliated structures

Keywords : G-structure, foliation.

Classification : 53 C 10 .

I. - PROBLEME D'EQUIVALENCE D'ELIE CARTAN [3]

On se place dans la catégorie des variétés différentiables C^∞. Soit M une variété différentiable de dimension n . Pour chaque entier $k \geq 1$, on désigne par G_k un sous-groupe de Lie du groupe de Lie $Gl_{n,k}$ des k-jets inversibles de source et de but 0 dans $\mathbf{R}^n$, $E^k_M(M,p^k,G_k)$ un sous-fibré principal du fibré $B^k(M)$ des repères d'ordre k de M de groupe structural G_k .

Soit $(E^k_M)_{k\geq 1}$ une suite de structures d'ordre k sur M se projetant l'un sur l'autre. Pour $k > \ell$, on note $p^k_\ell : E^k \to E^\ell$ la projection naturelle.

Je remercie M. le Professeur P. Molino de m'avoir suggéré ce travail.

Soient $\Gamma(E^k_M)$ le pseudo-groupe des automorphismes locaux et $\mathcal{L}(E^k_M)$ le faisceau d'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de E^k_M . Soient $\Gamma_M = \bigcap_{k\geq 1} \Gamma(E^k_M)$ et $\mathcal{L}_M = \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{L}(E^k_M)$. Enfin, soient Γ^k le pseudo-groupe engendré par les relevés dans E^k_M des éléments de Γ_M et $\mathcal{L}^k$ le faisceau d'algèbre de Lie des germes des relevés des éléments de $\mathcal{L}_M$.

DEFINITION. Si pour $k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ et Γ^k sont transitifs sur E^k_M, on dit que Γ_M est un pseudo-groupe de Lie transitif sur M . La suite $(E^k_M)_{k\geq 1}$ est une suite de définition de Γ_M .

Cette suite n'est pas unique. Les suites de définition de Γ_M se déduisent l'une de l'autre par conjugaison.

La restriction de la forme fondamentale θ^k_M sur $B^k(M)$ à E^k_M, notée encore θ^k_M , est à valeurs dans un sous-espace vectoriel V_{k-1} de l'espace $\mathbf{R}^n_{k-1}$ des (k-1)-jets des champs de vecteurs à l'origine de $\mathbf{R}^n$.

Soit maintenant une variété différentiable V de même dimension que la variété M .

DEFINITION. Une presque-Γ_M-structures sur V est définie par la donnée d'une suite de structure $(E^k_V)_{k\geq 1}$ sur V , se projetant l'un sur l'autre et vérifiant :

(i) $\forall k$, E^k_V a même groupe structural que la structure d'ordre k modèle E^k_M .

(ii) $\forall k$, la forme fondamentale θ^k_V sur $B^k(V)$ en restriction à E^k_V est à valeurs dans V_{k-1} .

Une équivalence locale de la presque-Γ_M-structure sur la Γ_M-structure modèle est un difféomorphisme local φ de V dans M tel que, pour tout $k \geq 1$, le relevé $B^k(\varphi)$ de φ dans les fibrés des repères d'ordre k envoie (localement) E^k_V sur E^k_M.

Le problème d'équivalence locale pour Γ_M peut s'énoncer de la façon suivante : si $(E^k_V)_{k\geq 1}$ est la suite de définition d'une presque-Γ_M-structure arbitraire, existe-t-il au voisinage de chaque point de V une équivalence locale de la presque-structure $(E^k_V)_{k\geq 1}$ sur la structure modèle $(E^k_M)_{k>1}$?

Si la réponse à cette question est affirmative, on dira que le théorème général d'équivalence est vrai pour Γ_M.

II. - Γ-STRUCTURE FEUILLETEE.

On se donne à partir de maintenant un pseudo-groupe de Lie transitif Γ_M sur une variété modèle M ayant pour suite de définition $(E^k_M)_{k\geq 1}$.

Soit V une variété différentiable quelconque.

DEFINITION. Une Γ_M-structure feuilletée sur V est définie par la donnée d'une famille $(U_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ où $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{a}}$ est un recouvrement ouvert de V et où $\forall\alpha\in\mathfrak{a}$, $f_\alpha : U_\alpha \to M$ est une submersion vérifiant la condition suivante :

$\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{a}$ avec $U_\alpha\cap U_\beta \neq \emptyset$, il existe $g_{\alpha\beta}\in\Gamma_M$ tel que $f_\alpha(x) = (g_{\alpha\beta}\circ f_\beta)(x)$, $\forall x\in U_\alpha\cap U_\beta$.

Une Γ_M-structure feuilletée sur la variété V définit sur cette variété un feuilletage $\mathfrak{F}$. Soient $\tilde{E}^k_{T_\alpha} = (f_\alpha)^* B^k(M)$ et $\tilde{\theta}^k_{T_\alpha} = (\tilde{f}^k_\alpha)^* \theta_M$ où $\tilde{f}^k_\alpha : \tilde{E}^k_{T_\alpha} \to B^k(M)$ désigne la submersion canonique. Sur $U_\alpha \cap U_\beta$ supposé non vide, la relation $f_\alpha = g_{\alpha\beta}\circ f_\beta$ montre que les fibres de $\tilde{E}^k_{T_\alpha}$ et $\tilde{E}^k_{T_\beta}$ au-dessus de tout $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ sont isomorphes. En identifiant de telles fibres, on obtient un fibré principal $\tilde{E}^k_T$ de base V et de groupe structural $Gl_{n,k}$. $\tilde{E}^k_T$ est appelé le "fibré des repères transverses d'ordre k" de $\mathfrak{F}$. Les formes $(\tilde{\theta}^k_{T_\alpha})_{\alpha\in a}$ définissent une $\tilde{E}^k_T$ une forme $\tilde{\theta}^k_T$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n_{k-1}$.

Soient d'autre part $E^k_{T_\alpha} = (f_\alpha)^* E^k_M$ et $\theta^k_{T_\alpha} = (f^k_\alpha)^* \theta^k_M$ où $f^k_\alpha : E^k_{T_\alpha} \to E^k_M$ désigne la submersion canonique. La famille $(E^k_{T_\alpha})_{\alpha\in a}$ définit sur V un fibré principal E^k_T de groupe structural G_k , sous-fibré principal de $\tilde{E}^k_T$. Les projections : $E^k_M \to E^\ell_M$ pour $k > \ell$ induisent des submersions $\pi^k_\ell : E^k_T \to E^\ell_T$ et on obtient une suite de fibrés principaux

$$\cdots\ E^k_T \to E^{k-1}_T \to \cdots \to E^1_T$$

se projetant l'un sur l'autre.

Si l'on choisit une autre suite de définition de Γ_M , on obtient sur V une autre suite de fibrés principaux qui se déduit de la suite $(E^k_T)_{k\geq 1}$ par conjugaison.

Enfin, la famille $(\theta^k_{T_\alpha})_{\alpha\in a}$ définit sur E^k_T une forme θ^k_T à valeurs dans V_{k-1} . θ^k_T est la restriction de $\tilde{\theta}^k_T$ à E^k_T .

Soit maintenant $(V,\mathfrak{F})$ une variété feuilletée dont la codimension des feuilles est n . Soit $(\tilde{E}^k_T)_{k\geq 1}$ la suite des fibrés des repères transverses d'ordre k de $\mathfrak{F}$ qu'on obtient à partir des fibrés des repères d'ordre k de $\mathbf{R}^n$. $\tilde{E}^k_T$ est muni d'une forme $\tilde{\theta}^k_T$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n_{k-1}$.

DEFINITION. Une presque-Γ_M-structure feuilletée sur $(V,\mathfrak{F})$ est définie par la donnée d'une suite $(E^k_T)_{k\geq 1}$ de fibrés principaux se projetant l'un sur l'autre et vérifiant :

(i) $\forall k$, E^k_T est un sous-fibré principal de $\tilde{E}^k_T$ ayant même groupe structural G_k que la structure modèle E^k_M .

(ii) $\forall k$, la restriction θ^k_T de $\tilde{\theta}^k_T$ à E^k_T est à valeurs dans V_{k-1} .

On a vu qu'à toute Γ_M-structure feuilletée sur une variété V est associée une presque-Γ_M-structure feuilletée.

Le problème d'équivalence pour les Γ_M-structures feuilletées peut s'énoncer ainsi : toute presque-Γ_M-structure feuilletée provient-elle d'une Γ_M-structure feuilletée ? ou bien de façon équivalente : quelle que soit la presque Γ_M-structure feuilletée $(E^k_T)_{k\geq 1}$ sur $(V,\mathfrak{F})$, existe-t-il au voisinage de chaque point de V une submersion de V dans M telle que $(E^k_T)_{k\geq 1}$ soit (localement) l'image réciproque de la suite de structures modèles $(E^k_M)_{k\geq 1}$?

Si la réponse à cette question est oui, on dira que le théorème général d'équivalence est vrai pour les Γ_M-structures feuilletées.

THEOREME. <u>Si le théorème général d'équivalence est vrai pour les Γ_M-structures, il l'est aussi pour les Γ_M-structures feuilletées</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $(E^k_T)_{k\geq 1}$ la suite de définition d'une presque-Γ_M-structure feuilletée sur une variété feuilletée $(V,\mathfrak{F})$. Puisqu'il s'agit d'un problème local, on peut supposer que le feuilletage $\mathfrak{F}$ est défini par une submersion g de V sur un ouvert W de $\mathbf{R}^n$. Alors $\tilde{E}^k_T = g^* B^k(W)$. Soit $g^k : \tilde{E}^k_T \to B^b(W)$ la submersion canonique et soit $E^k_W = g^k(E^k_T)$. Il est clair que la restriction de $p^k : B^k(W) \to W$ à E^k_W est surjective. Soient z^k et $z'^k \in E^k_W$ tels que $p^k(z^k) = p^k(z'^k) = y$ et soit $x \in V$ tel que $g(x) = y$. Il existe un seul x^k et un seul un x'^k

de E_T^k situés au-dessus de x tels que $g^k(x^k) = z^k$ et $g^k(x'^k) = z'^k$ puisque g^k est un isomorphisme sur les fiches. D'autre part, il existe un seul $\gamma^k \in G_k$ tel que $x'^k = x^k\gamma^k$. Par suite, $z'^k = z^k\gamma^k$ puisque g^k est un morphisme de fibrés principaux. Enfin, l'existence des sections locales de g et celles de E_T^k implique l'existence des sections locales de E_W^k. Il en résulte que E_W^k est un sous-fibré principal de $B^k(W)$ ayant même groupe structural G_k que E_T^k. D'autre part, si θ_W^k est la restriction de la forme fondamentale sur $B^k(W)$ à E_W^k, on a $(g^k)^*\theta_W^k = \theta_T^k$. Ainsi θ_W^k est à valeurs dans V_{k-1}. Par conséquent, la suite $(E_W^k)_{k\geq 1}$ définit une presque-Γ_M-structure sur W. Puisque le théorème général d'équivalence est vrai pour les Γ_M-structures, il existe un difféomorphisme (local) φ de W dans M qui envoie la suite $(E_W^k)_{k\geq 1}$ sur la suite $(E_M^k)_{k\geq 1}$. Alors $f = \varphi \circ g$ est une submersion de V dans M tel que $E_T^k = f^* E_M^k$ pour tout $k \geq 1$.

REFERENCES

[1] V. GUILLEMIN - S. STERNBERG, Deformation theory of pseudo-group structures, Memoirs of the AMS (1966).

[2] V. GUILLEMIN, A. Jordan-Holder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras, J. of Differ. Geom., 2 (1968), pp. 313-345.

[3] P. MOLINO, Theorie des G-structures : le problème d'équivalence, Lectures notes in Math., 588 (1977), Springer-Verlag, Berlin.

[4] P. MOLINO, Le problème d'équivalence pour les pseudo-groupes de Lie : méthodes intrinsèques, Préprint (1978).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Inst. Fourier dépendant de l Université Sci. et Médic. de Grenoble assoc. au C.N.R.S. B.P.116, 38402 St Martin d Heres, France

(Oblatum 16.12. 1982)