Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Fixpunktsätze für limeskompakte mengenwertige Abbildungen in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 27 (1986), No. 1, 189--204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106439

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

27,1 (1986)

FIXPUNKTSÄTZE FÜR LIMESKOMPAKTE MENGENWERTIGE ABBILDUNGEN IN NICHT NOTWENDIG LOKALKONVEXEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

Siegfried HAHN

Zusammenfassung: Wir beweisen Fixpunktaussagen vom Schauder-Typ für mengenwertige, i.a. nichtkompakte Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen. Die Definitionsbereiche sind spezielle zulässige, z.T. nicht notwendig konvexe Mengen. Im Raum S (0,1) wird eine Klasse von limeskompakten Abbildungen angegeben, die einen Fixpunkt besitzen.

Kennwörter: Mengenwertige Abbildungen, Fixpunkte, limeskompakte und kondensierende Abbildungen, Nichtkompaktheitsmass, zulässige Mengen.

Klassifikation: 47H10

---

1. Einleitung: Die Fixpunkttheorie für kompakte Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen ohne lokale Konvexität hat sich in den letzten 25 Jahren stürmisch entwickelt. Einen ausgezeichneten Überblick über den gegenwärtigen Stand findet man in der Monographie [4] von Hadžić. Dagegen sind Fixpunktaussagen für die in den vergangenen Jahren häufig untersuchten limeskompakten, kondensierenden u. ä. Abbildungen im wesentlichen nur für lokalkonvexe Räume bekannt. Erste Resultate in gewissen nichtlokalkonvexen Räumen bewies Hadžić ([4],[6]). In [10] führten wir in Banachräumen derartige Abbildungen konsequent auf kompakte zurück. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir diesen Gedanken aus [10], um unter Ausnutzung von Ergebnissen von Jerofsky [11] und Hadžić [4] den Fixpunktsatz von Schauder für verschiedene Klassen limeskom-

pakter mengenwertiger Abbildungen auf lokalkonvexen Teilmengen eines allgemeinen topologischen Vektorraumes zu beweisen.

Alle in der Arbeit betrachteten topologischen Räume sind separiert, die topologischen Vektorräume reell. Es sei E ein topologischer Vektorraum und $K \subseteq E$. Dann bezeichnen wir mit $\overline{K}$ die Abschliessung, mit co K die konvexe Hülle und mit $\overline{\text{co}}$ K die abgeschlossene konvexe Hülle von K sowie mit k(K) das System aller nichtleeren, konvexen und kompakten Teilmengen von K. Sei $M \subseteq E$. Wir betrachten mengenwertige Abbildungen mit konvexen , kompakten Werten, also Abbildungen $F:M \longrightarrow k(E)$. $x \in M$ heisst <u>Fixpunkt</u> einer solchen Abbildung, wenn $x \in F(x)$ gilt. $F:M \longrightarrow k(K)$ heisst <u>nach oben halbstetig (ohs)</u>, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ die Menge $F^{-1}(A) := \{x \in M : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ abgeschlossen in M ist. $F:M \longrightarrow k(K)$ heisst <u>kompakt</u>, wenn F ohs und $F(M) := \bigcup_{x \in M} F(x)$ relativ kompakt ist.

2. <u>Klassen von limeskompakten Abbildungen:</u> Wir definieren in diesem Abschnitt eine Reihe von nicht notwendig kompakten Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen, die in lokalkonvexen Räumen häufig bei Fixpunktaussagen verwendet wurden. Neu ist der Begriff der Pseudokondensierenden Abbildung (Definitionen 4 und 5), der für das Arbeiten in nichtlokalkonvexen Räumen zweckmässig erscheint.

<u>Definition 1</u>: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$ und $F:M \longrightarrow k(E)$ eine ohs Abbildung. Sei $R_0 := \overline{\text{co}}\, F(M)$ und $R_\alpha := \overline{\text{co}}\, F(M \cap R_{\alpha-1})$, falls $\alpha - 1$ existiert, bzw. $R_\alpha := \bigcap_{\beta < \alpha} R_\beta$, falls $\alpha - 1$ nicht existiert. Die für eine Ordinalzahl δ existierende Menge R_δ, für die $R_\delta = R_\alpha$ für alle $\alpha \geq \delta$ gilt, heisst <u>Limeswertebereich</u> von F und werde mit R^* bezeichnet. F heisst <u>limeskompakt</u>, wenn $F(M \cap R^*)$ relativ kompakt ist.

Limeskompakte Abbildungen wurden in lokalkonvexen Räumen oft untersucht (s.z.B. [3],[15],[18]). Offenbar gilt $R^* = \overline{co}\, F(M \cap R^*)$. Hieraus folgt leicht, dass F genau dann limeskompakt ist, wenn aus $S = \overline{co}\, F(M \cap S)$ die Kompaktheit von $\overline{F(M \cap S)}$ folgt.

<u>Definition 2</u>: Es seien E ein topologischer Vektorraum $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$ und $F: M \longrightarrow k(E)$ eine ohs Abbildung. F heisse <u>C_1-Abbildung</u>, wenn für jedes $x \in F(M)$ und jedes $S \subseteq E$ aus $S = \overline{co}\, (\{x\} \cup F(M \cap S))$ die Kompaktheit von $\overline{F(M \cap S)}$ folgt.

Der Begriff der C_1-Abbildung wurde von Potapov [16] eingeführt. Unsere Definition ist etwas allgemeiner als die in [16]. Natürlich ist jede C_1-Abbildung limeskompakt.

<u>Definition 3</u>: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$ und $F: M \longrightarrow k(E)$ eine ohs Abbildung. F heisst <u>verallgemeinert kondensierend</u>, wenn gilt:

(1) Aus $A \subseteq M$ und $A = \overline{co}\, F(A)$ folgt die Kompaktheit von $\overline{F(A)}$.

(2) Ist $A \subseteq M$, $F(A) \subseteq A$ und $A \setminus F(A)$ höchstens einelementig, so muss $\overline{F(A)}$ kompakt sein.

Definition 3 entspricht einer Definition von Daneš [2] (in quasivollständigen lokalkonvexen Räumen, im allgemeinen Fall ist unsere etwas allgemeiner) und verallgemeinert den Begriff "verallgemeinert kondensierend" aus [18],[15],[4]. Wegen (1) ist jede verallgemeinert kondensierende Abbildung $F: M \longrightarrow k(M)$ mit $M = \overline{co}\, M$ limeskompakt.

<u>Definition 4</u>: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $K \subseteq E$, $K \neq \emptyset$, $(A, \leq)$ ein Ordnungskegel in einem Vektorraum sowie $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von $\overline{co}\, K$, das mit M auch $\overline{M}$, co M, $M \cup \{x\}$ $(x \in K)$ sowie jede Teilmenge von M enthält. Sei c eine reelle Zahl

mit $c \geq 1$. Die Abbildung $\psi : \mathfrak{T} \longrightarrow A$ heisse ein <u>c-Nichtkompaktheitsmass auf</u> K, wenn gilt:

(1) $\psi(M \cup \{x\}) = \psi(\overline{M}) = \psi(M) \geq \psi(N)$ $(M \in \mathfrak{T},\ N \subseteq M,\ x \in K)$

(2) $\psi(\mathrm{co}\ M) \leq c \cdot \psi(M)$ $(M \in \mathfrak{T})$.

Ist in (2) $c = 1$, so heisst ψ Nichtkompaktheitsmass auf K ($\psi(M) \leq \psi(\mathrm{co}\ M)$ gilt wegen (1) stets).

<u>Definition 5</u>: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $M \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$ mit $M \subseteq K \subseteq E$ und $F: M \longrightarrow k(K)$ eine ohs Abbildung. Weiter sei ψ ein c-Nichtkompaktheitsmass auf K. F heisse <u>ψ-pseudokondensierend</u>, falls für jedes $N \subseteq M$ aus $\psi(N) \leq c \cdot \psi(F(N))$ die Kompaktheit von $\overline{F(N)}$ folgt. Ist ψ ein Nichtkompaktheitsmass auf K (also $c = 1$), so heisst F kondensierend.

Die wohlbekannten Begriffe des Nichtkompaktheitsmasses und der kondensierenden Abbildung (s.z.B. [3],[18]) werden hier verallgemeinert, da sie nur in lokalkonvexen Räumen eine inhaltsreiche Theorie ermöglichen. Für die bekannten nichttrivialen Nichtkompaktheitsmasse ψ gilt im allgemeinen für nichtlokalkonvexe Räume die Gleichheit $\psi(M) = \psi(\mathrm{co}\ M)$ nicht mehr, und damit ist die wichtigste Bedingung für ein übliches Nichtkompaktheitsmass verletzt. Bedingung (2) aus Definition 4 ist jedoch in gewissen Fällen auch in nichtlokalkonvexen Räumen erfüllbar. Das zeigt Hadžić in [4] und wir verwenden und beschreiben diesen Sachverhalt im Abschnitt 4. Man sieht leicht, dass jede kondensierende und jede bezüglich eines c-Nichtkompaktheitsmasses pseudokondensierende Abbildung limeskompakt ist und, falls $F: M \longrightarrow k(M)$ und $M = \overline{\mathrm{co}}\ M$, auch verallgemeinert kondensierend.

3. <u>Fixpunktaussagen für quasikompakte Abbildungen:</u> Die Untersuchung des Zusammenhangs der in 2. definierten Abbildungs-

klassen zur Klasse der kompakten Abbildungen führt auf folgende Definition.

Definition 6: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$ und $F: M \to k(E)$ eine ohs Abbildung. F heisse quasikompakt, wenn eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge $S \subseteq E$ mit folgenden Eigenschaften existiert: (1) $M \cap S \neq \emptyset$, (2) $F(M \cap S) \subseteq S$, (3) $\overline{F(M \cap S)}$ ist kompakt. Eine Menge S mit (1),(2),(3) heisse charakteristische Menge für F.

Wir führten in [8] erstmals den Begriff der charakteristischen Menge im Zusammenhang mit kondensierenden Abbildungen ein. Quasikompakte Abbildungen entsprechend Definition 6 definierten wir für lokalkonvexe Räume erstmals in [9] (man beachte den Unterschied zur von uns in [7] definierten Quasikompaktheit, die auch in [4] verwendet wird). Quasikompakte Abbildungen sind verwandt, aber nicht identisch, mit den in [12] eingeführten kompakt einschränkbaren Abbildungen. Der in [12] verwendete Begriff der Trägermenge verwendet im Vergleich zur charakteristischen Menge statt Bedingung (1) eine andere, kompliziertere Bedingung, die die Definition der Rotation eines kompakt einschränkbaren Vektorfeldes sichern hilft. Da wir ohne derartige Hilfsmittel arbeiten, reicht für uns die einfache Bedingung (1) aus. Man findet übrigens leicht quasikompakte Abbildungen, die nicht kompakt einschränkbar sind. Unser Begriff ist für die Zusammenfassung aller im 2. Abschnitt eingeführten Abbildungen und ihre Untersuchung auf Fixpunkte bestens geeignet, denn er erlaubt eine direkte Zurückführung auf Ergebnisse für kompakte Abbildungen. Von zentraler Bedeutung für die Fixpunkttheorie kompakter Abbildungen in allgemeinen topologischen Vektorräumen E ist der Begriff der zulässigen Menge. Eine

Menge $K \subseteq E$ heisst zulässig, wenn zu jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq K$ und jeder Nullumgebung V eine stetige Abbildung $h: A \longrightarrow K$ existiert, so dass $h(A)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum von E liegt und $x - h(x) \in V$ $(x \in A)$ gilt. Im Spezialfall $K = E$ heisst der Raum E zulässig. Bisher ist kein Beispiel für eine konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes bekannt, die nicht zulässig ist. Es sind verschiedene Klassen von zulässigen Mengen untersucht worden (s [4]).

Definition 7 ([13]): Eine Teilmenge K eines topologischen Vektorraumes E heisst lokalkonvex, wenn jedes $x \in K$ in K eine Umgebungsbasis besitzt, die aus Mengen der Form $U_x = (x + W) \cap K$ bestehen, wobei W eine konvexe Teilmenge aus E ist und U_x eine Umgebung von x in K.

Offenbar ist jede Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes lokalkonvex und jede Teilmenge einer lokalkonvexen Menge in einem topologischen Vektorraum ist wieder lokalkonvex. Nichttriviale Beispiele findet man in [4],[13]. Hadžić (s.z.B. [4]) nennt eine Teilmenge $K \subseteq E$ vom Zima-Typ, wenn für jede Nullumgebung V eine Nullumgebung U existiert, so dass $\mathrm{co}(U \cap (K-K)) \subseteq V$ gilt, und sie beweist, dass jede konvexe Menge $K \subseteq E$ eines topologischen Vektorraumes E, die vom Zima-Typ ist, lokalkonvex sein muss ([4], S. 30). Spezielle Mengen vom Zima-Typ, wie sie Zima [20] selbst verwendete, werden im 4. Abschnitt untersucht.

Jerofsky [11, Satz 1.5 3] beweist:

Anmerkung 1: Es seien E ein topologischer Vektorraum und K eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von E. Wenn K eine lokalkonvexe Menge ist, so muss K zulässig sein.

Speziell ist also jede abgeschlossene, konvexe, lokalkonvexe

Teilmenge eines beliebigen topologischen Vektorraumes sowie jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes zulässig. In neueren Arbeiten zur Fixpunkttheorie werden statt konvexen Definitionsbereichen oft zusammenziehbare Mengen, die eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Teilmengen eines Banachraumes sind, betrachtet (s.z.B. [14],[19]). $K \subseteq E$ heisst dabei <u>zusammenziehbar</u>, wenn ein $x_0 \in K$ und eine stetige Abbildung $h: K \times [0,1] \longrightarrow K$ existieren, so dass $h(x,0) = x$ $(x \in K)$ und $h(x,1) = x_0$ gilt. Speziell ist eine bezüglich eines Elementes $x_0 \in K$ sternförmige Menge K also zusammenziehbar. Nach bekannten Sätzen der Topologie ist in einem Banachraum E eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Mengen genau dann zusammenziehbar, wenn sie ein Retrakt von E ist. Für das Arbeiten in nichtmetrisierbaren Räumen ist der folgende Begriff zweckmässig.

<u>Definition 8 ([11])</u>: Es sei E ein topologischer Vektorraum. $K \subseteq E$ heisse <u>pseudokonvex</u>, wenn gilt:

(1) Es existieren endlich viele abgeschlossene, konvexe Teilmengen $K_i \subseteq E$ $(i = 1,\dots,n)$ mit $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

(2) Es existiere ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E derart, dass für alle endlichdimensionalen Teilräume $E' \supseteq E_0$ die Menge $K \cap E'$ ein Retrakt von E' ist.

Speziell ist K pseudokonvex, wenn (1) gilt und K sternförmig ist. Dies tritt z.B. ein, wenn (1) gilt und $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$ ist, denn dann ist K sternförmig bezüglich jedes $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i$. Ein nicht so offensichtliches Beispiel einer pseudokonvexen Menge liegt vor, wenn (1) gilt und $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ $(i = 1,\dots,n-1)$ und $K_i \cap K_j = \emptyset$ $(|i-j| > 1)$ ist (s. [11 Beispiel 1.4.9]). Jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen konvexen Mengen, die zusammenziehbar ist, ist eine pseudokonvexe Menge, in metrisierbaren Vektorräumen gilt auch die Umkehrung dieser Aussage ([11]).

Jerofsky [11] beweist einen allgemeinen Fixpunktsatz für kompakte mengenwertige Abbildungen mit gewissen nicht notwendig konvexen Werten (Satz 4.2.5 in[11]). Die Spezialisierung auf unsere Situation liefert als Folgerung:

Anmerkung 2: Es seien E ein topologischer Vektorraum, $M \subseteq E$ eine pseudokonvexe, zulässige, nichtleere Menge und $F: M \longrightarrow k(M)$ eine kompakte Abbildung. Dann hat F einen Fixpunkt.

Sei $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ mit abgeschlossenen, konvexen Mengen $K_i \subseteq E$ $(i = 1,\ldots,n)$. Bilden wir alle möglichen nichtleeren Durchschnitte von Mengen K_i $(i = 1,\ldots,n)$, so erhalten wir wieder ein System von nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Mengen. Aus jeder bezüglich der Halbordnung " $\subseteq$ " minimalen Menge dieses Systems wählen wir genau ein Element aus. Die entstehende endliche Menge Q heisse ein Zentrum für K.

Anmerkung 3 ([11, Satz 1.4.6 (c)]): Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine pseudokonvexe und S eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Enthält S ein Zentrum von K, so ist $K \cap S$ pseudokonvex.

Nach diesen Hilfsmitteln können wir nun eine Fixpunktaussage für quasikompakte Abbildungen in nicht notwendig lokalkonvexen Räumen beweisen.

Theorem 1. Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine nichtleere und lokalkonvexe Teilmenge von E sowie $F: K \longrightarrow k(K)$ eine quasikompakte Abbildung. Es gelte eine der folgenden Bedingungen:

(1) K ist abgeschlossen und konvex.

(2) K ist pseudokonvex und F habe eine charakteristische Menge, die ein Zentrum von K enthält.

Dann hat F einen Fixpunkt.

Beweis: Nach Definition 6 existiert eine abgeschlossene, konvexe Menge $S \subseteq E$ mit $K \cap S \neq \emptyset$, $F(K \cap S) \subseteq S$ derart, dass $\overline{F(K \cap S)}$ kompakt ist. Sei $M := K \cap S$. Dann gilt $F(M) \subseteq M$ und $F_0 := F|M$ ist eine kompakte Abbildung von M in k(M). Da K lokalkonvex ist, muss M als Teilmenge von K auch lokalkonvex sein. Ist ferner im 1. Fall K konvex, so ist auch M konvex und abgeschlossen, also pseudokonvex. Ist im 2. Fall K pseudokonvex, so sichert (2) mit Anmerkung 3, dass M pseudokonvex ist. In jedem Fall können wir also auf F_0 und M Anmerkung 2 anwenden, die in Verbindung mit Anmerkung 1 die Existenz eines Fixpunktes x_0 für F_0 und damit auch für F sichert.

Die Bedeutung von Theorem 1 wird durch das folgende Hauptergebnis unserer Arbeit sichtbar, das aus Theorem 1 folgt.

Theorem 2. Es seien E ein topologischer Vektorraum, K eine nichtleere, abgeschlossene und lokalkonvexe Teilmenge von E und $F: K \longrightarrow k(K)$ eine Abbildung. Es sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) K ist konvex und F ist limeskompakt mit nichtleerem Limeswertebereich R^*

(2) K ist konvex und F verallgemeinert kondensierend.

(3) K ist konvex, F ohs und es existiere eine nichtleere Teilmenge $K_0 \subseteq K$ mit $K_0 \subseteq \overline{co}\, F(K_0)$ und aus $A = \overline{co}\, F(A)$ $(A \subseteq K)$ folge die Kompaktheit von A (s. Daneš [1]).

(4) K ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Teilmengen $K_i \subseteq E$ $(i = 1,\dots,n)$ mit $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$ und F ist eine C_1-Abbildung.

(5) K ist pseudokonvex und F ist bezüglich eines c-Nichtkompaktheitsmasses pseudokondensierend.

(6) F ist bezüglich eines Nichtkompaktheitsmasses kondensierend.

Dann hat F einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u>: (1) Sei R^* der Limeswertebereich von F. Da F limeskompakt ist, muss $\overline{F(K\cap R^*)}$ kompakt sein. Weiter folgen aus $R^* = \overline{co}\, F(K\cap R^*)$ die Relationen $F(K\cap R^*)\subseteq R^*$ sowie $K\cap R^* \neq \emptyset$ (da sonst $R^* = \emptyset$ gilt). Somit ist R^* charakteristische Menge für F, F also quasikompakt und die Behauptung folgt aus Theorem 1 (1).

(2) F ist limeskompakt. Wir zeigen, dass der Limeswertebereich von F nichtleer ist. Dann folgt die Behauptung aus Teil (1). Sei $a \in K$ und $A = \{a\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(a)$. Dann gilt $A = \{a\} \cup F(A) \subseteq K$, also $F(A) \subseteq A$ und $A \setminus F(A) \subseteq \{a\}$. Aus Bedingung (2) in Definition 3 folgt, dass $\overline{F(A)}$ kompakt ist. Wir definieren $K_0 := \overline{F(A)}$, $K_\alpha = \overline{F(K_{\alpha-1})}$ (falls $\alpha - 1$ existiert) bzw. $K_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} K_\beta$ (falls $\alpha - 1$ nicht existiert). Es gilt $K_0 \subseteq \overline{co}\, F(A) \subseteq \overline{co}\, F(K) = R_0$. Für die gemäss Definition 1 den Limeswertebereich R^* definierende transfinite Folge (R_α) gilt dann, wie man durch transfinite Induktion sofort sieht, die Beziehung $R_\alpha \supseteq K_\alpha$ für jede Ordinalzahl α. Aus der Kompaktheit der K_α folgt dann mit Standardüberlegungen, dass $R^* \neq \emptyset$ gilt (s. [18]).

(3) F ist limeskompakt. Sei R^* der Limeswertebereich von F und R_α die R^* gemäss Definition 1 definierenden Mengen.
Mit $R_0 = \overline{co}\, F(K) \supseteq \overline{co}\, F(K_0) \supseteq K_0$ folgt durch transfinite Induktion die Beziehung $R_\alpha \supseteq K_0$ für jede Ordinalzahl α. Damit ist $R^* \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt wieder aus (1).

(4) K ist pseudokonvex und die Voraussetzung $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$ sichert, dass jedes Zentrum von K einelementig ist. Sei $Q = \{q\}$

ein Zentrum von K und Σ das System aller abgeschlossenen, konvexen Teilmengen $D \subseteq E$ mit $q \in D$ und $F(K \cap D) \subseteq D$. Wegen $E \in \Sigma$ gilt $\Sigma \neq \emptyset$. Sei $S = \bigcap_{D \in \Sigma} D$. Dann gilt $S \in \Sigma$ und folglich $S' := \overline{co}\,(F(D \cap S) \cup \{q\}) \subseteq S$. Andererseits folgt aus $q \in S'$ und $F(K \cap S') \subseteq F(K \cap S) \subseteq S'$ auch $S' \in \Sigma$, woraus $S \subseteq S'$ folgt. Insgesamt gilt damit $S = \overline{co}\,(\{q\} \cup F(K \cap S))$. Nach Voraussetzung über F ist $\overline{F(K \cap S)}$ kompakt und wegen $F(K \cap S) \subseteq S$, $q \in K \cap S$ ist S eine charakteristische Menge von F. Damit ist F quasikompakt und wegen $Q \subseteq S$ folgt die Behauptung aus Theorem 1 (2).

(5), (6). Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ ein Zentrum von K. Nun sei Σ das System aller abgeschlossenen, konvexen Teilmengen D von E mit $Q \subseteq D$, $F(K \cap D) \subseteq D$. Wie in (4) sieht man, dass für die Menge $S := \bigcap_{D \in \Sigma} D$ die Beziehung $S = \overline{co}\,(\{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \ldots \{q_m\} \cup F(K \cap S))$ gilt. Aus den Eigenschaften des c-Nichtkompaktheitsmasses folgt $\psi(K \cap S) \leq c \cdot \psi(F(K \cap S))$. Mit Definition 5 folgt die Kompaktheit von $\overline{F(K \cap S)}$. Wegen $K \cap S \neq \emptyset$ und $F(K \cap S) \subseteq S$ ist S eine charakteristische Menge von F und somit F quasikompakt. Da S nach Konstruktion Q enthält, folgt die Behauptung wieder aus Theorem 1 (2).

Theorem 2 verallgemeinert eine grosse Anzahl von Fixpunktsätzen für entsprechende Abbildungen, da jedes konvexe K in einem lokalkonvexen Raum die Voraussetzungen von Theorem 2 erfüllt (s.z.B. [1],[2],[4],[6],[9],[10],[15],[16],[18]). Für verallgemeinert kondensierende Abbildungen verbessert Theorem 2 auch bei punktwertigen Abbildungen ähnliche Fixpunktsätze von Hadžić ([4], S. 31 und 33/34).

Ist übrigens K speziell eine konvexe Menge vom Zima-Typ in einem vollständigen topologischen Vektorraum, so kann in der Voraussetzung (6) von Theorem 2 als Nichtkompaktheitsmass ψ auf K die Funktion $\psi : 2^K \longrightarrow R$ mit $\psi(M) = 0$, falls $\overline{M} \subseteq K$ kompakt ist und

$\psi(M) = 1$, falls $\overline{M} \subseteq K$ nicht kompakt ist, verwendet werden. Hadžić ([4],[6]) zeigte, dass in dieser Situation tatsächlich $\psi(\overline{co}\ M) = \psi(M)$ für alle $M \subseteq K$ gilt.

4. Beispiel einer pseudokondensierenden, nichtkompakten Abbildung im nichtlokalkonvexen Raum S(0,1): Wir geben nun eine limeskompakte Abbildung auf einer lokalkonvexen Teilmenge des nichtlokalkonvexen Raumes S(0,1) an, die den Voraussetzungen von Theorem 2 genügt und die pseudokondensierend ist. Dazu benötigen wir zunächst ein c-Nichtkompaktheitsmass. Sei E ein metrischer Vektorraum, $K \subseteq E$, $\mathcal{T}$ das System aller beschränkten Teilmengen von $\overline{co}\ K$. Wir definieren die bekannte Kuratowski-funktion $\chi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\chi(M) := \inf\{\delta > 0$: M hat eine endliche Überdeckung durch Teilmengen von E, deren Durchmesser nicht grösser als δ ist$\}$. $(M \in \mathcal{T})$. Für χ gelten die Eigenschaften (1) aus Definition 4 sowie zusätzlich, dass $\chi(M) = 0$ genau dann gilt, wenn M präkompakt ist. Ferner gilt $\chi(A+B) \leq \chi(A) + \chi(B)$, falls A, B und A + B zu $\mathcal{T}$ gehören. Im allgemeinen ist jedoch χ kein Nichtkompaktheitsmass, denn $\chi(M) = \chi(co\ M)$ $(M \in \mathcal{T})$ ist nicht gesichert. In normierten Räumen gilt diese Gleichheit bekanntlich und dort ist χ als "Kuratowskisches Nichtkompaktheitsmass" verwendbar. Wir geben nun eine Situation an, wo χ wenigstens Eigenschaften (2) aus Definition 4 erfüllt, also ein c-Nichtkompaktheitsmass ist. Dazu verwenden wir Resultate von Hadžić.

Anmerkung 4 ([4, S. 57]): Es seien $(E, \|\ \|^*)$ ein paranormierter Raum (s.z.B. [4],[5]) und K eine beschränkte, konvexe Teilmenge von E, für die ein $r > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in K - K$ und jedes $t \in [0,1]$ gilt: $\| tx \|^* \leq rt \| x \|^*$. Dann ist für jedes

$A \subseteq K$ stets $\chi(\text{co } A) \leq r^2 \cdot \chi(A)$.

Somit ist χ auf einer Menge K, die die Voraussetzungen von Anmerkung 4 erfüllt ein r^2-Nichtkompaktheitsmass. Ferner sind solche Mengen K vom Zima-Typ, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$\text{co}(\{x \in E: \|x\|^* < \frac{\varepsilon}{r}\} \cap (K-K)) \subseteq \{x \in E: \|x\|^* < \varepsilon\}$ (vgl. [5]).

Damit sind sie lokalkonvex im Sinne von Definition 7. Wir entnehmen aus [5] (s.a. [4, S. 34]) folgendes Beispiel einer Menge K, die die Voraussetzungen von Anmerkung 4 erfüllt. Sei S(0,1) der Raum aller (Klassen von) endlichen messbaren Funktionen $x: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Durch $\|x\|^* = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} \mu(dt)$ $(x \in S(0,1))$ ist eine Paranorm in S(0,1) erklärt. Mit $d(x,y) := \|x-y\|^*$ $(x,y \in S(0,1))$ wird ein vollständiger metrischer Vektorraum erklärt, der nicht lokalkonvex ist. Sei $K_0 := \{x \in S(0,1): |x(t)| \leq \frac{1}{2}\ (t \in [0,1])\}$. Dann erfüllt K_0 die Voraussetzungen von Anmerkung 4 mit $r = 2$ ([5]). Unter Verwendung dieser Menge K_0 gilt:

<u>Theorem 3</u>. Sei $K_0 = \{x \in S(0,1): |x(t)| \leq \frac{1}{2},\ t \in [0,1]\} \subseteq S(0,1)$ und $F: K_0 \longrightarrow k(K_0)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften.

(1) $F = F_1 + F_2$

(2) $F_1: K_0 \longrightarrow K_0$ sei verallgemeinert $\frac{1}{4}$-kontrahierend, d.h., es existiere eine reelle Funktion $q(\alpha,\beta)$ mit $0 < q(\alpha,\beta) < \frac{1}{4}$ und $d(F_1x, F_1y) \leq q(\alpha,\beta)\, d(x,y)$ für alle $x,y \in K_0$ mit $\alpha \leq d(x,y) \leq \beta$.

(3) $F_2: K_0 \longrightarrow k(K_0)$ ist kompakt.

Dann ist F bezüglich χ pseudokondensierend und F hat einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u>: Die Kuratowskifunktion χ ist nach Anmerkung 4 und den nachfolgenden Ausführungen ein 4-Nichtkompaktheitsmass auf K_0. Mit bekannten Überlegungen (s.z.B. [17]) zeigen wir, dass F

χ-pseudokondensierend ist. Da K_0 lokalkonvex und konvex ist, folgt die Behauptung aus Theorem 2. Sei $A \subseteq K_0$ nicht relativ kompakt. Dann gilt $\chi(A) > 0$. Mit $d(A)$ bezeichnen wir den Durchmesser von A. Es gilt $\chi(A) \leq d(A)$. Sei $r \in (0, \frac{1}{4}\chi(A))$ und $\varepsilon > 0$ mit
$\varepsilon < \frac{0,25-q(r,d(A))}{q(r,d(A))} \chi(A)$.
Es existieren endlich viele Mengen $B_i \subseteq A$ $(i = 1,\dots,m)$ mit $A \subseteq \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ und $d(B_i) \leq \chi(A) + \varepsilon$ $(i = 1,\dots,m)$. Weiter gilt $F_1(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} F_1(B_i)$. Es seien x und y beliebige Elemente aus B_i. Im Falle $d(x,y) < r$ folgt wegen (2) $d(F_1x, F_1y) < r$. Falls $d(x,y) \geq r$ ist, so folgt aus $d(x,y) \in [r, d(A)]$ und (2) sofort $d(F_1x,F_1y) \leq \leq q(r,d(A))\, d(x,y)$ und wegen $d(x,y) \leq d(B_i) \leq \chi(A) + \varepsilon$ insgesamt $d(F_1x,F_1y) \leq \max\{r, q(r,d(A))\,(\chi(A) + \varepsilon)\}$ für beliebige $x,y \in B_i$ $(i = 1,\dots,m)$. Dann gilt $\chi(F_1(A)) \leq \max\{r, q(r,d(A))\,(\chi(A) + \varepsilon)\}$ und aus der Wahl von r sowie ε folgt $\chi(F_1(A)) < \frac{1}{4}\chi(A)$. Wegen $F(A) \subseteq F_1(A) + F_2(A)$ und der Kompaktheit von $\overline{F_2(A)}$ folgt schliesslich $\chi(F(A)) < \frac{1}{4}\chi(A)$. Somit impliziert $\chi(A) \leq 4\,\chi(F(A))$ $(A \subseteq K_0)$ die Kompaktheit von $\overline{A}$ und damit von $\overline{F(A)}$. Somit ist F χ-pseudokondensierend.

Bemerkung: Die Abbildung F aus Theorem 3 ist damit auch eine verallgemeinert kondensierende Abbildung, eine C_1-Abbildung und eine limeskompakte Abbildung mit nichtleerem Limeswertebereich in einem nichtlokalkonvexen Raum.

Literatur

[1] DANEŠ J.: Some fixed point theorems, Comment. Math. Univ. Carolinae 9(1968), 223-235.

[2] DANEŠ J.: Generalized concentrative mappings and their fixed points, Comment. Math. Univ. Carolinae 11(1970), 115-136.

[3] DANEŠ, J.: On densifying and related mappings and their application in nonlinear functional analysis, in: Theory of Nonlinear Operators, Proceedings of a summer-

school 1972, Neuendorf, GDR (1974), 11-56.

[4] HADŽIĆ O.: Fixed point theory in topological vector spaces, Novi Sad 1984.

[5] HADŽIĆ O.: A Leray-Schauder principle for multivalued mappings in topological vector spaces, Zb. rad. Prir.-mat. fak. Novi Sad, ser. mat. 12(1982), 19-29.

[6] HADŽIĆ O.: On Sadovski's fixed point theorem in topological vector spaces, Comm. Math. Vol. XXIV, No. 1(1983), 51-55.

[7] HAHN S.: A remark on a fixed point theorem for condensing set-valued mappings, TU Dresden, Informationen 07-5-77.

[8] HAHN, S.: Gebietsinvarianzsatz und Eigenwertaussagen für konzentrierende Abbildungen, Comment. Math. Univ. Carolinae 18(1977), 697-713.

[9] HAHN S.: Zur Theorie nichtlinearer Operatorengleichungen in topologischen Vektorräumen, Dissertation B, TU Dresden 1978.

[10] HAHN S.: Zur Bedeutung des Fixpunktsatzes von Schauder für die Fixpunkttheorie nicht notwendig kompakter Abbildungen, Beiträge zur Analysis 16(1981),105-119.

[11] JEROFSKY T.: Zur Fixpunkttheorie mengenwertiger Abbildungen, Dissertation A, TU Dresden 1983.

[12] KRASNOSELSKIJ M.A., ZABREJKO P.P.: Geometrische Methoden in der nichtlinearen Analysis, Moskau 1975(russisch).

[13] KRAUTHAUSEN C.: Der Fixpunktsatz von Schauder in nicht notwendig konvexen Raumen sowie Anwendungen auf Hammersteinsche Gleichungen, Dissertation, TH Aachen, 1976.

[14] NUSSBAUM R.D.: The fixed point index for local condensing maps, Annali di Mat. Pura Appl. 89(1971),217-258.

[15] PETRYSHYN W.V., FITZPATRICK P.M.: A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings, Transact. Amer. Math. Soc. 194(1974), 1-25.

[16] POTAPOV A.S.: Zur Theorie der Rotation von limeskompakten Vektorfeldern (russisch), Comment. Math. Univ. Carolinae 15(1974), 693-716.

[17] RIEDRICH T.: Vorlesungen über nichtlineare Operatorengleichungen , Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1976.

[18] SADOWSKI B.N.: Limeskompakte und kondensierende Abbildungen,U.M.N.27(1972), 85-155 (russisch).

[19] SCHÖNEBERG R.: Fixpunktsätze für einige Klassen kontraktionsartiger Operatoren in Banachräumen. Über einen Fixpunktindex, eine Zentrumsmethode und die Fixpunkttheorie nichtexpansiver Abbildungen, Dissertation Aachen 1977.

[20] ZIMA K.: On Schauder´s fixed point theorem with respect to paranormed space, Comm. Math. 19(1977), 421-423.

Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule "Karl Friedrich Wilhelm Wander" Dresden, DDR, 8060 Dresden, Wigardstrasse 17

(Oblatum 25.7. 1985)