Věra Mikolášová

Geradenkongruenzen im fünfdimensionalen projektiven Raum

*Archivum Mathematicum*, Vol. 15 (1979), No. 3, 143--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107034

ARCH. MATH. 3. SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XV: 143—150, 1979

# GERADENKONGRUENZEN IM FÜNFDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

VĚRA MIKOLÁŠOVÁ, Brno
(Eingegangen am 20. Dezember 1977)

**1.** Unter einer Geradenkongruenz $L$ im fünfdimensionalen projektiven Raum $P_5$ versteht man ein von vier Parametern abhängiges System von Geraden $l$ des Raumes $P_5$.

Im Sinne der bekannten Methode von E. Cartan ordnen wir jeder Geraden $l \in L$ ein bewegliches Bezugssystem $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ zu, dessen Bewegung durch die Gleichungen

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j; \qquad [A_1A_2A_3A_4A_5A_6] = 1; \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{1}$$

beschrieben ist. Wir wählen die Scheitelpunkte $A_1, A_2$ des erwähnten Bezugssystems auf der Geraden $l$ und setzen voraus, dass die folgenden Hauptformen von $L$

$$\omega^1 = \omega_1^3, \qquad \omega^2 = \omega_1^4, \qquad \omega^3 = \omega_1^5, \qquad \omega^4 = \omega_2^6 \tag{2}$$

linear unabhängig sind. Die Gleichungen der Kongruenz $L$ sind dann

$$\omega_1^6 = p_t\omega^t; \qquad \omega_2^3 = q_t\omega^t; \qquad \omega_2^4 = r_t\omega^t; \qquad \omega_2^5 = s_t\omega^t \tag{3}$$
$$(t = 1, 2, 3, 4)$$

Ein Punkt $F = xA_1 + yA_2$ heißt Brennpunkt der Geraden $l$, wenn bei der Bewegung von $l$ in irgendeiner, so genannten Brennrichtung $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4$ $[\mathrm{d}FA_1A_2] = 0$ gilt.

Der analytische Ausdruck der letzten Bedingung führt zu den Gleichungen

$$x\omega^1 + y\omega_2^3 = 0; \qquad x\omega^2 + y\omega_2^4 = 0; \qquad x\omega^3 + y\omega_2^5 = 0; \qquad x\omega_6^1 + y\omega^4 = 0.$$

Nach Einsetzung aus (3) erhalten wir für die unabhängigen Hauptformen das System von vier homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}(x + yq_1)\,\omega^1 + yq_2\omega^2 + yq_3\omega^3 + yq_4\omega^4 &= 0,\\ yr_1\omega^1 + (x + yr_2)\,\omega^2 + yr_3\omega^3 + yr_4\omega^4 &= 0,\\ ys_1\omega^1 + ys_2\omega^2 + (x + ys_3)\,\omega^3 + ys_4\omega^4 &= 0,\\ xp_1\omega^1 + xp_2\omega^2 + xp_3\omega^3 + (xp_4 + y)\,\omega^4 &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Dieses System hat eine nichttriviale Lösung, wenn ihre Determinante gleich Null ist. Es ist leicht einzusehen, daß diese Bedingung zu einer Gleichung 4. Grades führt, deren Wurzeln die Brennpunkte entsprechen. Im weiteren beschränken wir uns auf solche Kongruenzen, die auf jeder erzeugenden Geraden vier verschiedene Brennpunkte haben.

Man kann jetzt das bewegliche Bezugssystem so wählen, daß die Punkte $F_1 = A_1$, $F_2 = A_2, F_3 = A_1 - A_2, F_4 = A_1 - q_1^{-1}A_2$ mit den Brennpunkten von $l$ zusammenfallen, welche den folgenden Brennrichtungen

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0; \qquad \omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0;$$
$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0; \qquad \omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$$

entsprechen.

Durch Einsetzung in (4) ergibt sich

$$(5) \qquad p_1 = p_2 = p_4 = q_2 = q_3 = r_1 = r_3 = s_1 = s_2 = s_3 = 0; \qquad r_2 = 1.$$

Weiter verlangen wir, daß die den Brennpunkten $F_1, F_2, F_3, F_4$ zugehörigen Brennhyperebenen jeweilig mit den Hyperebenen $E_6, E_5, E_4, E_3$ zusammenfallen, wobei $E_u = [A_1, \ldots, A_{u-1}, A_{u+1}, \ldots, A_6]$ $(u = 3, 4, 5, 6)$.

Daraus ergibt sich

$$(6) \qquad p_3 = q_4 = r_4 = s_4 = 0.$$

Durch Einsetzung von (5) und (6) in (3) erhält man die Gleichungen der Kongruenz in der Form

$$(7) \qquad \omega_1^6 = 0; \qquad \omega_2^3 = q_1\omega^1; \qquad \omega_2^4 = \omega^2; \qquad \omega_2^5 = 0.$$

Durch äußere Differentiation der Gleichungen (7) ergibt sich

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\omega_3^6 \wedge \omega^1 + \omega_4^6 \wedge \omega^2 + \omega_5^6 \wedge \omega^3 - \omega_1^2 \wedge \omega^4 = 0,\\ &q_1\omega_3^5 \wedge \omega^1 + \omega_4^5 \wedge \omega^2 - \omega_2^1 \wedge \omega^3 + \omega_6^5 \wedge \omega^4 = 0,\\ &(q_1 - 1)\,\omega_3^4 \wedge \omega^1 + \{\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_1^2 - \omega_2^1\} \wedge \omega^2 - \omega_5^4 \wedge \omega^3 + \omega_6^4 \wedge \omega^4 = 0,\\ &\{\omega_2^1 + q_1(\omega_2^2 - \omega_1^1) - q_1^2\omega_1^2 - \mathrm{d}q_1\} \wedge \omega^1 + (q_1 - 1)\,\omega_4^3 \wedge \omega^2 + q_1\omega_5^3 \wedge \omega^3 - \omega_6^3 \wedge \omega^4 = 0 \end{aligned}$$

und daraus nach dem Cartan'schen Lemma folgt

$$(9) \qquad \begin{gathered} \omega_3^6 = c_{3v}^6\omega^v; \qquad \omega_4^6 = c_{4v}^6\omega^v; \qquad \omega_5^6 = c_{5v}^6\omega^v; \qquad -\omega_1^2 = c_{6v}^6\omega^v \\ q_1\omega_3^5 = c_{3v}^5\omega^v; \qquad \omega_4^5 = c_{4v}^5\omega^v; \qquad -\omega_2^1 = c_{5v}^5\omega^v; \qquad \omega_6^5 = c_{6v}^5\omega^v \\ (q_1 - 1)\,\omega_3^4 = c_{3v}^4\omega^v; \qquad \omega_1^1 + \omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2 = c_{4v}^4\omega^v; \\ -\omega_5^4 = c_{5v}^4\omega^v; \qquad \omega_6^4 = c_{6v}^4\omega^v, \\ \omega_2^1 + q_1(\omega_2^2 - \omega_1^1) - q_1^2\omega_1^2 - \mathrm{d}q_1 = c_{3v}^3\omega^v; \end{gathered}$$

$$(q_1 - 1)\,\omega_4^3 = c_{4v}^3\omega^v; \qquad q_1\omega_5^3 = c_{5v}^3\omega^v; \qquad -\omega_6^3 = c_{6v}^3\omega^v,$$

$$c_{u+2,v}^6 = c_{v+2,u}^6; \quad c_{u+2,v}^5 = c_{v+2,u}^5; \quad c_{u+2,v}^4 = c_{v+2,u}^4; \quad c_{u+2,v}^3 = c_{v+2,u}^3,$$
$$(u, v = 1, 2, 3, 4).$$

Daher kann man $dq_1$ als lineare Kombination der Basisformen ausdrücken, so daß $q_1$ eine absolute Invariante von $L$ ist. Durch direkte Ausrechnung des Doppelverhältnisses der Brennpunkte auf der Geraden der Kongruenz ergibt sich

$$q_1 = (F_1, F_2, F_3, F_4).$$

Bei weiter Kanonisation des Bezugssystems wählen wir die Punkte $A_3, A_4, A_5, A_6$ auf den Tangenten der Brennetze. Daraus ergibt sich

(10) $$c_{34}^6 = c_{33}^5 = c_{44}^6 = c_{43}^5 = c_{54}^6 = c_{43}^4 = c_{54}^5 = c_{44}^4 = 0,$$

was eine erghebliche Vereinfachungen von (9) ermöglicht.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß

(11) $$c_{31}^3 c_{42}^4 c_{53}^5 c_{64}^6 \neq 0.$$

Diese Voraussetzung entspricht der Forderung, daß die Mannigfaltigkeiten von Brennpunkten von $L$ vierdiemensional sind.

2. Außer der Geradenkongruenz $L$ im $P_5$ betrachten wir noch eine andere Geradenkongruenz $L'$ im projektiven Raum $P_5'$ mit ähnlich spezializiertem Bezugssystem. Alle zu $L'$ gehörenden Funktionen und Beziehungen werden wir mit Strich bezeichnen.

Es sei $C : L \to L'$ eine Korrespondenz zwischen $L$ und $L'$, die durch die Gleichungen

(12) $$\omega'^t = \omega^t \qquad (t = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmt ist.

Man nennt $C$ eine Projektivabwicklung erster Ordnung, wenn zu jeder Geraden $l \in L$ eine solche Kollineation $K : P_5 \to P_5'$ existiert, daß

(13) $$K[A_1A_2] = [A_1'A_2'],$$

(14) $$K\,\mathrm{d}[A_1A_2] = \mathrm{d}[A_1'A_2'] + \mu[A_1'A_2']$$

gilt.

Die Korrespondenz heißt eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung, wenn sie eine Projektivabwicklung erster Ordnung ist und überdies

(15) $$K\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = \mathrm{d}^2[A_1'A_2'] + 2\mu\,\mathrm{d}[A_1'A_2'] + (\ldots)[A_1'A_2']$$

gilt.

Nehmen wir an, daß die Kollineation $K$ durch

(16) $$KA_i = a_i^j A_j'; \ \det \| a_i^j \| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

bestimmt ist.

Die Bedingung (13) ist offensichtlich erfüllt genau dann, wenn

$$(17) \quad a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 = 1; \qquad a_1^u = a_2^u = 0; \qquad \det \| a_u^v \| \neq 0 \qquad (u, v = 3, 4, 5, 6).$$

Man hat

$$(18) \qquad \begin{aligned} d[A_1 A_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[A_1 A_2] + q_1 \omega^1 [A_1 A_3] + \omega^2 [A_1 A_4] + \\ + \omega^4 [A_1 A_6] + \omega^1 [A_3 A_2] + \omega^2 [A_4 A_2] + \omega^3 [A_5 A_2] \end{aligned}$$

und eine ähnliche Darstellung für $d[A_1' A_2']$.

Wir setzen (18), (16), (17), (18′), (12) in die Gleichung (14) ein und durch Vergleichung der Koeffizienten erhalten wir zuerst das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_3^3(q_1 a_1^2 - a_2^2) = -1; \quad a_3^3(q_1 a_1^1 - a_2^1) = q_1'; \quad a_3^u(q_1 a_1^2 - a_2^2) = 0; \quad a_3^u(q_1 a_1^1 - a_2^1) = 0, \\ &a_4^4(a_1^2 - a_2^2) = -1; \quad a_4^4(a_1^1 - a_2^1) = 1; \quad a_4^v(a_1^2 - a_2^2) = 0; \quad a_4^v(a_1^1 - a_2^1) = 0, \\ &a_5^5 a_2^2 = 1; \quad a_5^5 a_2^1 = 0; \quad a_5^w a_2^2 = 0; \quad a_5^w a_2^1 = 0, \\ (19) \quad &a_6^6 a_1^2 = 0; \quad a_6^6 a_1^1 = 1; \quad a_6^z a_1^2 = 0; \quad a_6^z a_1^1 = 0, \\ &(u = 4, 5, 6;\ v = 3, 5, 6;\ w = 3, 4, 6;\ z = 3, 4, 5) \end{aligned}$$

woraus nach (17)

$$\begin{aligned} &a_1^2 = a_2^1 = a_3^4 = a_3^5 = a_3^6 = a_4^3 = a_4^5 = a_4^6 = a_5^3 = a_5^4 = a_5^6 = a_6^3 = a_6^4 = a_6^5 = 0, \\ (20) \quad &a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^4 = a_5^5 = a_6^6 = \pm 1; \qquad q_1 = q_1' \end{aligned}$$

hervorgeht.

Die Vergleichung der übrigen Koeffizienten ergibt dann durch Anwendung von (20)

$$(21) \qquad \mu = \pm \{ \omega^1 (q_1 a_3^2 + a_3^1) + \omega^2 (a_4^2 + a_4^1) + \omega^3 a_5^1 + \omega^4 a_6^2 \} - \tau_1^1 - \tau_2^2,$$

wobei wir $\tau_i^j = \omega_i'^j - \omega_i^j$ bezeichnet haben.

Die bisherigen Ergebnisse können wir folgendermassen aussprechen:

*Die Korrespondenz $C : L \to L'$ ist genau dann eine Projektivabwicklung erster Ordnung, wenn $q_1 = q_1'$.*

*Die zugehörige Kollineation hat die Form*

$$(22) \quad KA_1 = \pm A_1'; \quad KA_2 = \pm A_2'; \quad KA_u = a_u^1 A_1' + a_u^2 A_2' \pm A_u' \qquad (u = 3, 4, 5, 6),$$

*wobei wir von den zwei Zeichen überall das erste oder zweite nehmen.*

Durch Differentiation von (12) erhält man

$$\begin{aligned} (-\tau_1^1 + \tau_3^3 + q_1 \tau_1^2) \wedge \omega^1 + \tau_4^3 \wedge \omega^2 + \tau_5^3 \wedge \omega^3 = 0, \\ \tau_3^4 \wedge \omega^1 + (-\tau_1^1 + \tau_4^4 - \tau_1^2) \wedge \omega^2 + \tau_5^4 \wedge \omega^3 = 0, \\ \tau_3^5 \wedge \omega^1 + \tau_4^5 \wedge \omega^2 + (-\tau_1^1 + \tau_5^5) \wedge \omega^3 = 0, \\ q_1 \tau_3^6 \wedge \omega^1 + \tau_4^6 \wedge \omega^2 + (-\tau_2^2 + \tau_6^6) \wedge \omega^4 = 0. \end{aligned}$$

Durch Differentiation von (18) erhalten wir

$$\text{(23)} \qquad d^2[A_1A_2] = U^{ij}[A_iA_j] \qquad (i < j;\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

wobei

$$\begin{aligned}
U^{13} &= q_1\,d\omega^1 + \omega^1\{dq_1 + q_1(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)\} + \omega^2\omega_4^3 - c_{53}^5\omega^3\omega^1 + \omega^4\omega_6^3,\\
U^{14} &= d\omega^2 + q_1\omega^1\omega_3^4 + \omega^2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_4^4) - c_{53}^5\omega^3\omega^2 + \omega^4\omega_6^4,\\
U^{15} &= q_1\omega^1\omega_3^5 + \omega^2\omega_4^5 - c_{53}^5\omega^3\omega^3 + \omega^4\omega_6^5,\\
U^{16} &= d\omega^4 + q_1\omega^1\omega_3^6 + \omega^2\omega_4^6 + \omega^4(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_6^6),\\
U^{23} &= -d\omega^1 - \omega^1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3) - \omega^2\omega_4^3 - \omega^3\omega_5^3 + q_1c_{64}^6\omega^4\omega^1,\\
U^{24} &= -d\omega^2 - \omega^1\omega_3^4 - \omega^2(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_4^4) - \omega^3\omega_5^4 + c_{64}^6\omega^4\omega^2,\\
U^{25} &= -d\omega^3 - \omega^1\omega_3^5 - \omega^2\omega_4^5 - \omega^3(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_5^5),\\
U^{26} &= -\omega^1\omega_3^6 - \omega^2\omega_4^6 - \omega^3\omega_5^6 + c_{64}^6\omega^4\omega^4,\\
U^{34} &= 2(1 - q_1)\,\omega^1\omega^2; \qquad U^{35} = -2q_1\omega^1\omega^3; \qquad U^{36} = 2\omega^1\omega^4;\\
U^{45} &= -2\omega^2\omega^3; \qquad U^{46} = 2\omega^2\omega^4; \qquad U^{56} = 2\omega^3\omega^4.
\end{aligned}$$

Ähnlich gewinnen wir $d^2[A_1'A_2']$ durch Differentiation von (18′) und durch Einsetzung von (12) und (20) und $K\,d^2[A_1A_2]$ durch Einsetzung der Gleichungen (22) in (23). Die letzten zwei Ausdrücke zugleich mit (14) und (18) setzen wir in die Bedingung (15) ein.

Durch Vergleichung der Koeffizienten und durch nacheinander folgende Einsetzung der erreichten Ergebnisse geht

$$\text{(24)} \qquad \begin{gathered}
\tau_1^1 = \tau_2^2 = \tau_3^3 = \tau_4^4 = \tau_5^5 = \tau_6^6,\\
\tau_1^2 = \tau_2^1 = 0,\\
\tau_u^v = 0 \qquad (u \neq v,\ u, v = 3, 4, 5, 6),\\
a_w^1 = a_w^2 \qquad (w = 3, 4, 5, 6)
\end{gathered}$$

hervor.

Aus (1) jedoch ergibt sich $\omega_i^i = 0$ und ebenso auch $\omega_i'^i = 0$. Im Hinblick auf (24) hat man deshalb

$$\tau_1^1 = \tau_2^2 = \tau_3^3 = \tau_4^4 = \tau_5^5 = \tau_6^6 = 0,$$

und durch äußere Differentiation der Gleichungen

$$\tau_l^k = 0; \qquad \tau_u^v = 0 \qquad (k, l = 1, 2;\ u, v = 3, 4, 5, 6),$$

erhält man

$$\text{(25)} \qquad \begin{gathered}
\tau_3^k \wedge \omega^1 + \tau_4^k \wedge \omega^2 + \tau_5^k \wedge \omega^3 = 0;\\
q_1\tau_3^k \wedge \omega^1 + \tau_4^k \wedge \omega^2 + \tau_6^k \wedge \omega^4 = 0;\\
\{\tau_u^1 + q_1\tau_u^2\} \wedge \omega^1 = 0; \qquad \{\tau_u^1 + \tau_u^2\} \wedge \omega^2 = 0;\\
\tau_u^1 \wedge \omega^3 = 0; \qquad \tau_u^2 \wedge \omega^4 = 0\\
k = 1, 2;\ u, v = 3, 4, 5, 6)
\end{gathered}$$

Die Anwendung des Cartan'schen Lemmas auf (25) und die Vergleichung mit (24) und ausserdem mit (2), (7), (12) ergibt dann die Gleichungen

$$\tau_i^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Das erlaubt uns den folgenden Satz auszusprechen:
*Die Korrespondenz $C : L \to L'$ ist eine Projektivabwicklung zweiter Ordnung genau dann, wenn die Kongruenzen $L$ und $L'$ projektiv äquivalent sind.*

3. Erwägen wir wieder die Korrespondenz $C : L \to L'$. Es sei zu jedem Geradenpaar $l, l' = Cl$ eine Kollineation $\pi : l \to l'$ gegeben. So erhalten wir die sogenannte Punkterweiterung $C^b$ der Korrespondenz $C$.

Die Korrespondenz $C$ wird eine Punktabwicklung genannt, wenn eine solche Punkterweiterung $C^b$ der Korrespondenz $C$ existiert, daß man für jede Gerade $l \in L$ eine Kollineation $M : P_5 \to P_5'$ mit folgenden Eigenschaften finden kann:

Ist $A$ ein beliebiger Punkt von $l$ und $\gamma$ eine beliebige Kurve, welche durch $A$ hindurchgeht und in der von $L$ erzeugten Punktmannigfaltigkeit erhalten ist, dann besitzen die Kurven $C^b\gamma$ und $M\gamma$ eine analytische Berührung erster Ordnung im Punkt $C^bA$.

Betrachten wir die durch (12) gegebene Korrespondenz $C : L \to L'$ und die mittels der Kollineation

$$\pi A_1 = b_1^1 A_1' + b_1^2 A_2'; \qquad \pi A_2 = b_2^1 A_1' + b_2^2 A_2'; \qquad b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \neq 0 \tag{26}$$

bestimmte Punkterweiterung $C^b$ von $C$. Nehmen wir an, daß die Korrespondenz $C$ eine Punktabwicklung ist und daß sie durch die Kollineation

$$MA_i = b_i^j A_j'; \qquad b_1^u = b_2^u = 0; \qquad \det \| b_i^j \| \neq 0 \tag{27}$$
$$(u = 3, 4, 5, 6;\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

realisiert wird.

Beschreibt der Punkt

$$A = x^1 A_1 + x^2 A_2 \tag{28}$$

eine Kurve $\gamma$ mit obigen Eigenschaften, so hat man

$$M\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(C^b A) + (\varphi_v \omega^v)\, C^b A \qquad (v = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

identisch in $x^1, x^2, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

Durch Differentiation von (28) und Einsetzung aus (27), (9), (10) ergibt sich

$$M\,\mathrm{d}A = A_i' b_1^i(\mathrm{d}x^1 + x^1\omega_1^1 + x^2 c_{53}^5 \omega^2) + b_2^i(\mathrm{d}x^2 + x^1 c_{64}^6 \omega^4 + x^2\omega_2^2) + \tag{30}$$
$$+ b_3^i(x^1 + q_1 x^2)\,\omega^1 + b_4^i(x^1 + x^2)\,\omega^2 + b_5^i x^1 \omega^3 + b_6^i x^2 \omega^4$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Aus (26) und (28) bekommt man

(31) $$C^b A = A'_1(x^1 b^1_1 + x^2 b^1_2) + A'_2(x^1 b^2_1 + x^2 b^2_2)$$

und durch Differentiation

(32) $$\begin{aligned} d(C^b A) = {} & A'_1\{d(x^k b^1_k) + x^k b^1_k \omega'^1_1 + x^k b^2_k c^5_{53} \omega'^3\} + \\ & + A'_2\{d(x^k b^2_k) + x^k b^1_k c'^6_{63} \omega'^4 + x^k b^2_k \omega'^2_2\} + \\ & + A'_3\{x^k b^1_k \omega'^1 + x^k b^2_k q'_1 \omega'^1\} + A'_4\{x^k b^1_k \omega'^2 + x^k b^2_k \omega'^2\} + \\ & + A'_5\{x^k b^1_k \omega'^3\} + A'_6\{x^k b^2_k \omega'^4\} \\ & (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Wir setzen (30), (31) und (32) in (29) ein. Durch Vergleichung der Koeffizienten folgt

(33) $$\begin{aligned} & N^1_k = b^2_k c^5_{53} \omega'^3; \quad N^2_k = b^1_k c^6_{64} \omega'^4; \quad N^3_k = (b^1_k + q'_1 b^2_k)\,\omega'^1; \\ & N^4_k = (b^1_k + b^2_k)\,\omega'^2; \quad N^5_k = b^1_k \omega'^3; \quad N^6_k = b^2_k \omega'^4; \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} & N^k_1 = b^k_1 \omega^1_1 + b^k_2 c^6_{64} \omega^4 + b^k_3 \omega^1 + b^k_4 \omega^2 + b^k_5 \omega^3 - db^k_2 - b^k_1(\omega'^k_k + \varphi_v \omega^v), \\ & N^k_2 = b^k_1 c^5_{53} \omega^3 + b^k_2 \omega^2_2 + b^k_3 q_1 \omega^1 + b^k_4 \omega^2 + b^k_6 \omega^4 - db^k_2 - b^k_2(\omega'^k_k + \varphi_v \omega^v), \\ & N^u_1 = b^u_3 \omega^1 + b^u_4 \omega^2 + b^u_5 \omega^3; \quad N^u_2 = q_1 b^u_3 \omega^1 + b^u_4 \omega^2 + b^u_6 \omega^4 \\ & (k = 1, 2;\ v = 1, 2, 3, 4;\ u = 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

und durch Einsetzung aus (12) in (33) erhält man

$$\begin{aligned} & b^1_1 = b^2_2 = b^3_3 = b^4_4 = b^5_5 = b^6_6 \neq 0; \quad b^2_1 = b^1_2 = 0; \\ & b^j_i = 0 \quad (i \neq j;\ i = 3, 4, 5, 6;\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \\ & db^1_1 = -b^1_1(\tau^1_1 + \varphi_v \omega^v) \quad (v = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

und

(34) $$q'_1 = q_1;\ c'^3_{31} = c^3_{31};\ c'^4_{42} = c^4_{42};\ c'^5_{53} = c^5_{53};\ c'^6_{64} = c^6_{64};$$

wobei zwei letzte Gleichungen mit Hilfe (9) festgelegt sind.

Im ganzen könen wir das folgende Ergebnis aussprechen:

*Die Korrespondenz $C : L \to L'$ ist eine Punktabwicklung genau dann, wenn (34) gilt: Die Punktabwicklung wird durch die Kollineation*

$$MA_i = b^1_1 A'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

*realisiert.*

## LITERATUR

[1] С. П. Фиников: *Проективно-дифференциальная геометрия*. Москва 1937.
[2] С. П. Фиников: *Теория пар конгрузнций*. Москва 1956.
[3] В. Г. Сычева: *О каноническом репере конгрузнций прямых в* $P_4$. Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та, 1964, 22, 3, 64—72.
[4] В. Г. Сычева: *О некоторых специальных классах конгрузнций прямых в четырехмерном проективном пространстве* $P_4$. Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та, 1964, 22, 3, 73—78.
[5] A. Švec: *Projective differential Geometry of line Congruences*. Praha 1965.

*V. Mikolášová*
*662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a*
*Tschechoslowakei*