Archivum Mathematicum

Danilo Rastović

Теорема Римана-Роха и теорема о размерности минимальной реализации линейных динамических систем

Archivum Mathematicum, Vol. 32 (1996), No. 1, 9--12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107558`

Terms of use:

© Masaryk University, 1996

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 32 (1996), 9 – 12

ТЕОРЕМА РИМАНА–РОХА И ТЕОРЕМА О РАЗМЕРНОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Данило Растович

Введение.

Построение различных канонических форм для конечно-мерных динамических систем рассматривается как важное средство проектирования указаных систем. Надо вычислить размерность минимальной реализации. Система называется минимальной если наблюдаема и управляема. Представляя динамическую систему в виде обычного "черного ящика", можно заметить, что такая система зависит от трех параметров, а именно от вектора входного сигнала, вектора состояния и выходного вектора. Часто предполагается, что функционирование системы во времени линейно по этим параметрам. В этом случае линейная система определяется следующими данными:

(I) некоторое кольцо k

(II) три левых k-модуля U, H, Y (пространства входных сигналов, состояний и выходных сигналов соответственно)

(III) четыре отображения $A \in \mathrm{Hom}_k(H,H)$, $B \in \mathrm{Hom}_k(U,H)$, $C \in \mathrm{Hom}_k(H,Y)$ и $D \in \mathrm{Hom}_k(U,Y)$

Функционирование такой системы в дискретные моменты времени задается следующими соотношениями:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx(t) + Du(t)$$

Мы будем называть введенный объект машиной (над k). Если фиксировать базисы пространств U, H и Y, то отображения (III) будут задаваться некоторыми матрицами.

§1. В случае скалярных входных и выходных сигналов частотная характеристика является рациональной т.е.

$$T(s) = \frac{f(s)}{X(A,s)}$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 93B.
Key words and phrases: Riemann Roch theorem, minimal realization.
Received January 3, 1995.

где $X(A,s)$ есть характеристически полином. В этом случае дискретную проблему реализации можно сформулировать следующим образом: задана рациональная функция $f(s)/g(s)$ такая, что $g(s)$ полином степени n, $\deg f(s) \leq n-1$, найти минимальную машину (A,b,c) со скалярными входными и выходными сигналами и с частотной характеристикой $f(s)/g(s)$.

Пусть k алгебраически замкнутое поле и K поле функций над k от одной переменной (короткое функциональное поле). Точкой поля K над k будем называть любое содержащее k кольцо дискретного нормирования в K (или кольцо над k).

Множество всех таких колец (т.е. точек поля K) называется кривой, а K-полем функций на ней.

Дивизорами (кривой или поля K над k) мы будем называть элементы свободной абеловой группы, порожденной точками. Всякий дивизор есть формальная сумма $a = \Sigma n_i P_i$ где P_i-точки, $n_i \in Z$. Сумму $\Sigma n_i = \Sigma n_P$ назовем степенью дивизора a, а n_i-его порядком в P_i.

Рациональная функция $\varphi(s) = f(s)/g(s)$ определяется нулями многочленов f и g, т.е. точками, в которых она обращается в 0 или нерегулярна. Чтобы отличать корни g от корней f, мы быдем брать их кратности со знаком минус.

Дивизор функции φ обозначается через (φ).

Назовем дифференциалом λ поля K любой k-линейный функционал, обращающийся в нуль на некотором пространстве $\Lambda(a)$ и на K, ([6]).

Дифференциалы образуют векторное пространство над K. Пусть λ-ненулевой дифференциал. Любой другой дифференциал имеет вид $\varphi \cdot \lambda$.

Дивизор дифференциала $\varphi\lambda$ будет $a+(\varphi)$. Этот класс дивизоров называется каноническим классом поля K, а любой дивизор из него называется каноническим дивизором.

Для любого дивизора a множество $L(a)$ будет линейным пространством над полем констант k. Обозначим его размерность через $\ell(a)$.

Если a положителен, то $L(a)$ состоит из всех функций в K, полосы которых лежат в a.

Теорема Римана-Роха заключается в равенстве

$$\ell(a) - \ell(c-a) = \deg a - g + 1$$

где a-произвольный дивизор на глаткой проективной кривой, c ее канонический класс, а g-род.

Будем вычислить размерность минимальной реализации в проективном представлении.

Пусть a-произвольный дивизор поля K и c любой дивизор из канонического класса.

Пусть a и c положительны дивизори и $c{-}a$ есть положительный дивизор, такой, что $\ell(c-a)$ есть максимальное число.

Теорема 1.1. *Размерность минимальных реализаций есть $\ell(c-a)$. Она вычисляется по формуле $\ell(c-a) = \ell(a) - \deg(a) + g - 1$.*

Доказательство. Поэтому что $c - a = (\varphi) + a - a$, а размерность есть максимальное число порядка минора якобиана, различного от нуля это будет степень Мек Милана по результате из [3]. Выражение для $\ell(c-a)$ следует из теоремы Римана-Роха для дивизоров.

§2. Для машин, функционирующих в непрерывном времени траектории такой системы задаются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = c^\top x(t) + du(t)$$

причем здесь предполагается, что k есть поле вещественных или комплексных чисел.

Основная проблема синтеза систем - это проблема реализации, которая состоит в нахождении машины (A, b, c) с заранее заданной частотной характеристикой

$$T(s) = ((A - sl)^{-1}b, c).$$

Классическая теорема Римана-Роха является основной теоремой теории алгебраических кривых.

Пусть V_n есть алгебраическое многообразие комплексной размерности n. Тогда $\dim H^2(V_2, F) = \dim H^0(V_2, K \otimes F^{-1})$ по теореме двойственности Серра и $\dim H^1(V_1, F) = \dim H^0(V_1, K \otimes F^{-1})$ где K одномерное векторное расслоение, определенное каноническим классом дивизоров.

Если F представлен дивизором, что всегда возможно, то $\deg F$ равно числу нулей минус число полюсов дивизора.

Пусть P^1 – 1-мерное проективное пространство, точка которого $x \in P^1$ задается элементами (x_0, x_1) поля k.

Пусть $T(s)$ есть частотная характеристика, такая, что $\lim_{s\to\infty} T(s) = 0$. Можно определить рациональное отображение $S^2 \to P^1$.

Теорема Римана-Роха для алгебраических кривых утверждает, что $x(V_1, F) = \deg F + 1 - g$, где x арифметически род.

Теорема 1.2. *Степень Мек Милана можно вычислить, по теореме Римана-Роха, по формуле* $\delta(t) = \dim H^0(P^1, Z) - \deg(Z) - 1$.

Доказательство. По результате Мартин-Хермана ([5]) первый класс Чженя $c_1 \in H^2(S^2, Z)$ есть степень Мек Милана $\delta(t)$ т.е. размерностъ минимальной реализации. Из теоремы двойственности следует, что $x(P^1, Z) = \dim H^0(P^1, Z) - \dim H^1(P^1, Z)$ т.е. $x(P^1, Z) = \dim H^0(P^1, Z) - \dim H^0(P^1, K \otimes Z^{-1})$ и, следовательно по теореме Римана-Роха превращается в

$$\dim H^0(P^1, Z) - \dim H^0(P^1, K \otimes Z^{-1}) = 1 - g + \deg(Z)$$

где $g = \text{род} P^1 = 0$, так, что степень Мек Милана есть

$$\delta(t) = \dim H^0(P^1, Z) - \deg(Z) - 1.$$

Список литературы

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии* Наука, 1972.
[2] Severi F., *Il teorema di Riemann-Roch per curve - superficie, e varieta questioni collegate*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 17 Springer-Verlag, 1958.
[3] Pugh A.C., *The Mc Millan degree of a polynomial system matrix*, Int. J. Control, 1, 24, 1976, 129-135.
[4] Hirzebruch F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York Inc., New York 1966.
[5] Hermann R., *Linear system theory and introductory algebraic geometry*, vol.8, Brookline, Mass., Interdisciplinary Math., 1974.
[6] Lang S., *Introduction to algebraic and abelian functions*, Addison-Wesley Bibl. Comp., Massachussetts, 1972.

Адрес автора:
Danilo Rastovich
Higher Technical School
Konavljanska 2
Zagreb, CROATIA