Josef Kaucký

Bemerkung zu einer Arbeit von Viktor Klee

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 2, 194--197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108102`

BEMERKUNG ZU EINER ARBEIT VON VIKTOR KLEE

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

(Eingegangen am 5. März 1965)

1

In vielen Arbeiten aus verschiedensten Gebieten der Mathematik und der verwandten Wissenschaften befinden sich oft Ausdrücke, die binomische Koeffizienten enthalten. Es besteht dann gewöhnlich die Aufgabe, diese Ausdrücke zu vereinfachen.

Eine Art der Vereinfachung solcher Ausdrücke geschieht mit Hilfe verschiedener kombinatorischer Wendungen, die aus Grundeigenschaften binomischer Koeffizienten hervorgehen. Siehe z.B. meinen Artikel über die Banachsche Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1].

Diese Art der Umgestaltung ähnlicher Ausdrücke ist machnmal mühevoll und langwierig. Es gibt aber viele Ausdrücke, deren Werte sogleich oder nach kleinen Modifizierungen bekannte und oft benützte kombinatorische Formeln ergeben, deren Herleitung selbst einfach, kurz und elementar ist.

In diesem Artikel möchte ich an zwei Beispielen die Vorzüge der Benutzung kombinatorischer Formeln zeigen. Im 3. Absatz werden zwei Beziehungen bewiesen, welche auf einem längeren Wege V. KLEE in seiner Arbeit [2] abgeleitet hat, und im 4. Absatz wird ähnlicherweise die kombinatorische Identität bewiesen, die ebenfalls auf eine langwierige Art von J. METELKA in dem Aufsatz [3] abgeleitet wurde.

Im 2. Absatz sind kombinatorische Formeln angeführt, die bei den erwähnten Beweisen benutzt wurden.

2

a) Das Symbol $\binom{x}{k}$, wo x eine beliebige komplexe, k dagegen eine reelle ganze Zahl bedeutet, definieren wir folgendermassen:

$$1^\circ \binom{x}{k} = 0,\ k < 0\,; \quad 2^\circ \binom{x}{0} = 1\,; \quad 3^\circ \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Es gilt die Beziehung

$$(0)\qquad \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}.$$

b) Zwei kombinatorische Formeln:

I. Ist x eine beliebige komplexe Zahl und sind m und n beliebige nichtnegative ganze Zahlen, so ist

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{x-i}{m} = \binom{x-n}{m-n}.$$

Bemerkung. Spezielle Fälle der Gleichung (1) befinden sich z.B. in [4] und [5] (S. 252, Formel (27)), wo sie aber auf eine andere Art bewiesen wurden.

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$. Wir setzen nun voraus, dass die Gleichung (1) für ein bestimmtes n richtig ist, und werden daraus die Richtigkeit der Gleichung

$$(1')\qquad \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \binom{x-i}{m} = \binom{x-n-1}{m-n-1}$$

folgern.

Es ist aber anhand (0) und der Voraussetzung

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \binom{x-i}{m} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n}{i-1} \binom{x-i}{m} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{x-i}{m} = \binom{x-n}{m-n} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{x-1-i}{m} =$$

$$= \binom{x-n}{m-n} - \binom{x-1-n}{m-n} = \binom{x-n-1}{m-n-1},$$

so dass die Relation (1) wirklich auch für $(n + 1)$ richtig ist und infolgedessen allgemein gilt.

II. Sind m und n beliebige nichtnegative ganze Zahlen, so ist

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m-2i}{n-1} = \binom{n}{m-n+1}.$$

(Siehe [5], S. 255, Formel (28a)).

3

V. Klee hat in der schon zitierten Abhandlung [2] folgende zwei Sätze bewiesen:

1. Für alle nichtnegative ganze Zahlen i und j gilt

$$\sum_{i=0}^{i}(-1)^i\binom{j}{i}\binom{j+i}{k}=(-1)^j\binom{j}{k-j}. \tag{3}$$

2. Für $0 < j < k$ ist

$$S=\sum_{i=2k-2j}^{2k-j}(-1)^i\binom{j}{2k-j-i}(2k-i)\binom{i-1}{k-1}=0. \tag{4}$$

Wir werden zeigen, dass diese Relationen einfach aus der Identität (1) hervorgehen.

Setzen wir nämlich in der Gleichung (1) $(n-i)$ anstatt i ein und legen dann in der so entstandenen Gleichung $n=j$, $m=k$, $x=2j$, so erhalten wir gerade die erwünschte Relation (3).

Um nun die Beziehung (4) zu beweisen, teilen wir zuerst die Summe auf der linken Seite in zwei Teile

$$S=2k\sum_{i=2k-2j}^{2k-j}(-1)^i\binom{j}{2k-j-i}\binom{i-1}{k-1}-k\sum_{i=2k-2j}^{2k-j}(-1)^i\binom{j}{2k-j-i}\binom{i}{k}.$$

Durch die Substitution $2k-j-i=l$ haben wir weiter

$$S=(-1)^jk\left\{2\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\binom{j}{l}\binom{2k-j-1-l}{k-1}-\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\binom{j}{l}\binom{2k-j-l}{k}\right\},$$

und mit Benutzung von (1) und (0) erhält man schliesslich

$$\begin{aligned}S&=(-1)^jk\left\{2\binom{2k-2j-1}{k-j-1}-\binom{2k-2j}{k-j}\right\}=\\&=(-1)^jk\left\{\binom{2k-2j-1}{k-j-1}-\binom{2k-2j-1}{k-j}\right\}=\\&=(-1)^jk\left\{\binom{2k-2j-1}{k-j-1}-\binom{2k-2j-1}{k-j-1}\right\}=0.\end{aligned}$$

Damit ist auch die Relation (4) bewiesen.

J. Metelka hat in seiner auch schon zitierten Arbeit [3] die Identität

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{2r-2k-1}{r-2k}=1 \tag{5}$$

bewiesen. Hierbei bedeutet r eine beliebige natürliche Zahl und N eine genügend grosse natürliche Zahl.

Offenbar können wir diese Gleichung in folgender Form

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k \binom{r}{k}\binom{2r-1-2k}{r-1} = 1$$

schreiben und diese Beziehung geht direkt aus der Gleichung (2) hervor, wenn wir dort r anstatt n und $(2r - 1)$ anstatt m einsetzen.

Literatur

[1] *Kaucký J.:* Note on the Banach's match-box problem. Mat.-fyz. čas. *12* (1962), 28—35.

[2] *Klee V.:* A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem, Canadian Journal of Math. *XVI* (1964), 517—531.

[3] *Metelka J.:* Speciální případ normální Cremonovy transformace v projektivním prostoru S_r. Sborník Vysoké školy pedagogické v Olomouci (Přírodní vědy) *VI*, 3 (1959), 23—38. Praha 1959.

[4] *Hagen J. G.:* Synopsis der höheren Mathematik. Bd. I (1891), 55—68.

[5] *Netto E.:* Lehrbuch der Combinatorik, Lepzig 1901.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Obrancov mieru 41, (Matematický ústav SAV).

Výtah

POZNÁMKA K JEDNÉ PRÁCI V. KLEE-A

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

V článku se ukazuje, že identity (3) a (4), které dokázal V. Klee v práci [2] a vztah (6), který odvodil J. Metelka v pojednání [3], jsou jednoduchými důsledky známých a běžně užívaných kombinatorických vzorců (1) a (2).

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ СТАТЬЕ В. КЛИ

ЙОСЕФ КАУЦКИ (Josef Kaucký), Братислава

В статье показано, что тождества (3) и (4), доказанные В. Кли в работе [2], и соотношение (5), полученное Й. Метелкой в работе [3], являются простыми следствиями известных и часто используемых комбинаторных формул (1) и (2).