Dalibor Klucký; Jaromír Krys

Druhá poznámka k článku akademika Bohumila Bydžovského „Inflexní body některých rovinných kvartik"

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 212--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108138

DRUHÁ POZNÁMKA K ČLÁNKU AKADEMIKA BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO „INFLEXNÍ BODY NĚKTERÝCH ROVINNÝCH KVARTIK"

DALIBOR KLUCKÝ, JAROMÍR KRYS, Olomouc

(Došlo dne 3. března 1966)

Budiž Q rovinná irreducibilní kvartika, $i > 0$ počet jejich inflexních bodů (tj. součet řádů jejich inflexních bodů), o kterém předpokládejme, že je násobkem 4, tj. $i = 4m$, m celé kladné. Naskýtá se otázka, zda bodová skupina inflexních bodů kvartiky Q tvoří úplný průsek této kvartiky s rovinnou algebraickou křivkou $K^{(m)}$ m-tého stupně.

V [1] jsou probírány případy:

(a) Kvartika bez singulárních bodů ($i = 24$).
(b) Kvartika se dvěma obyčejnými uzlovými body a bez dalších singularit ($i = 12$).
(c) Kvartika se dvěma inflexními body a bez dalších singularit ($i = 8$).
(d) Kvartika se dvěma obyčejnými body úvratu a bez dalších singularit ($i = 8$).
(e) Kvartika se dvěma obyčejnými body uzlovými a jedním obyčejným bodem úvratu ($i = 4$).

Ve [2] je probírán případ:

(f) Kvartika s jedním obyčejným bodem úvratu a bez dalších singularit ($i = 16$).

Naše poznámka se zabývá případem:

(g) Kvartika s jedním inflexním uzlovým bodem a bez dalších singularit ($i = 16$).

Věta: *Bodová skupina inflexních bodů rovinné irreducibilní kvartiky Q s jedním inflexním uzlovým bodem a bez dalších singularit tvoří úplný průsek kvartiky Q s další kvartikou $K^{(4)}$.*

Důkaz: Zvolíme-li projektivní soustavu souřadnic tak, že uzlový bod kvartiky Q zvolíme za bod O_3, tečny kvartiky Q v bodě O_3 za souřadnicové osy o_1 a o_2, bude mít kvartika Q rovnici:

$$(1) \qquad ax_1^4 + bx_2^4 + (cx_1^2 + dx_1x_2 + ex_2^2)\,x_1x_2 + (fx_1 + gx_2 + hx_3)\,x_1x_2x_3 = 0\,,$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $(f, g, h) \neq 0$.

Označíme-li H Hessián kvartiky Q, zjistíme:

$$H = 2(12ax_1^2 + 6cx_1x_2 + 2dx_2^2 + 2fx_2x_3)(12bx_2^2 + 6ex_1x_2 + 2dx_1^2 + 2gx_1x_3)\,hx_1x_2 + 2(3cx_1^2 + 3ex_2^2 + 4dx_1x_2 + 2fx_1x_3 + 2gx_2x_3 + hx_3^2)(fx_1^2 + 2gx_1x_2 + 2hx_1x_3)(2fx_1x_2 + gx_2^2 + 2hx_2x_3) - (2fx_1x_2 + gx_2^2 + 2hx_2x_3)^2(12bx_2^2 + 6ex_1x_2 + 2dx_1^2 + 2gx_1x_3) - 2(3cx_1^2 + 3ex_2^2 + 4dx_1x_2 + 2fx_1x_3 + 2gx_2x_3 + hx_3^2)^2\,hx_1x_2 - (fx_1^2 + 2gx_1x_2 + 2hx_1x_3)^2(12ax_1^2 + 6cx_1x_2 + 2dx_2^2 + 2fx_2x_3)\,.$$

Označíme-li Q také bikvadratickou formu tvořící levou stranu rovnice (1)[1]), hledejme kvadratickou formu

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \;{}^1)$$

takovou, aby

$$H + FQ = x_1x_2K\,,\;{}^2) \tag{2}$$

kde K je bikvadratická forma.

Pišme formu $H + FQ$ jednak ve tvaru

$$H + FQ = u_0x_1^6 + u_1x_1^5 + u_2x_1^4 + u_3x_1^3 + u_4x_1^2 + u_5x_1 + u_6\,, \tag{3}$$

jednak ve tvaru

$$H + FQ = v_0x_2^6 + v_1x_2^5 + v_2x_2^4 + v_3x_2^3 + v_4x_2^2 + v_5x_2 + v_6\,, \tag{4}$$

kde $u_i = u_i(x_2, x_3)$, $v_i = v_i(x_1, x_3)$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ jsou binární formy buď i-tého stupně nebo nulové.

Přímým výpočtem zjistíme:

$$u_6 = bx_2^4(-12g^2 + a_{22})\,x_2^2 + 2(-24gh + a_{23})\,x_2x_3 + (-48h^2 + a_{33})\,x_3^2 \tag{5}$$

$$v_6 = ax_1^4(-12f^2 + a_{11})\,x_1^2 + 2(-24fh + a_{13})\,x_1x_3 + (-48h^2 + a_{33})\,x_3^2\,. \tag{6}$$

Ze (3) a (4) plyne, že (2) platí tehdy a jen tehdy, jsou-li u_6 a v_6 nulové formy, to však nastane podle (5) a (6) tehdy a jen tehdy, platí-li

$$a_{11} = 12f^2,\; a_{22} = 12g^2,\; a_{33} = 48h^2,\; a_{13} = 24fh,\; a_{23} = 24gh\,,$$

a_{12} lze volit libovolně. Existuje tedy kvadratická forma F, takže platí (2).

Označme K též kvartiku, kterou určuje bikvadratická forma K.

---

[1]) Používáme téhož označení pro neurčité i neznámé; z kontextu je vždy patrné, o který z jmenovaných objektů se jedná.

[2]) Forma $H + FQ$ není pro žádnou kvadratickou formu F formou nulovou, neboť Q není komponentou své Hesseovy křivky.

Kvartiky Q a K jsou navzájem různé, neboť v opačném případě by existovalo (komplexní) číslo $c \neq 0$ tak, že $K = cQ$ a z (2) by plynulo: $Q \subset H$, což není možné.

Z (2) vyplývá: Je-li M libovolný regulární bod kvartiky Q, w větev (křivky Q) o počátku M, je stupeň Hessiánu na větvi w roven stupni křivky K na větvi w.

Je-li speciálně M inflexní bod kvartiky Q, je jeho řád, jakožto inflexního bodu křivky Q, roven stupni křivky H na větvi w a tedy též stupni křivky K na větvi w. Tento řád je však roven násobnosti bodu M, jakožto průsečíku křivek Q a K. Součet násobností inflexních bodů křivky Q, jakožto průsečíku křivek Q a K, je tedy roven 16, c.b.d.

Literatura

[1] *B. Bydžovský:* Inflexní body některých rovinných kvartik. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *88* (1963), str. 224—235.

[2] *J. Metelka:* Poznámka k článku akademika Bohumila Bydžovského „Inflexní body některých rovinných kvartik". Časopis pro pěstování matematiky, roč. *90* (1965), str. 455—457.

[3] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie JČMF Praha 1948, str. 373—385.

Adresa autorů: Olomouc, Leninova 26. (Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty UP.)

Резюме

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ АКАДЕМИКА Б. БЫДЖОВСКОГО: ТОЧКИ ПЕРЕГИБА НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ 4-ОГО ПОРЯДКА

ДАЛИБОР КЛУЦКИ, (Dalibor Klucký) ЯРОМИР КРЫС, (Jaromír Krys) Оломоуц

В стате доказана теорема: Пусть Q – плоская неприводимая кривая 4-ого порядка, не имеющая особых точек, кроме одной двухкратной точки, являющейся центром двух линейных ветвей второго класса с различными касательными. Тогда цикл точек перегиба кривой Q образует польное пересечение кривой Q с другой крывой 4-ого порядка.

Zusammenfassung

ZWEITE BEMERKUNG ZUM ARTIKEL DES AKADEMIKERS B. BYDŽOVSKÝ: WENDEPUNKTE EINIGER EBENEN KURVEN 4. ORDNUNG

DALIBOR KLUCKÝ, JAROMÍR KRYS, Olomouc

In diesem Artikel wird der folgende Satz bewiesen: Der Wendepunktdivisor einer ebenen irreduziblen Kurve 4. Ordnung, die ausser einem Wendeknotenpunkt[1]) singularitätenlos ist, wird von einer anderen Kurve 4. Ordnung ausgeschnitten.

[1]) d. h. ein Anfangspunkt von zwei linearen Zweigen 2. Klasse mit verschiedenen Tangenten.