

Maxmilián Pinl

Památce Ludwiga Berwalda

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 229--238

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108145>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

PAMÁTCE LUDWIGA BERWALDA

MAX PINL, Kolín n. Rýnem¹⁾

(Přeložil ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha^{a)})

*„Odpor devatenáctého století k realismu,
toť vztek Kalibana, jenž vidí v zrcadle svou
vlastní tvář.“^{b)}*

O. Wilde

V srdci Evropy leží Čechy, zeměpisně uzavřená „Česká kotlina“, a v jejím srdci největší české město, „Zlatá Praha“.

V Praze vznikla před více než šesti sty lety slavná universita, dílo Karla IV., krále českého a lucemburského a císaře římsko-německého. Šest století trvá úsilí akademiků pražské vysoké školy, úsilí „non sordidi lucri causa nec ad vanam captandam gloriam, sed quo magis veritas propagetur et lux eius qua salus humani generis continetur clarius effulgeat.“²⁾

Jako kdekoliv jinde i v Praze byla tak mnohdy ztěžována služba vědě, neboť

¹⁾ Na jaře 1964 hostující profesor na universitě Moscov v Moscow, Idaho USA.

²⁾ Na tomto místě děkuji co nejoddaněji všem, kteří mi umožnili napsat tento nekrolog, především mým kolegům z doby naší akademické činnosti v Praze, profesoru Dr. H. LOWIGOVÍ (nyní universita v Edmontonu, Kanada), pak paní Dr. ILONĚ ADLEROVÉ, paní JANĚ MAISLOVÉ a panu NORMANNOVI (všichni v Praze), dále Dr. E. BERWALDOVI (Mnichov) a profesoru Dr. P. FUNKOVI (Videň). Také pánům R. EPSTEINOVÍ (Londýn) a GOLDSCHMIEDOVI (Praha, mezitím zesnulý) vděčím za cennou pomoc a všem jsem povinován vřelým díkem. Rukopis nekrologu byl v němčině připraven k tisku již v létě r. 1948. Nicméně, což je zajímavé, byla však tato vzpomínka teprve o šestnáct let později otištěna anglicky v *Scripta Mathematica* (New York), sv. 27, č.3 v USA. Anglické znění podnítilo redakci „*Časopisu pro pěstování matematiky*“ uveřejnit nyní nekrolog i česky. Za toto rozhodnutí děkuje autor co nejoddaněji redakci „*Časopisu pro pěstování matematiky*“.

^{a)} Nekrolog vychází k 25. výročí úmrtí prof. Dr. L. Berwalda. Překlad vznikl z anglické verze otištěné v *Scripta Mathematica* 27 (1965), 193–203 a z původního německého znění (srv. autorovu pozn.²⁾).

Překladatel děkuje prof. Dr. M. Pinlovi za vzácnou ochotu, s níž mu zapůjčil původní německý rukopis.

Autorovy poznámky jsou číslovány ¹⁾–¹⁰⁾, překladatelovy jsou označeny ^{a)}–^{d)} a dodatkem (Pozn. překl.).

^{b)} Překlad J. Z. Nováka (Oscar Wilde: *Obraz Doriana Graye*, Praha 1964, str. 7). (Pozn. překl.)

nikoliv pravdy, ale „víry“ určují — jak tvrdil Ortega y Gasset — běh světových dějin. Tak tomu bylo až dosud. Ukážeme, že osud dr. LUDWIGA BERWALDA, řádného profesora matematiky na pražské universitě, nebyl výjimkou z tohoto pravidla.

ZAČÁTKY A VZESTUP

Andréovo knihkupectví patřilo odedávna k nejvýznamnějším a nejproslulejším v Praze. Bylo ve středu města blízko Prašné brány. Před první světovou válkou byl jeho majitelem MAX BERWALD, otec profesora Berwalda. Max Berwald pocházel z východního Pruska, ale jeho žena FRIEDERICKE, rozená FISCHELOVÁ, byla rodilá Pražanka. V manželství byly tři děti, dva bratři a sestra.

Ludwig Berwald se narodil 8. prosince 1883 v Praze - Starém Městě, v domě č. 300. Od raného mládí se zajímal o matematiku. Začátkem školního roku 1893/94 vstoupil do třídy Ia tehdejšího „c.k. německého státního gymnasia v Praze - Novém Městě, Na příkopě“. Na tomto gymnasiu můžeme sledovat jeho školní léta až do šesté třídy. V katalogu měl Berwald vždy zaznamenáno židovské náboženství a německý mateřský jazyk. Pak se Berwaldova rodina přestěhovala do historického hotelu „U modré hvězdy“ v Praze, Na příkopě č. 864^o), naproti Prašné bráně, která je charakteristickým znamením města. V hotelu „U modré hvězdy“ byla v r. 1866 podepsána mírová smlouva mezi Pruskem a Rakouskem. Ředitelem gymnasia Na příkopě byl Dr. JOSEF WALTER, třídními učiteli NIKOLAUS KOMMA a KARL KAPLAN. Berwaldovými učiteli matematiky byli JOSEF GUCKLA a později PROKOP KNOTHE. Na sklonku století Berwaldův otec prodal své knihkupectví a přestěhoval se s rodinou do Mnichova. Berwald tak ve studiích pokračoval ve vyšších třídách na mnichovském Luitpoldově gymnasiu. Po maturitě vstoupil na podzim r. 1902 na Královskou universitu Ludvíka-Maxmiliána v Mnichově, kde se věnoval studiu matematiky a fyziky. Navštěvoval přednášky těchto profesorů a docentů: v. BAEYER, BAUER, v. BRAUNMÜHL, CORNELIUS, DOEHLEMANN, FISCHER, GOETZ, v. GROTH, KORN, v. d. LEYEN, LINDEMANN, PRINGSHEIM, RANKE, v. REINHARDSTÄTTER, RÖNTGEN, VOSS, WASSERRAB. V prosinci r. 1908 dosáhl doktorátu u profesora Aurela Vosse prací „Über die Krümmungseigenschaften der Brennfächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen“. Jako Burckhardtův asistent a žák se chtěl habilitovat v Mnichově. Avšak pro plicní chorobu, která ho upoutala na tři roky do sanatoria, musil se omezit na soukromou vědeckou činnost.

Po tuto dobu žil ve Stockdorfu a Grünwaldu blízko Mnichova. 12. září 1915 se Berwald oženil s HEDWIGOU ADLEROVOU, narozenou 12. září 1875 v Praze. Tak přišel Berwald trvale zase do Prahy a seznámil se s GERHARDEM KOWALEWSKIM a GEORGEM PICKEM. Na jejich naléhání se habilitoval jako soukromý docent na německé universitě.³⁾ 24. března 1922 byl jmenován mimořádným a v r. 1927 řádným profesorem.

³⁾ V té době byly v Praze dvě university, česká a německá. V r. 1939 byla česká universita likvidována Němci. České úřady zrušily v r. 1945 německou universitu.

^{o)} Hotel stával na místě dnešní St. banky československé, jak laskavě zjistil O. JENIŠTA. (Pozn. překl.)

V r. 1929 odešel G. Pick na odpočinek⁴⁾ a Berwald se stal vedoucím ústavu matematiky na universitě. Ve školním roce 1931/32 „Spectabilis“ děkan přírodovědecké fakulty – po deseti letech pak číslo 816 transportu C, který se skládal z Židů zasvěcených smrti ve strašných německých koncentračních táborech.

Autor této vzpomínky se seznámil s Berwaldem v létě r. 1926. Přirozeně jej především poznal jako vědce, z počátku zdrženlivého, vybírajícího pečlivě a přesně svá slova, vždy vážného a opatrného, trochu skeptického, ale přesvědčeného a rozhodného, když bylo třeba. Ve vědecké osobnosti se však později objevila i citlivá umělecká bytost s mimořádným muzikálním – a jak se ukázalo při vzácných příležitostech – dokonce i poetickým nadáním. Berwald byl vysoké a štíhlé postavy. Poněvadž byl krátkozraký, nosil obyčejně brýle. Po dřívější vážné nemoci byl Berwald velmi náchylný k nachlazení. V jeho pracovně, která byla středem bytu, převládala proto i v zimě nadnormální teplota, „subtropické Berwaldovo klima“, které bylo tak dobře známé a oblíbené v matematických a fyzikálních kruzích v Praze. Krátce po začátku rozhovoru se objevil před návštěvníkem nevůravě a nenápadně malý stolek s čajem a výborným pražským slaným pečivem. Jestliže přišel další návštěvník, dostal také svůj vlastní stolek a diskuse pokračovala. Konverzace byla zřídka omezena na matematické téma, druhým stejně důležitým tématem byla hudba. Berwald byl výborným pianistou a věnoval se pravidelně komorní hudbě. Se svými přáteli, mezi něž patřil i prof. Pick, který hrál na housle, nastudoval rozsáhlou hudební literaturu. Po čase, když se Berwald přestěhoval o poschodí níže, střetla se jeho hudební činnost se sousedovým rozhlasovým šílenstvím – jako většina milovníků hudby, Berwald nevladl rozhlasový přijímač. Popsal mi do podrobností jemu vlastním humorným způsobem, jak přehlušil sousedovo řvoucí radio Bachovými preludii a fugami. Dovedl jsem si dobře představit, jak nábytek v domě tančil při těchto příležitostech. Berwald býval velmi rád, když se řeč stočila na jeho cesty po Dalmácii – jak miloval horké slunce této kamenité země, jak rád líčil své zkušenosti z cestování a ukazoval četné obrázky, které nasbíral. Berwaldova vytrvalost a úžasná pečlivost vyniknou v následujícím shrnutí jeho celoživotního vědeckého díla. Pile spojená s mimořádným smyslem pro povinnost ho neodradila ani od práce, která byla pod jeho úroveň. Autor tohoto nekrologu si dobře vzpomíná na epizodu, jak Berwald za indispozice jednoho asistenta začal a sám provedl namáhavou práci – založil písemný katalog knihovny celého ústavu. Berwald nebyl vůbec jednostranný a bez zájmu o politiku a historii. Ale nikdo z nás nemohl v těchto krásných letech v Praze ani při největší fantazii předvídat, co pak ve skutečnosti přišlo.

ČÍSLA 2793/816, 817, TRANSPORT C

22. října 1941 se shromáždili u pražského veletržního paláce Židé, kteří byli z příkazu německé tajné státní policie zařazeni do třetího transportu do ghetta v Lodži

⁴⁾ Za okupace Čech německým vojskem byl profesor Dr. G. Pick ve věku 80 let z rozhodnutí německé tajné státní policie deportován do terezinského ghetta. Zemřel tam 26. července 1942.

v Polsku. Berwaldovi patřili do tohoto transportu. Jejich čísla v seznamu byla 2793/816 a 817. Předchozího dne Berwald rozdělil své poslední matematické rukopisy. 22. října se zakončilo jeho vědecké dílo. Bylo ještě možné na základě lékařského vysvědčení vyjmout čísla 2793/816 a 817 z transportu C. Ale tato čísla odmítla takový způsob a zvolila svůj úděl mezi tisícem ostatních lidí v transportu, kteří věděli o své jisté smrti. Když transport C přijel do Lodže, řekli „tamní“ Židé nově přichozím, že v ghettu žijí už dva roky. Ghetto v Lodži bylo skutečně založeno krátce po německé invasi v r. 1939. Berwaldovi byli umístěni v nedostavěné jednoposchodové škole s neomítnutými cihlami, v bývalé Marešinské ulici, pak nazvané Siegfriedově, č. 48. Nebyla tam lůžka ani příkrývky, dokonce ani slamníky, na něž by si obyvatelé lehli. Lidé prostě leželi jeden vedle druhého na holé podlaze. Někteří byli umístěni také na půdě. Přirozeně každý spal ve svém denním oděvu. Zakryl se prostě šatstvem a příkrývkami, které si přinesl s sebou. Umístění v budově, která nebyla předtím obydlena, bylo výhodné. Obyvatelé alespoň neměli delší dobu štěnice a vši, Berwaldovi pravděpodobně až do své smrti. Padesát pět lidí spalo v místnosti, která měřila přibližně dvacet krát dvacet stop. Rodinám bylo dovoleno, aby zůstaly pohromadě. To samozřejmě znamenalo, že muži, ženy a děti spali společně. V budově nebylo topení. Přesto však pro velký počet lidí byla teplota v domě i v zimě dosti vysoká.⁵⁾

V budově nebyly žádné umývárny. Obyvatelé se mohli umýt v primitivních přístavcích na dvoře. Za těchto okolností, když byla velká zima, se mnozí, zvláště starší, nemyli. V budově bylo zavedeno elektrické osvětlení. Obvyklá denní strava obsahovala 1/4 kg chleba, k tomu dvakrát denně černou „kávu“ a jednou denně špatnou polévku. Židům bylo dovoleno pohybovat se volně v ghettu. Mladší lidé musili pracovat; skupina jich byla později deportována do Poznaně, kde zemřeli na tyfus. Hromadné transporty Židů z Lodže do vyhlazovacích táborů začaly již v r. 1942. V květnu 1942 bylo transportováno 12 000 přestárlých a práce neschopných lidí do Majdanku; dalších 20 000 ke konci roku 1942. Tam byli masově vražděni ještě brutálněji než v Osvětimi. Berwald v Lodži nepracoval. Pravděpodobně by byl později usmrcen v Majdanku, kdyby byl ještě v květnu nebo na podzim 1942 naživu. Avšak paní Berwaldová zemřela 27. března 1942 a profesor Ludwig Berwald o málo týdnů později, 20. dubna, v hanebný den německých dějin. Existují překvapivě úplně polské doklady o jejich smrti.⁶⁾

⁵⁾ Podle informací, za něž vděčím panu Dr. O. Seibertovi (Gladbeck), je možno soudit, že při venkovní teplotě -20°C byla v místnostech teplota si 17°C .

⁶⁾ V českém překladu znějí:

Polská republika. Civilní registrační úřad v Lodži. Lodž, 28. listopadu 1946. Osvědčení.

Civilní registrační úřad v Lodži osvědčuje, že v úřední matrice zemřelých III v ghettu v Lodži za r. 1942 je zaznamenáno pod č. 7163: Dr. Berwald Ludwig, bytem v ulici „40“, č. 48, narozený 8. 12. 1883 v Praze, vdovec, profesor. Zemřel v Lodži 20. 4. 1942 v 11 hod. Příčina smrti: střevní katar, srdeční slabost.

Registrátor: Felicja Poznańska, v.r.

Felicja Poznańska L.S.

Civilní registrační úřad v Lodži osvědčuje, že v úřední matrice zemřelých v ghettu v Lodži za r. 1942 je zaznamenáno pod č. 5673: Berwaldová, Hedwika, bytem v ulici „9“, č. 49, dcera Ema-

VĚDECKÉ DÍLO

Podle připojené bibliografie se L. Berwald věnoval převážně diferenciální geometrii. Jen malý zlomek jeho vědecké činnosti (srv. [1], [6], [15], [30], [33]–[36], [38], [49]) se týká jiných oblastí, zvláště algebraických a čistě analytických problémů.

Četná diferenciálně geometrická pojednání, jež L. Berwald uveřejnil v letech 1909–1949, poskytují zřetelný obraz toho rozmachu diferenciální geometrie, který – zvláště též v Německu – začal na přelomu století pracemi E. Studyho. E. Study převzal Plückerovo duchovní dědictví v Bonnu. Tam vznikly invariantně teoretické metody ke studiu analytických křivek a ploch, které byly stejně přesné jako geometricky účinné a které umožnily dalekosáhlé jednotné vyšetřování těchto útvarů a odstranily zbytečné výjimky v poloze geometrických objektů. Ve vývoji diferenciální geometrie v těchto letech byla přitom dáována přednost studiu jistých singulárních křivek a ploch (nezbytně imaginárních v důsledku euklidovské metriky prostoru, do něhož byly vnořeny). Jako vzor takového studia uveďme práci [3] o plochách s jedinou soustavou vzájemně mimoběžných minimálních přímek. Jedná se tedy o necylindrické plochy studované nejdříve G. Mongem, na nichž se ztotožňují obě soustavy hlavních čar. L. Berwald našel jednoduché vytvoření těchto ploch pomocí poloisotropní plochy. Podle volby této pomocné plochy v isotropním kuželi nebo v isotropní rozvinutelné ploše (ploše tečen isotropní křivky) se získá rozdělení „Mongeových ploch“ na první a druhý typ. Mongeovy plochy prvního druhu s konstantní Gaussovou křivostí neexistují. Jejich místo zauímají koule. Mongeovy plochy druhého druhu s konstantní Gaussovou křivostí jsou Serretovy plochy. Ve spojení s analytickým vyjádřením podařilo se Berwaldovi v této práci určit zvláště všechny algebraické Mongeovy plochy, včetně nejjednodušších tohoto druhu, jako Mongeovy plochy třetího stupně. Nejjednodušší Serretovy plochy jsou čtvrtého stupně. Velmi zajímavé jsou také „automorfnní“ Mongeovy plochy, které připouštějí grupu rotací kolem vrcholu k nim příslušného isotropického kužele. Rovněž práce [4] a [5] patří do problematiky vzniklé v Bonnu. Studie o pohybových invariantech a elementární geometrii v minimální rovině ukazuje, že metoda navržená E. Studyem – určit v geometrii euklidovské roviny všechny celistvé irreducibilní pohybové invarianty v neohrazeném systému bodů a přímek jakož i irreducibilní relace mezi těmito invarianty – je způsobilá poskytnout totéž i vzhledem k automorfnním podobnostním transformacím minimální (isotropické) roviny. Toto téma, které tehdy podrobně zpracoval také H. Beck⁷⁾, se stalo znovu aktuálním pracemi K. Strubeckera a W. Vogela o geometrii isotropního (minimálního) prostoru.

nuela a Fredericky, narozená 12. 9. 1875 v Praze, vdaná, bez zaměstnání. Zemřela v ghettu v Lodži 27. 3. 1942 v 15 hod. Příčina smrti: kornatění tepen.

Registrátor: Felicja Poznańska, v.r.
Felicja Poznańska L.S.

⁷⁾ Srv. H. Beck: Zur Geometrie in der Minimalebene. S.-B. Berlin. Math.-Ges. 12 (1912/13), 14–30.

V Praze měly nové vlivy, spojené nejdříve s jmény G. Picka a P. Funka, veliký význam pro Berwaldovu tvořivou činnost. P. Funk, který studoval u Hilberta, přenesl z Göttingen do Prahy nejnovější variační teorie a G. Pick rozvinul tehdy pokračování „Erlangenského programu“ výstavbou diferenciálních geometrií s grupami transformací bez pohybových invariantů, zvláště pak ideou afinní diferenciální geometrie jakožto nejbližším případem. Je známo, jak tento program byl velmi úspěšně uskutečněn za vědeckého a organizátorského vedení W. Blaschkeho. L. Berwald měl na této činnosti velký podíl. Byla to doba, v níž vznikl při Vltavě „pražský kroužek“, onen spolek pražských matematiků a fyziků tak zvláštních vědeckých a společenských kvalit (označení „kroužek“ pochází od W. Blaschkeho, který ostatně statut a pravidla tohoto spolku redukoval na prázdnou množinu). – Z této doby se zmíníme hlavně o pracích [8]–[14]. Zatímco pojednání [8] a [9] představují spíše začátek řady vyšetřování o geometrii obecných (nejdříve Finslerových) metrik – řady, která se později stala velice významnou, mají práce [10]–[14] definitivnější charakter a W. Blaschke je z velké části pojal do druhého svazku své učebnice o diferenciální geometrii⁸⁾. Práce [8] a [9] lze považovat za počátky skupiny dalších důležitých studií, jejichž širší pojetí začalo pojednáními [17] a [18] a jejichž pokračováním se L. Berwald zabýval až do své deportace, jak ukazuje třeba práce [52] z pozůstalosti. V teorii paralelního přenosu a křivosti v tzv. Finslerových prostorech (obecně metrických prostorech) se jedná – jak známo – o zobecnění výsledků z teorie Riemannových variet na případ, kdy úlohu elementu oblouku hraje libovolná „základní funkce“ souřadnic a jejich diferenciálů (pozitivně homogenní prvního stupně v těchto diferenciálech). Je-li možno tuto základní funkci převést transformací souřadnic na tvar, který závisí pouze na diferenciálech, hovoří se pak o Minkowskiho prostoru. Výstavba teorie těchto obecně metrických prostorů se L. Berwaldovi podařila v rozsáhlé analogii k teorii Riemannových prostorů (srv. práce [17], [18], [23], [26]). Druhé derivace kvadrátu základní funkce podle diferenciálů tvoří tzv. Finslerův fundamentální tensor. S jeho pomocí definuje L. Berwald délku libovolného vektoru v bodu vzhledem k libovolnému směru v tomto bodu – krátce délku „vzhledem k libovolnému lineárnímu elementu“ – a objem n -dimensionální oblasti vzhledem k poli křivek. Pro teorii paralelního přenosu užívá L. Berwald formalismu Emmy Noetherové, který modifikuje řešením odpovídající Eulerovy-Lagrangeovy diferenciální rovnice vzhledem k druhým derivacím souřadnic. Koeficienty tohoto řešení tvoří systém funkcí dimenze dvě, který je pozitivně homogenní v prvních derivacích souřadnic, a druhé derivace těchto funkcí podle prvních derivací souřadnic jsou komponenty paralelního přenosu v obecně metrickém prostoru. Z nich lze vypočítat tensor křivosti prostoru a další veličiny křivosti způsobem, který je formálně nasnadě.

⁸⁾ O tom čteme v předmluvě k druhému dílu Blaschkeho „Differentialgeometrie“ (Berlin, Springer 1923): „Nejsrdečnější přátelský pozdrav matematickému kroužku v Praze! R. 1916 publikoval pan G. Pick spolu s jedním z nás první studie o afinní teorii ploch. Později se k afinnímu spolku připojili A. Winternitz a L. Berwald a zvláště pak panu Berwaldovi děkujeme za mnoho při sepsání této knihy. (Srv. zvláště §§ 65, 66.)

Poněvadž tenzory této geometrie jsou funkcemi lineárních elementů, existuje kromě kovariantního diferencování v Ricciho smyslu další kovariantní diferencování, totiž obyčejné parciální diferencování podle diferenciálů, a tedy též dvojí vzorce pro záměnu druhých derivací, v nichž vystoupí v jednom tensor křivosti a v druhém tzv. asymetrický tensor afinní konexe. Při paralelním přenosu po uzavřené čáře se obecně změní norma vektoru, tj. existuje křivost S^d). S takovou tvorbou pojmů získává L. Berwald tuto klasifikaci obecně metrických prostorů:

- I. Riemannovy prostory, charakterizované komponentami Finslerova tensoru, jež jsou pouze funkcemi bodu;
- II. prostory s afinní konexí, charakterizované vymizením asymetrického tensoru;
- III. Landsbergovy prostory, v nichž Finslerův fundamentální tensor je kovariantně konstantní;
- IV. prostory bez křivosti S ;
- V. prostory s nenulovou křivostí S .

Jakmile byl dokončen vývoj obecné teorie, obrátil se L. Berwald k speciálnějším otázkám z teorie obecně metrických prostorů. V této souvislosti se zmíníme o pojednáních [27] a [28]. Práce „Über die n -dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind“ zobecňuje Funkovu charakterizaci dvoudimensionálních Hilbertových geometrií na obecný n -dimensionální případ. Zvláště se v této práci odvozuje jednak nemožnost obecných prostorů s přímkovými extrémami, jejichž skalár křivosti je nekonstantní funkce bodu, jednak zobecnění věty, kterou pro $n = 2$ dokázal P. Funk: *Minkowskiho geometrie a geometrie specifických metrik jsou jediné geometrie s přímkovými extrémami té vlastnosti, že transversální nadroviny jedné a téže přímky, která je obrazem extrémaly, jsou všechny rovnoběžné.*

Třetí skupina vyšetřování v teorii obecně metrických prostorů začíná výtahem z přednášky [39] z roku 1935, když zatím E. Cartan dal teorii těchto prostorů jistý uzavřený tvar. Cartanova vyšetřování spojil L. Berwald se staršími studii L. Koschmiedera o invariantním normálním tvaru druhé variace parametricky invariantního $(n - 1)$ -násobného plošného integrálu, který je ve smyslu Cartanovy teorie zároveň zaveden jako základní integrál Cartanovy geometrie. Přitom se Cartanovy prostory předpokládají vždy regulární. Tato vyšetřování probíhají částečně paralelně s teorií nadploch ve Finslerových prostorech, vybudovanou J. M. Wegenerem. Druhou variaci plošného integrálu, vzatého po extrémální nadploše s pevným $(n - 2)$ -dimensionálním okrajem, lze převést na normální tvar identický s Koschmiederovým. Invariant, který vstupuje do Koschmiederova normálního tvaru, objevuje se přitom reprezentovaný tensorem torse, křivostí Cartanova prostoru a jistými veličinami nadplochy.

^{d)} „Streckenkrümmung“ v německém rukopisu, v anglické verzi „curvature of length“. Viz [17], str. 218 nebo [18], str. 58. Překladateli není znám odpovídající český termín. (Pozn. překl.)

V r. 1935 začal W. Blaschke systematické studium tzv. integrální geometrie. L. Berwald se jej zúčastnil pracemi [42] a [43], v nichž se mj. odvozují zajímavá zobecnění pojmu smíšeného objemu dvou vejčitých těles a jim příslušné integrální vzorce. Tělesa konstantní světlosti (jejich všechny normální průměty mají stejný obsah) lze charakterizovat integrálně-geometricky: Jsou identická s vejčitými tělesy, pro něž je konstantní funkce, kterou je možno interpretovat jako opěrnou funkci vejčitého tělesa se středem v počátku.

L. Berwald se zajímal o konvexní tělesa i nezávisle na systematických vyšetřováních, jak ukazují třeba také práce [49], [53] a [54] z pozůstalosti. Jedná se v nich o jisté funkcionální nerovnosti, které vedou k Favardovým zobecněním věty o střední hodnotě pro pozitivní konkávní funkce, rovněž i pro více proměnných.

Ze všech zbývajících pojednání mimo řadu systematických studií se zde ještě zmíníme především o práci [32], jejíž tematika byla nadále opětně studována L. Koschmiederem a H. Gerickem. Konečně upozorníme ještě na encyklopedickou stat [21], jež svědčí o autorových rozsáhlých věcných a literárních znalostech a též o houževnaté plí a velké pracovní vytrvalosti. Právě v tomto díle psaném jako referát lze poznati Berwaldovu vědeckou důkladnost; neopomenul zde poukázat na skrytou i pozoruhodnou mezeru v teorii kvadratických diferenciálních forem, na nutnost existenčního důkazu pro Schläfliho tvrzení o možnosti vnoření Riemannovy variety do euklidovského prostoru nejnižší dimense. Vskutku podařilo se pak velmi brzy E. Cartanovi a M. Janetovi vyplniti tuto mezeru.⁹⁾

BIBLIOGRAFIE

L. Berwald obohatil matematickou vědu těmito pojednáními a vědeckými pracemi:

- [1] Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (Math.-phys. Kl.)* 1909, 5. Abh., 1—19.
- [2] Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihnen enthaltenen Regelflächen. *Disertace, Mnichov* 1909, 1—67.
- [3] Über die Flächen mit einer einzigen Schar zu einander windschiefer Minimalgeraden. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (Math.-phys. Kl.)* 1913, 143—211.
- [4] Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in einer Minimalebene. *Mh. Math. Phys.* 26 (1915), 211—228.
- [5] Über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nichteuklidischen Raum. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (Math.-phys. Kl.)* 1916, 1—18.
- [6] Über einige Minimumsätze der Dreiecks- und Tetraedergeometrie. *Arch. Math. Phys.* (3) 25 (1916), 97—103.
- [7] Zur Geometrie in einer speziellen Kongruenz erster Ordnung erster Klasse. *S.-B. Akad. Wiss. Wien (Math.-naturwiss. Kl.)* 128 (1919), 1403—1451.
- [8] (S P. Funkem) Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung. *Lotos (Praha)* 67/68 (1919), 45—49.

⁹⁾ Srv. M. Janet, *Ann. Soc. Pol. Math.* 5 (1926), 38—73; E. Cartan, *ibid.* 6 (1927), 1—7; G. Vranceanu, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Anhang III*, Berlin 1961.

- [9] Über die erste Krümmung der Kurven bei allgemeiner Massbestimmung. *Ibid.* 67/68 (1919) 52–56.
- [10] Über affine Geometrie XXVII. Liesche F_2 , Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. *Math. Z.* 8 (1920), 63–78.
- [11] Über affine Geometrie XXX. Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie. *Ibid.* 10 (1921), 160–172.
- [12] Zur Geometrie einer n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit im $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 30 (1921), 76.
- [13] Zur Geometrie einer n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit im $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum. *Ibid.* 31 (1922), 162–170.
- [14] Die Grundgleichungen der Hyperflächen im euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten. *Mh. Math. Phys.* 32 (1922), 89–106.
- [15] Über eine Ungleichheit für bestimmte Integrale. *Tôhoku Math. J.* 24 (1924), 88–94.
- [16] (S P. Frankem) Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. *Math. Z.* 21 (1924), 154–159.
- [17] Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 34 (1925), 213–220.
- [18] Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Z.* 25 (1926), 40–73.
- [19] Zur Geometrie ebener Variationsprobleme. *Lotos (Praga)* 74 (1926), 43–52.
- [20] Sulle trasformazioni puntuali a di contatto nell piano. *Boll. Un. Mat. Ital.* 6 (1927), 241–250.
- [21] Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Sv. III D (1927). Stran 109.
- [22] Sui differenziali secondî covarianti. *Atti R. Acc. Naz. Lincei (6). Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.* 5 (1927), 763–768.
- [23] Berichtigung zu der Abhandlung „Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus“. *Math. Z.* 26 (1927), 176.
- [24] Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. I., II. *J. reine angew. Math.* 156 (1927), 191–222.
- [25] Una forma normale invariante della seconda variazione. *Atti R. Acc. Naz. Lincei (6). Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.* 7 (1928), 301–306.
- [26] Parallelübertragung in allgemeinen Räumen. *Matematici*, Bologna 1928, 263–270.
- [27] Über die n -dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in welchen die Geraden die Kürzesten sind. *Math. Z.* 30 (1929), 449–469.
- [28] Über eine charakteristische Eigenschaft der allgemeinen Räume konstanter Krümmung mit geradlinigen Extremalen. *Mh. Math. Phys.* 36 (1929), 315–330.
- [29] Kleine Bemerkungen zur natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen (Vortragsauszug). *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 39 (1930), 59–60.
- [30] Verallgemeinerte Matrizen-Zirkulanten. *Ibid.* 40 (1930), 2–3.
- [31] Kleine Bemerkungen zur Theorie der ebenen Transformationsgruppen. *Ibid.* 40 (1931), 167–176.
- [32] Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. *Mh. Math. Phys.* 38 (1931), 89–108.
- [33] Lösung einer Aufgabe von Nikola Obreschkoff. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 42 (1932), 83–84.
- [34] Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. *Math. Z.* 37 (1933), 61–76.
- [35] Bemerkungen zu der Abhandlung: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. *Ibid.* 37 (1933), 768.

- [36] Über die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitung in Bezug auf einen Punkt. *Tôhoku Math. J.* 37 (1933), 52—68.
- [37] Lösung einer Aufgabe von H. Liebmann. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 43 (1933), 25—26.
- [38] Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. *Acta Litt. Regiae Univ. Hungariae Francisco-Josephinae Szeged* 6 (1933), 209—221.
- [39] Über Finslersche und verwandte Räume (Vortragsauszug). *Comptes Rendus du deuxième congrès des mathématiciens des pays slaves, Praha 1934. Čas. pěst. mat. fys.* 64 (1935), 1—16.
- [40] Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. *Mh. Math. Phys.* 43 (1936), 1—14.
- [41] On the projective geometry of paths. *Ann. of Math. (2)* 37 (1937), 879—898.
- [42] (S. O. Vargou) Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum. *Math. Z.* 42 (1937), 710—736.
- [43] Integralgeometrie 25. Über die Körper konstanter Helligkeit. *Ibid.* 42 (1937), 737—738.
- [44] Über Finslersche und Cartansche Geometrie II. (G. Pick zum 80. Geburtstag), Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallellflächen in Cartanschen Räumen. *Comp. math.* 7 (1939), 141—176.
- [45] Über die n -dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n - 1)$ -fachen Oberflächenintegrals (E. Cartan zum 70. Geburtstag). *Acta math.* 71 (1939), 191—248.
- [46] Über Finslersche und Cartansche Geometrie I. Geometrische Erklärung der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes. *Mathematica, Cluj*, 16 (1940), 34—58.
- [47] On Finsler and Cartan geometries. III. Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals. *Ann. of Math. (2)* 42 (1941), 84—112.
- [48] Über die Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen. (Z. pozůstalosti.) *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 49, 642—647 (Indagationes Math. 8, 401—406 (1946)).
- [49] Verallgemeinerung eines Mittelwertsatzes von J. Favard für positive konkave Funktionen. (Z. pozůstalosti.) *Acta math.* 79 (1947), 17—37.
- [50] Über Haar's Verallgemeinerung des Lemmas von Du Bois-Raymond und verwandte Sätze. (Z. pozůstalosti.) *Ibid.* 79 (1947), 39—49.
- [51] Über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralkurven mit dem System der geraden Linien äquivalent sind. (Z. pozůstalosti.) *Ann. of Math. (2)* 48 (1947), 193—215.
- [52] Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung. (Z. pozůstalosti.) *Ibid.* (2) 48 (1947), 755—781.
- [53] Über den Schwerpunkt gewisser konvexer Bereiche. (Z. pozůstalosti.)
- [54] Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eiliniien und die entsprechenden Grössen bei Eiflächen. (Z. pozůstalosti.) *Mh. Math.* 53 (1949), 202—210.¹⁰⁾

¹⁰⁾ Kromě zde uvedených publikací uvažoval profesor Dr. P. Funk ještě o doplnění a zpracování některých dalších nedokončených rukopisů z Berwaldovy pozůstalosti.