Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE DER KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

Zdeněk Vančura, Praha

(Eingegangen 15. Mai 1984)

In den Arbeiten [10] bis [15] versuchten wir die Konzeption, Inhalt und Form der Differentialgeometrie von Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum zu erzeugen.

Zum Abschluss dieser, *durch das Theorem aus* [15] *charakterisierten Differentialgeometrie,* versuchen wir *einige Vertiefungs- und Entwicklungsideen insgesamt einiger ihren wichtigsten Realisationen* aufs kürzeste darzustellen.

Vor allem kann man die ω-Tensoren ${}^{n\omega}_{\alpha}a_{ij}, {}^{n\omega}_{\alpha}b_{ij}$ der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten ($n = 3, 4$; $\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}$) *tiefer* als in [15], d.h. *unabhängig von den adjugierten Kugelmannigfaltigkeiten,* folgendermassen definieren:

$$(1) \qquad {}^{n\omega}_{I}a_{ij} = (\vartheta^2 + 1)\,{}^{ndd}T_{ij} + {}^{nds}T_i\,{}^{nds}T_j + \delta^n_4\vartheta_i\vartheta_j\,,$$

$${}^{n\omega}_{I}b_{ij} = \vartheta({}^{ndd}T_{ij} - \vartheta_i\,{}^{ds}T_j + \delta^n_4\,\vartheta_i\,\vartheta_j)\,,$$

$$\vartheta = ({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{\omega}K)^{1/2}\,{}^{\omega}K^{-1}\,, \quad {}^{\omega}K \neq 0\,;$$

$$(2) \qquad {}^{n\omega}_{II}a_{ij} = {}^{ndd}T_{ij} + {}^{nds}T_{ij} - {}^{nds}T_{ji}\,,$$

$${}^{n\omega}_{II}b_{ij} = {}^{nds}T_i\,{}^{nds}T_j\,,$$

$${}^{\omega}K = 0\,, \quad {}^{\omega}H \neq 0\,.$$

Dann muss man auch die in [15] angeführten Hauptergebnisse der „Linienproblematik" von n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten durch folgende, aus (1), (2) und aus den Tensoren im Theorem in [15] sich egebende, Hauptergebnisse ersetzen:

Für die ω-Krümmungen ${}^{n\omega}_{\alpha}K^i$ ($n = 3, 4$; $i = 1, 2$; $\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}$) der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit bekommt man dann vor allem:

${}^{3\omega}_{I}K^1 = {}^{3\omega}_{I}K^2$ *gilt genau dann, wenn eine von den ω-Krümmungen gleich*

$$(3) \qquad \frac{2\vartheta^3}{(\vartheta^2 + 1)\left([(\vartheta^2 + 1)^2 - \vartheta^2\right]}$$

ist.

${}^{3\omega}_{I}K^1 = {}^{3\omega}_{I}K^2 = 0$ *gilt genau dann, wenn die Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen des Linienkomplexes von Kugelflächen gebildet werden.*

Genau dann, wenn für eine ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^i$ (i ist einer der Werte 1, 2) des Linienkomplexes die Beziehung

$$(4) \qquad {}^{3\omega}_{I}K^i = 2(-1)^{i+1}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta^2+1}\right)^{2+(-1)^{i+1}}$$

gilt, ist die restliche ω-Krümmung des Linienkomplexes gleich Null.

Bei dem Linienkomplex mit konstantem Skalar ϑ sind entweder beide ω-Krümmungen oder keine ω-Krümmung konstant.

Wenn jede ω-Brennkongruenz des Linienkomplexes den Skalar ϑ konstant hat bzw. wenn die beigeordneten Geraden von ω-Brennkongruenzen des Linienkomplexes parallel sind, dann gilt (bei $\vartheta \neq 0$): ${}^{3\omega}_{I}K^1 = 0$ genau dann, wenn der Linienkomplex den Skalar ϑ konstant hat bzw. die beigeordneten Geraden von ω-Brennkongruenzen des Linienkomplexes denselben Skalar ϑ haben. ${}^{3\omega}_{I}K^2 = 0$ gilt genau dann, wenn auf dem Linienkomplex (bei ω-Brennkongruenzen $u_3 = const$)

$$(5) \qquad {}^{ds}T_3 = \tfrac{1}{2}(\vartheta^2 + 1)\,\vartheta_3$$

gilt.

Wenn jede ω-Brennkongruenz jedes ω-Brennkomplexes des Linienraums den Skalar ϑ konstant hat, so bekommt man: ${}^{4\omega}_{I}K^1 = 0$, ${}^{4\omega}_{I}K^2 \neq 0$. Die erste ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^1$ des Linienraums ist auf einem ω-Brennkomplex seiner ersten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^1$ genau dann gleich, wenn auf diesem ω-Brennkomplex der Skalar ϑ konstant ist. Die zweite ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^2$ des Linienraums is auf jedem ω-Brennkomplex von seiner zweiten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^2$ verschieden.

Wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen der ω-Brennkomplexe des Linienraums parallel sind und die beigeordneten Geraden der ω-Brennkomplexe den gleichen Skalar ϑ besitzen, dann gilt:

$$(6) \qquad {}^{4\omega}_{I}K^1 = 0\,, \quad {}^{4\omega}_{I}K^2 = -\vartheta(\vartheta^2+1)^{-1}(\vartheta^2+3) \neq 0\,.$$

Die erste ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^1$ des Linienraums ist auf jedem ω-Brennkomplex von seiner ersten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^1$ verschieden. Die zweite ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^2$ des Linienraums ist auf einem ω-Brennkomplex seiner zweiten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^2$ genau dann gleich, wenn (bei ω-Brennkongruenzen $u_3 = const.$ der ω-Brennkomplexe $u_4 = const$) auf diesem ω-Brennkomplex

$$(7) \qquad {}^{ds}T_3 = \vartheta_3$$

gilt.

Wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen der ω-Brennkomplexe des Linienraums parallel sind und die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen jedes ω-Brennkomplexes den gleichen Skalar ϑ besitzen, dann gilt: Die Gleichungen (6). Die erste ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^1$ des Linienraums ist auf jedem ω-Brennkomplex seiner ersten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^1$ gleich. Die zweite ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^2$ des Linienraums ist auf jedem ω-Brennkomplex von seiner zweiten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{I}K^2$ verschieden.

Wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen jedes ω-Brennkomplexes parallel sind und den gleichen Skalar ϑ besitzen bzw. wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkomplexe parallel sind und den gleichen Skalar ϑ besitzen bzw. wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen der ω-Brennkomplexe den gleichen Skalar ϑ besitzen, dann ist für die erste ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{I}K^1 = 0$.

Für die ω-Krümmungen ${}^{3\omega}_{II}K^1$, ${}^{3\omega}_{II}K^2$ des Linienkomplexes bekommt man ${}^{3\omega}_{I}K^1 = {}^{3\omega}_{I}K^2 = 0$.

Für die ω-Krümmungen ${}^{4\omega}_{II}K^1$, ${}^{4\omega}_{II}K^2$ des Linienraums bekommt man ${}^{4\omega}_{II}K^1 = 0$, ${}^{4\omega}_{II}K^2 \neq 0$.

Die erste ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{II}K^1$ des Linienraums ist der ersten ω-Krümmung jedes seinen ω-Brennkomplexes gleich. Die zweite ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{II}K^2$ des Linienraums ist auf jedem ω-Brennkomplex von seiner zweiten ω-Krümmung ${}^{3\omega}_{II}K^2$ verschieden.

Wenn die beigeordneten Geraden der ω-Brennkongruenzen jedes ω-Brennkomplexes des Linienraums bzw. die beigeordneten Geraden der ω-Brennkomplexe des Linienraums parallel sind, dann ist die zweite ω-Krümmung ${}^{4\omega}_{II}K^2$ des Linienraums positiv.

Sonst bleiben die Ergebnisse der Arbeit [15] unverändert.

Weiter werden wir immer unter zweidimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten nur diejenigen, welche von Kugeln mit konstantem Halbsmesser gebildet werden, unter n-dimensionalen Linienmanngfaltigkeiten adjungierte n-dimensionale Linienmannigfaltigkeiten ($n = 2, 3, 4$), under Ω- und ω-Brennkongruenzen der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten diese zweidimensionale Mannigfaltigkeiten selbst verstehen und Gausssche Krümmungen bzw. mittlere Krümmungen der Mittelpunktflächen der Ω- und ω-Brennkongruenzen durch ${}^{\Omega}K$ bzw. ${}^{\Omega}H$ und ${}^{\omega}K$ bzw. ${}^{\omega}H$ bezeichnen.

Neue, weitergehende, durch die Tensoren aus dem Theorem in [15] *untersuchte Begriffe* wollen wir durch folgende Definitionen einführen:

Den Skalar ${}^{n\Omega}_{I}K$, ${}^{n\Omega}_{II}K$ bzw. ${}^{n\omega}_{I}K$, ${}^{n\omega}_{II}K$ aus den Gleichungen

$$(8) \qquad {}^{n\Omega}_{I}K = {}^{n\omega}_{I}K = \frac{\det \left|{}^{dd}T_{ij} + \delta^n_3\, {}^{ds}T_i\, {}^{ds}T_j + \delta^n_4({}^{ds}T_i r_j + {}^{ds}T_j r_i)\right|}{\det \left|{}^{ds}T_{ij} + \delta^n_3\, {}^{ds}T_i\, {}^{ds}T_j + \delta^n_4({}^{ds}T_i r_j + {}^{as}T_j r_i)\right|}$$

$$ {}^{\Omega}K = {}^{\omega}K \neq 0\,, \quad \det \left|{}^{ds}T_{ij} + \delta^n_3\, {}^{ds}T_i\, {}^{ds}T_j + \delta^n_4({}^{ds}T_i r_j + {}^{ds}T_j r_i)\right| \neq 0\,,$$

$$n = 2, 3, 4\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

$$(9) \qquad {}^{n\Omega}_{II}K = {}^{n\omega}_{II}K = \frac{\det \left|{}^{ds}T_{ij}\right|}{\det \left|{}^{ss}T_{ij} + \delta^n_4\, r_i r_j\right|}$$

$${}^{\Omega}K = {}^{\omega}K = 0\,, \quad {}^{\Omega}H = {}^{\omega}H \neq 0\,, \quad \det \left|{}^{ss}T_{ij} + \delta^n_4 r_i r_j\right| \neq 0\,,$$

$$n = 2, 3, 4\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

wo $(\mathbf{s}; r)$ die Ω-Brennkongruenzen der Ω-Brennkongruenzen bzw. der adjungierten ω-Brennkongruenzen der Kugel- bzw. Linienfannigfaltigkeit darstellen, wollen wir als *die Ω-Krümmung* bzw. *die ω-Krümmung der n-dimensionalen Kugel-* bzw. *Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Die Menge von allen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten ($n = 2, 3, 4$), welche als die ($n - 2$)-parametrigen Systeme ihrer Ω-Brennkongruenzen kongruent sind, nennen wir *die Ω-Klasse der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten.*

Die Menge der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten ($n = 2, 3, 4$), welche als die ($n - 2$)-parametrigen Systeme ihrer ω-Brennkongruenzen den n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten der Ω-Klasse adjungiert sind, wollen wir als *die ω-Klasse der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten* bezeichnen.

Die Menge von allen Kugeln bzw. Linien der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit in deren Ω- bzw. ω-Brennpunkten die (verschiedenen) Brennflächen der angehörigen Ω- bzw. ω-Brennkongruenz gleiche Gausssche Krümmung besitzen, wollen wir als *die ΩK-* bzw. *ωK-Approximation der n-dimensionalen Kugel-* bzw. *Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Unter Anwendung der vorangehenden Definitionen, von [12] (Gleichungen (2) bis (8)), von [15] (Gleichungen (3′)), von [11] (Sätze 1.13, 3.3, 3.4, 5.16), von [6] (Sätze auf S. 223, 227, 262, 275, 334, 374–5, 378, 380, 382) bekommt man durch die Tensoren aus dem Theorem in [15] folgendes:

Die Ω-Krümmung bzw. die ω-Krümmung der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit ist in jeder ihren Kugel bzw. Linie der Ω-Krümmung bzw. der ω-Krümmung der durch diese Kugel bzw. Linie gehenden Ω- bzw. ω-Brennuntermannigfaltigkeit gleich. Die Ω-Krümmung bzw. die ω-Krümmung der zweidimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit ist der Gaussschen Krümmung ihrer Mittelpunktfläche gleich.

Für die entsprechenden Kugeln bzw. Geraden jeder zwei n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeiten $_*\mathfrak{p}$, $_{**}\mathfrak{p}$ bzw. $_*\mathsf{p}$, $_{**}\mathsf{p}$ der Ω-Klasse bzw. ω-Klasse gilt

$$(10)\qquad {}^{n\Omega}_{*\alpha}K = {}^{n\Omega}_{**\alpha}K\,, \quad |{}^{\Omega}_{*}H| = |{}^{\Omega}_{**}H|\,, \quad {}_{*}r = {}_{**}r$$

bzw.

$$(11)\qquad {}^{n\omega}_{*\alpha}K = {}^{n\omega}_{**\alpha}K\,, \quad |{}^{\omega}_{*}H| = |{}^{\omega}_{**}H|\,.$$

Die n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeiten der Ω-Klasse bzw. ω-Klasse kann man in zwei Ω-Unterklassen bzw. ω-Unterklassen teilen: Jede zwei n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten aus derselben bzw. aus verschiedenen Ω-Unterklassen sind direkt bzw. indirekt kongruent. Jede zwei n-dimensionale Linienmannigfaltigkeiten aus derselben bzw. verschiedenen ω-Unterklassen sind direkt bzw. indirekt kongruent. Für ${}^{\Omega}H \neq 0$ bzw. ${}^{\omega}H \neq 0$ und $\varepsilon_i = (-1)^{i+1}$ ($i = 1, 2$) kann man die erwähnten Ω-Unterklassen bzw. ω-Unterklassen als die Ω-Unterklassen $({}^{n\Omega}_{\alpha}K, \varepsilon_i\, {}^{\omega}H, r)$ bzw. die ω-Unterklassen $({}^{n\omega}_{\alpha}K, \varepsilon_i\, {}^{\omega}H)$ bezeichnen.

Jede n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit gehört in eine Ω- bzw. ω-Klasse.

Zwei n-dimensionale Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeiten $\mathfrak{p}, {}^*\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathbf{p}, {}^*\mathbf{p}$ (*bei* ${}^{\Omega}H \neq 0$ *bzw.* ${}^{\omega}H \neq 0$) *mi* Ω- bzw. ω-Brennkongruenzen $u_q = \mathrm{const}$ bzw. ${}^*u_q = \mathrm{const}$ $(q = 3, \dots, n)$ gehören genau dann zu den Ω- *bzw.* ω-*Unterklassen* $({}^{n\Omega}_{\alpha}K, \varepsilon\, {}^{\Omega}H, r)$, $({}^{n\Omega}_{\alpha}K, {}^*\varepsilon\, {}^{\Omega}H, r)$ *bzw.* $({}^{n\omega}_{\alpha}K, \varepsilon\, {}^{\omega}H)$, $({}^{n\omega}_{\alpha}K, {}^*\varepsilon\, {}^{\omega}H)$, *wenn solcheine Transformation* ${}^*u_p = {}^*u_p(u_1, u_2)$, $(p = 1, 2)$, ${}^*u_q = {}^*u_q(u_q)$ $(q = 3, \dots, n)$ *existiert, dass*

$$(12) \qquad {}^{ss}T_{ij} = \frac{\partial^* u_k}{\partial u_i} \frac{\partial^* u_l}{\partial u_j} {}^{*s*s}T_{kl}, \quad \varepsilon^*\varepsilon\, {}^{ds}T_{ij} = \frac{\partial^* u_k}{\partial u_i} \frac{\partial^* u_l}{\partial u_j} {}^{*d*s}T_{kl},$$

$$r = {}^*r \quad (i, j = 1, 2)$$

bzw.

$$(13) \qquad {}^{ss}T_{ij} = \frac{\partial^* u_k}{\partial u_i} \frac{\partial^* u_l}{\partial u_j} {}^{*s*s}T_{kl}, \quad \varepsilon\, {}^*\varepsilon\, {}^{ds}T_{ij} = \frac{\partial^* u_k}{\partial u_i} \frac{\partial^* u_l}{\partial u_j} {}^{*d*s}T_{kl}\, (i, j = 1, 2)$$

gilt.

Die Gausssche Krümmung bzw. die mittlere Krümmung der h-ten Brennfläche der Ω-*Brennkongruenz der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit ist der Gaussschen Krümmung bzw. dem* ε-*Vielfachen der mittleren Krümmung* $(\varepsilon = \pm 1)$ *der h'-ten Brennfläche* $(h, h' = 1, 2)$ *der entsprechenden* Ω-*Brennkongruenz der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit aus derselben* Ω-*Klasse genau dann gleich, wenn auf einer von diesen* Ω-*Brennkongruenzen*

$$(14) \qquad {}^{n\Omega}_{\alpha}K[(-1)^{h+1}\varepsilon_1 - (-1)^{h'+1}\varepsilon_2]\, {}^{\Omega}H = 0$$

bzw.

$$(15) \qquad \begin{aligned} & 2({}^{h}_{\varepsilon_1}\beta\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\nu - {}^{h'}_{\varepsilon_2}\beta^{h'}_{\varepsilon_2}\, \nu\varepsilon)\, r^3\, {}^{n\Omega}_{\alpha}K^2 + [2r({}^{h}_{\varepsilon_1}\beta\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\nu - {}^{h'}_{\varepsilon_2}\beta\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\nu\varepsilon) + \\ & + \{(-1)^{h+1}\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\beta\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\nu\varepsilon_1 - (-1)^{h'+1}\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\beta\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\nu\, \varepsilon_2\, \varepsilon\}\, r^2\, {}^{\Omega}H]\, {}^{n\Omega}_{\alpha}K + \\ & + {}^{\Omega}H[(-1)^{h+1}\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\beta\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\nu\, \varepsilon_1 - (-1)^{h'+1}\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\beta\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\nu\varepsilon_2\, \varepsilon + \\ & + (-1)^{h+h'}\varepsilon_1\, \varepsilon_2 r\, {}^{\Omega}H({}^{h}_{\varepsilon_1}\beta\, {}^{h}_{\varepsilon_1}\nu - {}^{h'}_{\varepsilon_2}\beta\, {}^{h'}_{\varepsilon_2}\nu\varepsilon)] = 0 \end{aligned}$$

gilt.

Die Brennflächen der Ω-*Brennkongruenzen der n-dimenisonalen Kugelmannigfaltigkeiten aus der* Ω-*Klasse mit* ${}^{n\Omega}_{\alpha}K = 0$ *sind abwickelbar.*

Die Brennflächen der entsprechenden Ω-*Brennkongruenzen der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten aus der* Ω-*Klasse mit* ${}^{\Omega}H = 0$ *besitzen die gleichen Gaussschen Krümmungen.*

Die Gaussschen bzw. die mittleren Krümmungen der entsprechenden Brennflächen der entsprechenden Ω-*Brennkongruenzen der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten aus der* Ω-*Klasse sind gleich bzw. gleich bis auf das Vorzeichen* $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Die Gaussche Krümmung der h-ten Brennfläche der ω-*Brennkongruenz* $(u_q = \mathrm{const}, q = 3, \dots, n)$ *der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit ist der Gauss-*

schen Krümmung der h'-ten Brennfläche der entsprechenden ω-Brennkongruenz $(u_q = const,\ q = 3, \ldots, n)$ der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit $(h, h' = 1, 2)$ aus derselben ω-Klasse (mit ${}^{n\omega}_{I}K \neq 0$) genau dann gleich, wenn auf einer von diesen ω-Brennkongruenzen in Krümmungsparametern u_1, u_2 ihrer Mittelpunktfläche die Beziehung

$$(16) \quad \varepsilon_1(-1)^{h'}\left[(-1)^{(-1)^{h'+1}} - 1\right] \frac{\partial}{\partial u_h} \frac{{}^{\omega}H}{{}^{n\omega}_{I}K} \frac{\partial}{\partial u_{h'}} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} + \varepsilon_2(-1)^h \cdot$$
$$\cdot \left[1 - (-1)^{(-1)^{h+1}}\right] \frac{\partial}{\partial u_{h'}} \frac{{}^{\omega}H}{{}^{n\omega}_{I}K} \frac{\partial}{\partial u_h} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} + (-1)^{h+h'} \cdot$$
$$\cdot \left[(-1)^{(-1)^{h'+1}} - (-1)^{(-1)^{h+1}}\right] \frac{\partial}{\partial u_h} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} \frac{\partial}{\partial u_{h'}} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} = 0$$

gilt.

Die Gaussschen Krümmungen der entsprechenden Brennflächen der entsprechenden ω-Brennkongruenzen der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten aus der ω-Klasse sind einander gleich.

Die Brennflächen der entsprechenden ω-Brennkongruenzen der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten aus der ω-Klasse (mit ${}^{n\omega}_{II}K = 0$) sind genau dann abwickelbar, wenn auf einer von diesen ω-Brennkongruenzen $(u_q = const,\ q = 3, \ldots, n)$ in Krümmungsparametern u_1, u_2 ihrer Mittelpunktfläche (welche die abwickelbare Fläche mit Asymptotenlinien $u_1 = const$ darstellt) die Beziehung

$$(17) \qquad \frac{\partial}{\partial u_1} {}^{ss}T_{22} = 0$$

gilt.

Die ΩK- bzw. ωK-Approximation der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit hat die Gleichung

$$(18) \qquad {}^{\Omega}H = 0$$

bzw. (in Krümmungsparametern u_1, u_2 der Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen $u_q = const,\ q = 3, \ldots, n$) die Gleichung

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{{}^{\omega}H}{{}^{n\omega}_{I}K} \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{{}^{\omega}H}{{}^{n\omega}_{I}K} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\sqrt{({}^{\omega}H^2 - 4\,{}^{n\omega}_{I}K)}}{{}^{n\omega}_{I}K} = 0 .$$

Die ΩK- bzw. ωK-Approximationen jeder zwei n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeiten der Ω- bzw. ω-Klasse sind enweder direkt oder indirekt kongruent, je nachdem, ob diese zwei n-dimensionalen Kugel- bzw.Linienmannigfaltigkeiten entweder aus derselben oder aus verschiedenen Ω- bzw. ω-Unterklassen stammen.

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] *S. P. Finikov:* Теория конгруэнции. Moskva—Leningrad 1950.

[3] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

[4] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: Kongruenzen. (Elementare Eigenschaften). Rozpravy II. tř. České akademie roč. *LI*, č. 33.

[5] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Linienmannigfaltigkeiten I, II. Rozpravy II. tř. České akademie, roč. *L*, č. 27.

[6] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. JČMF Praha 1937.

[7] *V. F. Kagan:* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Moskva—Leningrad 1947, 1948.

[8] *V. I. Šulikovskij:* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном исложении. Moskva 1963.

[9] *Z. Vančura:* Les congruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přír. fak. Karlovy univ., Praha 1950.

[10] *Z. Vančura:* Die Brennflächen der Kugelkongruenz. Čas. pěst. mat. *80* (1955).

[11] *Z. Vančura:* Kugelkongruenzen und ihre Brennflächen. Adjungierte Linienkongruenzen und ihre Brennflächen. Rozpravy ČSAV, 78, Praha 1968.

[12] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltikeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. *16*, 2 (1975).

[13] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. *16*, 3 (1975).

[14] *Z. Vančura:* Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Čas. pěst. mat. *105* (1980).

[15] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Čas. pěst. mat. *108* (1983).

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (stavební fakulta ČVUT).