Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

BEITRAG ZUR GLOBALEN DIFFERENTIALGEOMETRIE DER KURVEN IM EUKLIDISCHEN RAUM

LEO BOČEK und ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 9. Juni 1964)

In dieser Note beschränken wir uns auf reelle Kurven des euklidischen Raumes von der Dimension $n > 2$, in dem ein Nullpunkt O gewählt ist. Es sei C eine geschlossene Kurve mit positiven Krümmungen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Wir bezeichnen mit $\mathbf{x}$ den Ortsvektor ihres Punktes, mit $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ die Einheitsvektoren ihrer Tangente und ihrer ersten bis $(n-1)$-ten Normale und endlich mit β bzw. mit b die Bogen- bzw. die Gesamtlänge des sphärischen Bildes Γ der Vektoren $\mathbf{t}_n$. Dabei soll β immer die Rolle des Parameters des Punktes von C spielen und die im Folgenden auftretenden und stets durch Striche gekennzeichneten Ableitungen nach β setzen wir als stetig voraus.

Der Abstand des Nullpunktes O von der Schmieghyperebene von C ist $|\mathbf{x}(\beta) \,.\, \mathbf{t}_n(\beta)|$. Die Funktion

$$h(\beta) = -\,\mathbf{x}(\beta)\,.\,\mathbf{t}_n(\beta) \tag{1}$$

benennen wir *die Stützfunktion von C.* Sie hängt freilich von der Wahl des Nullpunktes O ab. Wenn wir aus dem System

$$y_1' = \frac{k_1}{k_{n-1}}\,y_2\,,\quad y_i' = -\frac{k_{i-1}}{k_{n-1}}\,y_{i-1} + \frac{k_i}{k_{n-1}}\,y_{i+1}\,, \tag{2}$$
$$y_n' = -\,y_{n-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ eliminieren, so bekommen wir die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n} A_{0j} y_n^{(j)} = 0\,, \tag{3}$$

deren Koeffizienten gewisse Polynome in den Verhältnissen

$$k_1 : k_2 : \ldots : k_{n-1} \tag{4}$$

und in ihren Ableitungen sind. *Die Stützfunktion der Kurve C ist bis auf die Addition der Lösung von* (3) *eindeutig bestimmt* (s. Abschn. 1).

Für den Radius der letzten Krümmung k_{n-1} bzw. für die Gesamtlänge L der Kurve C gilt die WEINGARTEN*sche bzw.* MINKOWSKI*sche Formel* (s. Abschn. 2)

$$(5) \qquad k_{n-1}^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \Lambda_{0j} h^{(j)} \quad \text{bzw.} \quad L = \int_0^b \Big[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Lambda_{0j}^{(j)}\Big] h \, \mathrm{d}\beta \, .$$

Es sei C^* eine andere Kurve mit denselben Eigenschaften wie C. Wir behalten für C^* dieselben, nur durch Sterne unterschiedenen Bezeichnungen wie für C. Wir werden zwei Fälle untersuchen: (a) Die sphärischen Bilde Γ und Γ^* sind identisch (dann $\beta^* = \beta$) oder (b) im Bezug auf den Nullpunkt O zentralsymmetrisch (dann $\beta^* = \beta + \frac{1}{2}b$). Die Punkte von C und C^* mit den Ortsvektoren $\mathbf{x}(\beta)$ und $\mathbf{x}^*(\beta)$ im Falle (a) und $\mathbf{x}(\beta)$ und $\mathbf{x}^*(\beta + \frac{1}{2}b)$ im Falle (b), die parallele Schmieghyperebenen besitzen, benennen wir *ihre Gegenpunkte.* Wir führen die Bezeichnung

$$(6a) \qquad h(\beta) - h^*(\beta) = \mathscr{B}(\beta)$$

im Falle (a) und

$$(6b) \qquad h(\beta) + h^*(\beta + \tfrac{1}{2}b) = B(\beta)$$

im Falle (b) ein; die geometrische Bedeutung von $\mathscr{B}(\beta)$ und $B(\beta)$ ist offensichtlich.

Für die Längen L und L^* der Kurven C und C^* gelten im Falle (a) *bzw. im Falle* (b) *die Formeln*

$$(7) \qquad L - L^* = \int_0^b \Big[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Lambda_{0j}^{(j)}(\beta)\Big] \mathscr{B}(\beta) \, \mathrm{d}\beta$$

bzw.

$$L + L^* = \int_0^b \Big[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Lambda_{0j}^{(j)}(\beta)\Big] B(\beta) \, \mathrm{d}\beta \, ,$$

aus denen die zweite als eine Art der CAUCHY*schen Formel angesehen werden kann* (s. Abschn. 3).

Sind die Gegenpunkte von C und C^* immer verschieden und im Falle (a) noch $k_{n-1}^*(\beta) \neq k_{n-1}(\beta)$, so sind die Kurven C und C^* homothetisch, wenn die Torse der Verbindungslinien ihrer Gegenpunkte ein Kegel ist (s. Abschn. 4).

Der folgende Absatz betrifft nur den Fall (a) und seine Behauptungen werden im Abschn. 5 bewiesen. *Ist* $\mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B} =$ konst. *in* (6a), *so folgt aus der ersten Formel* (7) *die* STEINER*sche Formel* $L = L^* + \mathscr{B} \int_0^b \Lambda_{00}(\beta) \, \mathrm{d}\beta$ *und für die Gegenpunkte gilt*

$$(8a) \qquad \mathbf{x}^*(\beta) = \mathbf{x}(\beta) + \mathscr{B} \sum_{i=1}^{n-2} \Lambda_{i0}(\beta) \, \mathbf{t}_i(\beta) + \mathscr{B} \mathbf{t}_n(\beta) \, .$$

Weiter ist in (6a) $\mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B} =$ konst. *dann und nur dann, wenn*

$$(9a) \qquad \frac{1}{k_{n-1}(\beta)} - \frac{1}{k_{n-1}^*(\beta)} = \mathscr{B} \Lambda_{00}(\beta) \, , \quad \mathscr{B} = \text{konst.} \, ,$$

für alle β ist.

Die Koeffizienten Λ_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind hier und im Folgenden durch diese Formeln gegeben (s. Abschn. 2):

(10) $$\Lambda_{n0} = 1\,; \quad \Lambda_{n-1,0} = 0\,;$$

$$\Lambda_{i0} = \frac{k_{i+1}}{k_i}\,\Lambda_{i+2,0} - \frac{k_{n-1}}{k_i}\,\Lambda'_{i+1,0} \quad (i = n-2, \ldots, 1)\,;$$

$$\Lambda_{00} = \frac{k_1}{k_{n-1}}\,\Lambda_{20} - \Lambda'_{10}\,.$$

Dieser Schlussabsatz behandelt umgekehrt nur den Fall (b); s. Abschn. 6. *Bei* $B(\beta) = B =$ konst. *in* (6b) *folgt aus der Cauchyschen die* BARBIER*sche Formel* $L + L^* = B\int_0^b \Lambda_{00}(\beta)\,\mathrm{d}\beta$ (und $L = B\int_0^{b/2}\Lambda_{00}(\beta)\,\mathrm{d}\beta$ bei $C^* \equiv C$, d.h. bei einer Kurve C „konstanter Breite" B). *Für die Gegenpunkte gilt jetzt*

(8b) $$\mathbf{x}^*(\beta + \tfrac{1}{2}b) = \mathbf{x}(\beta) + B\sum_{i=1}^{n-2}\Lambda_{i0}(\beta)\,\mathbf{t}_i(\beta) + B\mathbf{t}_n(\beta)$$

und in (6b) *ist* $B(\beta) = B =$ konst. *dann und nur dann, wenn*

(9b) $$\frac{1}{k_{n-1}(\beta)} + \frac{1}{k^*_{n-1}(\beta + \frac{1}{2}b)} = B\Lambda_{00}(\beta)$$

für alle β *ist* (s. Abschn. 6).

Für eine Eikurve C liefern die oberen Formeln für L die wohlbekannten Formeln von Minkowski, Cauchy, Steiner und Barbier und die anderen Behauptungen drücken bekannte bzw triviale Tatsachen aus.

1. Es sei $\bar{O}$ ein neuer von O verschiedener Nullpunkt, $\bar{\mathbf{x}}$ der in $\bar{O}$ gebundene Ortsvektor des Punktes von C und $\bar{h} = -\bar{\mathbf{x}}\,.\,\mathbf{t}_n$ die Stützfunktion von C bezüglich $\bar{O}$. Für den Vektor $\mathbf{c} = \bar{O} - O$ setzen wir $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{t}_i$. Aus $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{c}$ folgt nach (1), dass $\bar{h} = h + y_n$ und wegen $\mathbf{c}' = \mathbf{o}$ ergibt sich aus $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{t}_i$ nach den Frenetschen Ableitungsformeln (in denen die Ableitungen nach dem Bogen durch die nach β ersetzt wurden) das mit (3) äquivalente System (2). Wenn umgekehrt y_n der Gleichung (3) genügt, so ist $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{t}_i$ mit den nach (2) bestimmten $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ein konstanter Vektor und $\bar{h} = h + y_n$ die Stützfunktion von C bezüglich des Endpunktes des in O gebundenen Ortsvektors $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{t}_i$.

2. Durch die Differentiation der Skalarprodukte $y_i = \mathbf{x}\,.\,\mathbf{t}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bekommen wir das System (2), in dem aber die erste Gleichung durch $y'_1 = y_2k_1 : : k_{n-1} + 1 : k_{n-1}$ ersetzt wird. Eliminieren wir aus diesem neuen System $y_1, y_2, \ldots,$

..., y_{n-1}, so gewinnen wir wegen (1) und der mit (2) äquivalenten Gleichung (3) die erste Formel (5). Aus dieser folgt für die Gesamtlänge $L = \int_0^b k_{n-1}^{-1}\, d\beta$ der Kurve C nach partiellen Integrationen die zweite Formel (5). Aus dem System, welches aus (2) durch Weglassung der ersten Gleichung entsteht, ergibt sich bei $y_i = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{t}_i$ und (1)

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{t}_i = -\sum_{j=0}^{n-i} A_{ij} h^{(j)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2,1}$$

mit $h^{(0)} = h$; die Koeffizienten A_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n - i)$ sind wieder gewisse Polynome in den Verhältnissen (4). Wie man leicht bestätigt, gilt dabei speziell (10).

3. Aus den Frenetschen Ableitungsformeln folgt im Falle (a) bezw. (b)

$$\mathbf{t}_i^*(\beta) = \mathbf{t}_i(\beta)\,, \quad k_j^*(\beta) = f(\beta)\, k_j(\beta) \tag{3,1a}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_i^*(\beta + \tfrac{1}{2}b) = -\,\mathbf{t}_i(\beta)\,, \quad k_j^*(\beta + \tfrac{1}{2}b) = g(\beta)\, k_j(\beta)\,, \tag{3,1b}$$

wo $f(\beta) > 0$ und $g(\beta) > 0$, und deshalb im Falle (a) bzw. (b)

$$A_{ij}^*(\beta) = A_{ij}(\beta) \tag{3,2a}$$

bzw.

$$A_{ij}^*(\beta + \tfrac{1}{2}b) = A_{ij}(\beta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n - i)\,. \tag{3,2b}$$

Aus der zweiten Formel (5) und (6a) mit (3,2a) bzw. (6b) mit (3,2b) ergeben sich unmittelbar die Formeln (7).

4. Man überzeugt sich leicht mittels erster Gleichungen in (3,1a) bzw. (3,1b), dass die in der Einleitung beschriebenen Verbindungslinien eine Torse erzeugen und dass diese dann und nur dann ein Kegel ist, wenn $k_{n-1}^*(\beta) : [k_{n-1}^*(\beta) - k_{n-1}(\beta)] =$ $=$ konst. im Falle (a) und $k_{n-1}^*(\beta + \frac{1}{2}b) : [k_{n-1}^*(\beta + \frac{1}{2}b) + k_{n-1}(\beta)] =$ konst. im Falle (b) ist. Daraus folgt, dass $k_{n-1}^*(\beta) : k_{n-1}(\beta) =$ konst. im Falle (a) und $k_{n-1}^*(\beta +$ $+ \frac{1}{2}b) : k_{n-1}(\beta) =$ konst. im Falle (b) ist und nach elementaren Integrationen wegen $\mathbf{x}'(\beta) = k_{n-1}^{-1}(\beta)\, \mathbf{t}_1(\beta)$ und erster Gleichung in (3,1a) bzw. (3,1b) oder durch ganz ähnlichen auf der Gleichung (3) gegründeten Gedankengang wie im Abschn. 5 ergibt sich, dass die Kurven C und C^* homothetisch sind.

5. Wenn $\mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B} =$ konst. in (6a) so folgt aus (3,1a) und (3,2a) zusammen mit (2,1) und (10) sofort (8a).

Nach erster Gleichung (5), (3,2a) und (6a) mit $\mathcal{B} =$ konst. gilt (9a). Und umgekehrt: Aus (9a), erster Gleichung (5) und (3,2a) folgt $\sum_{j=0}^{n} A_{0j}(\beta)\, [h(\beta) - h^*(\beta)]^{(j)} = A_{00}(\beta)\, \mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} =$ konst., so dass $h(\beta) - h^*(\beta) - \mathcal{B}$ eine Lösung von (3) ist. Das bedeutet nach Abschn. 1, dass man durch eine geeignete Wahl des neuen Nullpunktes die Relation (6a) mit $\mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B} =$ konst. gewinnt.

6. Ersetzt man die mit (a) bezeichneten Gleichungen durch die mit (b) gekennzeichneten, so beweist man Schritt wie Schritt wie im Abschn. 5 die Schlussbehauptungen aus der Einleitung über den Fall (b) der Kurven C und C^*.

Výtah

PŘÍSPĚVEK KE GLOBÁLNÍ GEOMETRII KŘIVEK V EUKLIDOVSKÉM PROSTORU

LEO BOČEK a ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Minkowskiho definice opěrné funkce rovinné uzavřené konvexní křivky je rozšířena na uzavřené prostorové křivky s positivními křivostmi a je jí užito k odvození výsledků, které jsou analogické známým vlastnostem rovinných uzavřených konvexních křivek.

Резюме

ЗАМЕТКА К ГЕОМЕТРИИ В ЦЕЛОМ КРИВЫХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЛЕО БОЧЕК и ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Leo Boček, Zbyněk Nádeník), Прага

Минковского определение опорной функции плоской замкнутой выпуклой кривой распространено на замкнутые пространственные кривые с положительными кривизнами и применено к выведению результатов, которые аналогичны известным свойствам плоских замкнутых выпуклых кривых.