Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.941

(Došlo dne 29. března 1957)

V práci jsou odvozeny dva kanonické tvary homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu, které mohou být užitečné při studiu oscilačních a asymptotických vlastností. Při odvození obou kanonických tvarů hrají podstatnou úlohu funkce ω, ω_1, ω_2, z nichž první je diferenciálním invariantem a ostatní jsou diferenciálními semiinvarianty.

1

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$y'''' + 4a_3y''' + 6a_2y'' + 4a_1y' + a_0y = 0\,. \tag{1,1}$$

Poznámka 1,1. O každé lineární diferenciální rovnici a tedy i o rovnici (1,1) budeme vždy předpokládat, že její koeficienty jsou spojitými funkcemi proměnné x v jistém intervalu $\langle a, b\rangle \equiv J$, při čemž v případě $b = \infty$ je interval J zprava otevřený.

G. Sansone, viz [8], odvozuje za předpokladu, že funkce a_3'', a_2' jsou v J spojité, typický tvar rovnice (1,1)

$$[\vartheta_2y'']'' - [\vartheta_1y']' - \Omega y' + \vartheta_0y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde

$$\vartheta_2 = e^{2\int a_3 dx}\,, \quad \vartheta_1 = -\,2S\vartheta_2\,, \quad \Omega = -\,2\vartheta_2I\,, \quad \vartheta_0 = a_0\vartheta_2\,,$$

$$S = 3a_2 - a_3' - 2a_3^2\,,$$

$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1\,, \tag{1,3}$$

kterého používá při studiu některých oscilačních a asymptotických vlastností.

Poznámka 1,2. Funkce (1,3) je Halphenův invariant diferenciální rovnice (1,1), viz Halphen [2], Sansone l. c.

Poznámka 1,3. V této práci odvodíme jiné tvary rovnice (1,1), jež nazveme kanonickými. Těchto tvarů jsme použili v práci [4] {[3]} ke studiu oscilačních {asymptotických} vlastností diferenciální rovnice (1,1).

Poznámka 1,4. V celé této práci vyloučíme ze svých úvah triviální řešení.

2

Iterací homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)} = 0 \tag{2,1}$$

obdržíme homogenní lineární diferenciální rovnici $2n$-tého řádu

$$L^2[y] = L[L[y]] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \{L[y]\}^{(\nu)} = 0\,. \tag{2,2}$$

Poznámka 2,1. O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) předpokládáme, že mají v J spojité derivace, které se v rovnici (2,2) vyskytují.

Platí tyto jednoduché pomocné věty:

Lemma 1. *Každé řešení rovnice* (2,1) *je řešením rovnice* (2,2).

Lemma 2. *Nechť* $Y(x)$ $[\eta(x)]$ *je řešení rovnice* (2,1) $[L[y] = Y(x)]$. *Potom* $\eta(x)$ *je řešení rovnice* (2,2).

Poznámka 2,2. Platnost pomocných vět 1 a 2 se snadno rozšíří na diferenciální rovnici $L^k[y] = 0$, $k > 2$ přirozené.

Definice 1. Iterovanou rovnicí nazveme každou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, která vznikne n-násobnou iterací homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$P[y] = A_1 y' + A_0 y = 0\,, \quad A_1 \neq 0\,. \tag{2,3}$$

Jestliže $y_1(x)$ je řešení rovnice (2,3), pak podle pomocných vět 1, 2 funkce

$$y_i(x) = y_1(x) \,.\, \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2,4}$$

$$\left(\text{kde} \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^0 = 1\,, \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^1 = \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x,\right.$$
$$\left.\left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int \frac{1}{A_1}\left(\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x, \text{ atd.}\right),$$

vyhovují iterované rovnici n-tého řádu

$$P^n[y] = 0\,. \tag{2,5}$$

Integrály (2,4) jsou lineárně nezávislé. Neboť v opačném případě by platila pro všechna $x \in J$ identita

$$y_1(x)\left(c_1 + c_2 \int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x + c_3 \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^2 + \ldots + c_n \left[\int \frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right]^{n-1}\right) = 0\,,$$

kde aspoň jedno z čísel c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) je různé od nuly. Avšak tato identita je nemožná, neboť $y_1(x)$ je netriviální integrál rovnice (2,3) a wronskien funkcí, které se vyskytují uvnitř kulaté závorky, se rovná

$$A_1^{\frac{1}{2}n(1-n)} \neq 0 .$$

3

Předpokládejme, že v rovnici (1,1) jsou koeficienty a_3''', a_2'' spojitými funkcemi v intervalu J.

Věta 1. *Diferenciální rovnice* (1,1) *vznikne iterací diferenciální rovnice* (2,3), *když a jen když platí pro všechna* $x \in J$ *identity*

$$I = 4a_3^3 + 6a_3a_3' - 6a_3a_2 + a_3'' - 3a_2' + 2a_1 = 0 , \tag{3,1}$$

$$\begin{aligned} I_2 = {} & 44a_3^4 + 288a_3^2a_3' + 140a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + 12a_3^2a_2 - \\ & - 150a_3a_2' + 12a_3'a_2 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = 0 . \end{aligned} \tag{3,2}$$

D ů k a z této věty není obtížný, ale je pracný. Uvedeme pouze jeho hlavní myšlenky.

Je
$$\begin{aligned} P^4(y) = {} & A_1^4y'''' + A_1^3(6A_1' + 4A_0)\,y''' + A_1^2(7A_1'^2 + 4A_1A_1'' + 12A_1'A_0 + \\ & + 6A_1A_0' + 6A_0^2)\,y'' + A_1(4A_1A_1'A_1'' + A_1^2A_1''' + A_1'^3 + 4A_1'^2A_0 + \\ & + 4A_1A_1''A_0 + 10A_1A_1'A_0' + 4A_1^2A_0'' + 6A_1'A_0^2 + 12A_1A_0A_0' + 4A_0^3)\,y' + \\ & + (A_1A_1'^2A_0' + A_1^2A_1''A_0' + 3A_1^2A_1'A_0'' + 4A_1A_1'A_0A_0' + 3A_1^2A_0'^2 + \\ & + 4A_1^2A_0A_0'' + A_1^3A_0''' + 6A_1A_0^2A_0' + A_0^4)\,y. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (3,1), (3,2)

$$\left.\begin{aligned} & 6\frac{A_1'}{A_1} + 4\frac{A_0}{A_1} = 4a_3 , \\ & 7\frac{A_1'^2}{A_1^2} + 4\frac{A_1''}{A_1} + 12\frac{A_1'A_0}{A_1^2} + 6\frac{A_0'}{A_1} + 6\frac{A_0^2}{A_1^2} = 6a_2 , \\ & 4\frac{A_1'A_1''}{A_1^2} + \frac{A_1'''}{A_1} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + 4\frac{A_1'^2A_0}{A_1^3} + 4\frac{A_1''A_0}{A_1^2} + 10\frac{A_1'A_0'}{A_1^2} + \\ & \quad + 4\frac{A_0''}{A_1} + 6\frac{A_1'A_0^2}{A_1^3} + 12\frac{A_0A_0'}{A_1^2} + 4\frac{A_0^3}{A_1^3} = 4a_1 , \\ & \frac{A_1'^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_1''A_0'}{A_1^2} + 3\frac{A_1'A_0''}{A_1^2} + 4\frac{A_1'A_0A_0'}{A_1^3} + 3\frac{A_0'^2}{A_1^2} + \\ & \quad + 4\frac{A_0A_0''}{A_1^2} + \frac{A_0'''}{A_1} + 6\frac{A_0^2A_0'}{A_1^3} + \frac{A_0^4}{A_1^4} = a_0 , \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

pak zjistíme, že $I = I_2 = 0$. Je tedy podmínka (3,1), (3,2) nutná.

Nechť naopak platí (3,1), (3,2). Má-li rovnice (1,1) vzniknout iterací rovnice (2,3), pak musí funkce A_1, A_0 vyhovovat systému diferenciálních rovnic (3,3). Ukážeme, že při splnění našeho předpokladu existuje vždy řešení systému (3,3).

Z první rovnice (3,3) vychází

$$A_0 = a_3 A_1 - \tfrac{3}{2} A_1' . \tag{3,4}$$

Dosadíme-li (3,4) do druhé, třetí a čtvrté rovnice (3,3), obdržíme po úpravě diferenciální rovnice

$$2\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2} = \frac{12}{5}\,(a_3^2 + a_3' - a_2)\,, \tag{3,5}$$

$$\frac{A_1'''}{A_1} - 2\,\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3} + a_3\left(2\,\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right) = \frac{4}{5}\,[a_3^3 + 3a_3a_3' + a_3'' - a_1]\,, \tag{3,6}$$

$$\begin{gathered}\frac{A_1''''}{A_1} - 3\,\frac{A_1'''A_1'}{A_1^2} + \frac{17}{2}\,\frac{A_1''A_1'^2}{A_1^3} - \frac{7}{2}\left(\frac{A_1''}{A_1}\right)^2 - \frac{27}{8}\,\frac{A_1'^4}{A_1^4} + \frac{5}{3}\left[2a_3\left(\frac{A_1'''}{A_1} - \right.\right. \\ \left.\left. - 2\,\frac{A_1''A_1'}{A_1^2} + \frac{A_1'^3}{A_1^3}\right) + (a_3^2 + a_3')\left(2\,\frac{A_1''}{A_1} - \frac{A_1'^2}{A_1^2}\right)\right] = \frac{2}{3}\,[a_3^4 + 6a_3^2a_3' + \\ + 4a_3a_3'' + 3a_3'^2 + a_3''' - a_0]\,.\end{gathered} \tag{3,7}$$

Systém (3,3) má řešení tehdy, když diferenciální rovnice (3,5), (3,6), (3,7) mají společné řešení. Tato otázka souvisí s pojmem reducibility diferenciálních rovnic (3,6), (3,7) — viz KÖNIGSBERGER [5] —, takže nám stačí najít podmínku, kdy rovnice (3,5) je integrálem diferenciálních rovnic (3,6), (3,7). Tato podmínka je $I = 0$, $I_2 = 0$.

V poznámkách 3,1—3,4 předpokládáme, že rovnice (1,1) je iterovaná.

Poznámka 3,1. Jestliže rovnice (1,1) vznikla iterací (2,3), pak můžeme psát její obecný integrál ve tvaru

$$y(x) = e^{-\int \frac{A_0}{A_1}\mathrm{d}x}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{A_1}\,\mathrm{d}x\right], \tag{3,8}$$

viz lemma 1, 2.

Poznámka 3,2. Nechť u_1 je partikulární integrál rovnice

$$u'' = \tfrac{3}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2)\,u\,, \tag{3,9}$$

pak funkce u_1^2 je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4) $A_1 = u_1^2$, $A_0 = a_3u_1^2 - 3u_1u_1'$, dostáváme vzorec

$$y(x) = u_1^3 e^{-\int a_3\mathrm{d}x}\left[c_1 + \int\left(c_2 + \int\left(c_3 + c_4\int\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{u_1^2}\,\mathrm{d}x\right]. \tag{3,10}$$

Poznámka 3,3. Nechť w_1 je partikulární integrál rovnice

$$2w' + w^2 = \tfrac{12}{5}(a_3^2 + a_3' - a_2)\,,$$

pak funkce $e^{\int w_1 \mathrm{d}x}$ je integrálem rovnice (3,5). Klademe-li v (3,8) s ohledem na (3,4)

$$A_1 = e^{\int w_1 \mathrm{d}x}\,, \quad A_0 = a_3 e^{\int w_1 \mathrm{d}x} - \tfrac{3}{2} w_1 e^{\int w_1 \mathrm{d}x}\,,$$

obdržíme vzorec

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}\int (w_1 - 2a_3)\mathrm{d}x}[c_1 + \int (c_2 + \int (c_3 + c_4 \int e^{-\int w_1 \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x)\, e^{-\int w_1 \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x)\, e^{-\int w_1 \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x]\,.$$

Poznámka 3,4. Nechť u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (3,9). Podle (3,10) jsou funkce

$$u_1^3 e^{-\int a_3 \mathrm{d}x}\,, \quad u_2^3 e^{-\int a_3 \mathrm{d}x}\,, \tag{3,11}$$

$$(u_1 \pm u_2)^3\, e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} \tag{3,12}$$

řešeními diferenciální rovnice (1,1). Z (3,12) vyplývá, že i funkce

$$u_1^2 u_2 e^{-\int a_3 \mathrm{d}x}\,, \quad u_1 u_2^2 e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} \tag{3,13}$$

jsou řešeními diferenciální rovnice (1,1). Funkce (3,11), (3,13) jsou lineárně nezávislé, neboť

$$W[u_1^3, u_2^3, u_1^2 u_2, u_1 u_2^2] = -12 W[u_1, u_2]^6 \neq 0\,.$$

4

Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu y^{(\nu)} = 0\,, \quad n \geqq 3 \text{ přirozené, } a_n = 1\,. \tag{4,1}$$

O koeficientech a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n - 1$) předpokládáme, že mají v intervalu J všechny derivace, které budeme potřebovat.

Je známo (viz Sansone [10], str. 81), že nejobecnější bodová transformace, která převádí rovnici (4,1) řádu $n > 3$ v rovnici téhož typu, je tvaru

$$y = t(x)\, u\,, \tag{4,2}$$

$$\xi = \xi(x)\,. \tag{4,3}$$

Označme symbolem

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \tag{4,4}$$

libovolnou funkci koeficientů rovnice (4,1) a jejich derivací.

Poznámka 4,1. Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně, resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(x)\, I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})\,,$$

kde b_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) jsou koeficienty rovnice (4,12) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Říkáme, že funkce (4,4) je absolutně resp. relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,3), jestliže platí rovnice

$$I(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$$

resp.

$$I(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = f(x)\, I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})\,,$$

kde $\bar{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) jsou koeficienty rovnice (4,14) a $f(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] absolutním semiinvariantem rovnice (4,1), jestliže je absolutně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) prvním [druhým] relativním semiinvariantem — kratčeji semiinvariantem — rovnice (4,1), jestliže je relativně invariantní vzhledem k transformaci (4,2) [(4,3)].

Nazveme funkci (4,4) absolutním invariantem [relativním invariantem — kratčeji invariantem] rovnice (4,1),jestliže je absolutně [relativně] invariantní vzhledem k oběma transformacím (4,2), (4,3).

Podle této definice je např. funkce (4,4) invariantem rovnice (4,1), jestliže vzhledem k jedné z transformací (4,2), (4,3) je absolutně invariantní a vzhledem k druhé je relativně invariantní.

Transformace

$$T \sim y = e^{-\int a_{n-1} \mathrm{d}x}\, u \tag{4,5}$$

převádí (4,1) na polokanonický tvar

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_\nu u^{(\nu)}\,, \quad A_n = 1\,, \quad A_{n-1} = 0\,. \tag{4,6}$$

Koeficienty A_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n-2$) jsou prvními absolutními semiinvarianty rovnice (4,6), neboť platí následující věta:

Jestliže použijeme v rovnici (4,1) *transformace* (4,2) *a transformovanou rovnici převedeme pomocí transformace* $T \sim h(x)v$ *na polokanonický tvar*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu v^{(\nu)} = 0\,, \quad B_n = 1\,, \quad B_{n-1} = 0\,, \tag{4,7}$$

pak

$$A_\nu = B_\nu\,, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-2\,. \tag{4,8}$$

Viz Sansone [10], str. 81.

Poznámka 4,2. Písmenem T budeme značit každou transformaci tvaru (4,2) která převádí danou lineární diferenciální rovnici na polokanonický tvar.

Poznámka 4,3. Mezi koeficienty rovnic (4,1), (4,6) platí vztahy:

$$A_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}^2 - a'_{n-1}\,, \tag{4,9}$$

$$A_{n-3} = a_{n-3} - 3a_{n-1}a_{n-2} + 2a_{n-1}^3 - a''_{n-1}\,, \tag{4,10}$$

$$\begin{aligned} A_{n-4} = a_{n-4} - 4a_{n-1}a_{n-3} - 6a'_{n-1}a_{n-2} + 6a_{n-1}^2a_{n-2} - 3a_{n-1}^4 + \\ + 6a_{n-1}^2a'_{n-1} + 3a'^2_{n-1} - a'''_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{4,11}$$

Lemma 3. *Jestliže funkce* (4,4) *je absolutně invariantní vzhledem k transformaci T, pak je také absolutně invariantní vzhledem k libovolné transformaci tvaru* (4,2).

Důkaz. Jestliže použijeme v (4,1) transformace (4,2), obdržíme rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu u^{(\nu)} = 0\,, \quad b_n = 1\,, \tag{4,12}$$

kterou můžeme pomocí transformace

$$T \sim u = e^{-\int b_{n-1}\,\mathrm{d}x}\, v$$

převést na (4,7). Vzhledem k předpokladu a (4,8) platí

$$\begin{aligned} I(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = I(B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}) = I(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) = \\ = I(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Poznámka 4,4. Mezi koeficienty rovnic (4,12), (4,1) platí vztahy

$$b_\nu = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-\nu} \binom{n-\nu}{k} a_{n-k}\, t^{(n-\nu-k)}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,13}$$

Transformací (4,3) přejde (4,1) v rovnici

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu \frac{\mathrm{d}^\nu y}{\mathrm{d}\xi^\nu}\,, \quad \bar{a}_0 = \frac{a_0}{(\xi')^n}\,, \quad \bar{a}_n = 1\,, \tag{4,14}$$

kde

$$\binom{n}{\nu} (\xi')^n\, \bar{a}_\nu = \sum_{i=0}^{n-\nu} \binom{n}{i} a_{n-i} \frac{K_{n-i,\nu}}{\nu!}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4,15}$$

Pomocí známých hodnot

$$K_{m,m} = m!(\xi')^m\,, \quad K_{m,1} = \xi^{(m)}\,, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{K_{m,m-1}}{(m-1)!} = \binom{m}{3} \xi''(\xi')^{m-2}\,, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

$$\frac{K_{m,m-2}}{(m-2)!} = \binom{m}{3} \xi'''(\xi')^{m-3} + 3\binom{m}{4} (\xi'')^2(\xi')^{m-4}\,, \quad m = 4, 5, \ldots$$

jsou vyčísleny v Sansonově knize [10], str. 84 koeficienty

$$\bar{a}_{n-1} = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{n-1}{2}\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-1}\right], \tag{4,16}$$

$$\bar{a}_{n-2} = \frac{1}{(\xi')^2}\left[a_{n-2} + (n-2)\, a_{n-1}\frac{\xi''}{\xi'} + \frac{n-2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]. \tag{4,17}$$

Jestliže vypočteme ještě

$$\frac{K_{m,m-3}}{(m-3)!} = \binom{m}{4}\xi^{(\mathrm{IV})}(\xi')^{m-4} + 10\binom{m}{5}\xi'''\xi''(\xi')^{m-5} + 15\binom{m}{6}(\xi'')^3(\xi')^{m-6},$$

obdržíme podle (4,15)

$$\bar{a}_{n-3} = \frac{1}{(\xi')^3}\left\{\frac{n-3}{4}\frac{\xi^{(\mathrm{IV})}}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}\frac{\xi'''\xi''}{(\xi')^2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + a_{n-1}\left[(n-3)\frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3}{4}(n-3)(n-4)\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right] + a_{n-2}\cdot\frac{3}{2}(n-3)\frac{\xi''}{\xi'} + a_{n-3}\right\}. \tag{4,18}$$

Jestliže

$$\alpha_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu}(-1)^i\binom{n-\nu}{i}a_{n-\nu}^{(n-\nu-i)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4,19}$$

pak rovnice

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad \alpha_n = 1$$

je adjungovaná s rovnicí (4,1).

5

Věta 2. *Funkce*

$$I = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 4a_{n-1}^3 + 6a_{n-1}a_{n-1}' - 6a_{n-1}a_{n-2} + \\ + a_{n-1}'' - 3a_{n-2}' + 2a_{n-3} \tag{5,1}$$

je invariantem rovnice (4,1) *a má tyto vlastnosti:*

1. $I(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}) = I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
2. $I(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^3 I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$,
3. $I(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}) = -I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

D ů k a z je velmi snadný a spočívá v podstatě ve verifikaci vlastností 1, 2, 3, kterou zde vzhledem k její zdlouhavosti nebudeme provádět. Poznamenejme pouze, že k verifikaci vlastnosti 1 můžeme použít lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), k verifikaci vlastnosti 2 vzorců (4,16), (4,17), (4,18), k verifikaci vlastnosti 3 vztahu (4,19).

Poznámka 5,1. Podle vlastnosti 3 soudíme, že

$$I(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}) = 0 \tag{5,2}$$

je nutnou podmínkou pro to, aby rovnice (4,1) byla samoadjungovaná. Jestliže $n = 3, 4$, pak podmínka (5,2) je i postačující.

Poznámka 5,2. Pro $n = 3, 4$ jsou vlastnosti funkce (5,1) v literatuře známé. Pro $n = 3$ je funkce (5,1) nazývána Laguerrovým invariantem — viz na př. Sansone [9], Laguerre [6] —, pro $n = 4$ obdržíme Halphenův invariant — viz (1,3).

Věta 3. *Funkce* $I_2 = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$ — viz (3,2) — *je druhým semiinvariantem rovnice* (1,1) *a má tyto vlastnosti:*

1. $I_2(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^4 I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

2. $I_2(b_3, b_2, b_1, b_0) = 50 \frac{t'}{t} I(a_3, a_2, a_1) + I_2(a_3, a_2, a_1, a_0)$,

3. $I_2(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) = I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) - 50I'(a_3, a_2, a_1)$.

Důkaz lze snadno provést verifikací. Je

$$\begin{aligned} I_2(A_3, A_2, A_1, A_0) = &- 156a_3^4 - 12a_3^3a_3' + 90a_3a_3'' + 84a_3'^2 + 20a_3''' + \\ &+ 312a_3^2a_2 + 12a_3'a_2 - 100a_3a_1 - 81a_2^2 - 45a_2'' + 25a_0 = \\ &= I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) = I_1 . \end{aligned} \tag{5,3}$$

Srovnáme-li funkce (3,2) a (5,3), tj. I_1 a I_2, snadno podle lemmy 3 dojdeme k závěru, že *funkce* $I_1(a_3, a_2, a_1, a_0)$ *je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (1,1). Funkce I, I_1, I_2 pro $n = 4$ jsou vázány vztahem

$$I_2(a_3, a_2, a_1, a_0) = 50a_3I(a_3, a_2, a_1) + I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) ,$$

odkud (vzhledem k vlastnostem funkcí I, I_2) odvodíme, že

$$I_1(\bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)^4 \left[I_1(a_3, a_2, a_1, a_0) - 75 \frac{\xi''}{\xi'} I(a_3, a_2, a_1)\right] .$$

Píšeme-li v (5,3) $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ místo a_3, a_2, a_1, a_0, můžeme se opět verifikací přesvědčit [pomocí lemmy 3 a vzorců (4,9), (4,10), (4,11)], že *funkce* $I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$ *je prvním absolutním semiinvariantem rovnice* (4,1) pro $n \geqq 4$ a má tyto vlastnosti:

1. $I_1(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4})$,

2. $I_1(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-4}) = I_1(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}) - 50I'(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3})$.

6

Použijeme vlastností funkcí I, I_1, I_2 k odvození dvou kanonických tvarů homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu.

Nechť v rovnici

$$Y'''' + 4a_3Y''' + 6a_2Y'' + 4a_1Y' + a_0Y = 0 \tag{6,1}$$

jsou funkce a_2''', a_2'' spojité v intervalu J a nechť I, I_1, I_2 jsou funkce koeficientů rovnice (6,1), definované vzorci (5,1), (5,3), (3,2).

Transformací $T' \sim Y = e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} y$ můžeme (6,1) převést na tvar

$$y'''' + 6A_2y'' + 4A_1y' + A_0y = 0\,, \tag{6,2}$$

kde $A_2 = a_2 - a_3^2 - a_3'$, $4A_1 = 6A_2' + 2I$, $A_0 = \frac{81}{25}A_2^2 + \frac{9}{5}A_2'' + \frac{1}{25}I_1$.

Zavedením nových označení

$$A = \tfrac{3}{5}A_2\,, \quad \omega = 2I\,, \quad \omega_1 = \tfrac{1}{25}I_1 \tag{6,3}$$

obdržíme první kanonický tvar rovnice (6,1)

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{6,4}$$

kde vzhledem k předpokladu jsou funkce A, ω, ω_1 spojité v intervalu J.

V případě $\omega = 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0 \tag{6,5}$$

samoadjungovaná rovnice.

Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\, y = 0 \tag{6,6}$$

je podle věty 1 iterovanou rovnicí a podle poznámky 3,4 tvoří její fundamentální systém funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0. \tag{6,7}$$

Jestliže použijeme v (6,2) postupně transformací $y = tv$, $\xi = \xi(x)$, dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + 4p_3\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}\xi^3} + 6p_2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2} + 4p_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + p_0y = 0\,, \tag{6,8}$$

kde $p_3 = \dfrac{1}{\xi'}\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\xi''}{\xi'} + \dfrac{t'}{t}\right]$, $\quad p_2 = \dfrac{1}{\xi'^2}\left[\dfrac{t''}{t} + A_2 + 2\dfrac{t'}{t}\dfrac{\xi''}{\xi'} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\xi'''}{\xi'} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]$.

Má-li rovnice (6,7) aspoň jedno řešení $z(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$, pak můžeme položit

$$\xi = \int \frac{1}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x + c\,, \quad t = z^3\,,$$

takže $p_3 = p_2 = 0$; viz např. Sansone [10], str. 86. Pak

$$4p_1 = \frac{1}{\xi'^3}\,2I\,, \quad p_0 = \frac{1}{\xi'^4}\left[\frac{1}{25}\,I_1 - 3\,\frac{\xi''}{\xi'}\,I\right].$$

Použijeme-li ještě označení (6,3), obdržíme druhý kanonický tvar rovnice (6,1)

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{1}{\xi'^3}\,\omega\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi'^4}\left(\omega_1 - \frac{3}{2}\,\frac{\xi''}{\xi'}\,\omega\right)v = 0 \tag{6,9}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + z^6\omega\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + z^8\left(\omega_1 + 3\,\frac{z'}{z}\,\omega\right)v = 0\,.$$

Poznámka 6,1. Je-li rovnice (6,1) samoadjungovaná, můžeme ji uvedenými transformacemi převést na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + \frac{1}{\xi'^4}\,\omega_1 v = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}\xi^4} + z^8\omega_1 v = 0\,.$$

LITERATURA

[1] *Gutzmer A.*: Bemerkungen über die Iteration linearer homogenen Differentialgleichungen. Věstník královské české společnosti nauk, 1892, 54—59.

[2] *Halphen G. H.*: Sur les invariants des equations différentielles lineaires du quatriéme ordre. Acta mathematica, *3* (1883/1884), 325—380.

[3] *Hustý Zd.*: Asymptotické vlastnosti integrálů homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 60—69.

[4] *З. Густы:* Колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Чех. мат. ж. *8* (1958), 62—75.

[5] *Königsberger L.*: Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1882.

[6] *Laguerre M.:* Sur les equations differentielles linéaires du troisieme ordre. Comptes rendus, *88* (1879), 116—119.

[7] *Laguerre M.*: Sur quelques invariants des equations différentielles linéaires. Comptes rendus, *88* (1879), 224—227.

[8] *Sansone G.*: Le equazioni lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II-Vol. XI-Fasc. III—IV, 1942, 151—196.

[9] *Sansone G.*: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. Revista (1948), 195—253.

[10] *Сансоне Дж.:* Обыкновенные дифференциальные уравнения. T. I. Москва, 1953.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 29/III 1957 г.)

Дифференциальное уравнение (1,1) получается путем итерации дифференциального уравнения (2,3) тогда и только тогда, если справедливы тождества (3,1), (3,2), т. е. $I = I_2 = 0$. Функция I является инвариантом уравнения (4,1), функция I_2 $[I_1 = I_2 - 50a_3I]$ — семиинвариантом уравнения (1,1) [(4,1) для $n \geqq 4$]. В работе далее приводятся некоторые свойства функций I, I_1, I_2 и две канонических формы (6,4), (6,9) дифференциального уравнения (1,1).

Zusammenfassung

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 29. März 1957)

Die Differentialgleichung (1,1) geht dann und nur dann durch Iteration der Differentialgleichung (2,3) hervor, wenn die Identitäten (3,1), (3,2), d. h. $I = I_2 = 0$, gelten. Funktion I ist Invariante der Differentialgleichung (4,1), Funktion I_2 $[I_1 = I_2 - 50a_3I]$ Semiinvariante der Differentialgleichung (1,1) [(4,1) für $n \geqq 4$]. Ferner werden in der Arbeit noch einige Eigenschaften der Funktionen I, I_1, I_2 und zwei kanonische Formen (6,4), (6,9) der Differentialgleichung (1,1) angegeben.