Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Štěpán
Dvě věty o dvou zborcených hyperboloidech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 370--378

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108330

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

DVĚ VĚTY O DVOU ZBORCENÝCH HYPERBOLOIDECH

JAROSLAV ŠTĚPÁN, Karlovy Vary

(Došlo dne 16. prosince 1968)

Mějme dva páry mimoběžek m_1, m_2 a n_1, n_2, o kterých předpokládejme, že leží v obecné poloze (tj. žádné z nich nejsou komplanární). Nazveme *bikomplanární přímkou* přímku, komplanární jak s mimoběžkami m_1, m_2, tak i s mimoběžkami n_1, n_2. Pojem bikomplanární přímky je užitečný v geometrii zborcených hyperboloidů, jak uvidíme níže.

a) První věta o dvou zborcených hyperboloidech. Buďtež dány dva zborcené hyperboloidy H' a H'', u kterých nechť je určeno, které površky náleží k prvnímu regulu. Dále je dán svazek S rovnoběžných přímek v prostoru, kterým budeme říkat *paprsky*. Libovolný paprsek a svazku S nechť protne hyperboloid H' ve dvou (a jen dvou) různých bodech A'_1 a A'_2 a hyperboloid H'' také ve dvou (a jen dvou) různých bodech A''_1 a A''_2. V těchto čtyřech bodech sestrojme površky prvního regulu (o kterých předpokládejme, že leží v obecné poloze), čímž obdržíme dva páry mimoběžek: a'_1, a'_2 (ležící na hyperboloidu H') a a''_1, a''_2 (ležící na hyperboloidu H''). Sestrojme k těmto dvěma párům mimoběžek *bikomplanární přímku*, kterou označme b_a. Podobně sestrojme bikomplanární přímky b_b a b_c k paprskům b a c, o kterých nechť platí tytéž předpoklady jako u paprsku a. Pak platí věta:

Bikomplanární přímky b_a, b_b, b_c, příslušné k třem paprskům a, b, c, svazku S, protínající dva zborcené hyperboloidy ve dvou různých reálných bodech, jsou rovnoběžné s jednou rovinou.

Důkaz. Nechť jsou dány tři mimoběžky d', e' a f' v obecné poloze, kterými proložme zborcený hyperboloid H' a tři mimoběžky d'', e'' a f'', rovněž v obecné poloze, kterými proložme zborcený hyperboloid H''. Nechť všech šest těchto mimoběžek náleží vždy k druhému regulu zborcených hyperboloidů. Předpokládejme ještě, že paprsek a je obecně položen jak k mimoběžkám d', e', f', tak i k mimoběžkám d'', e'' a f''.

Představme si, že oba hyperboloidy H' a H'', jakož i svazek paprsků S jsou pevně spojeny s absolutně tuhým tělesem T. Nechť podél povrchových přímek d', e', f',

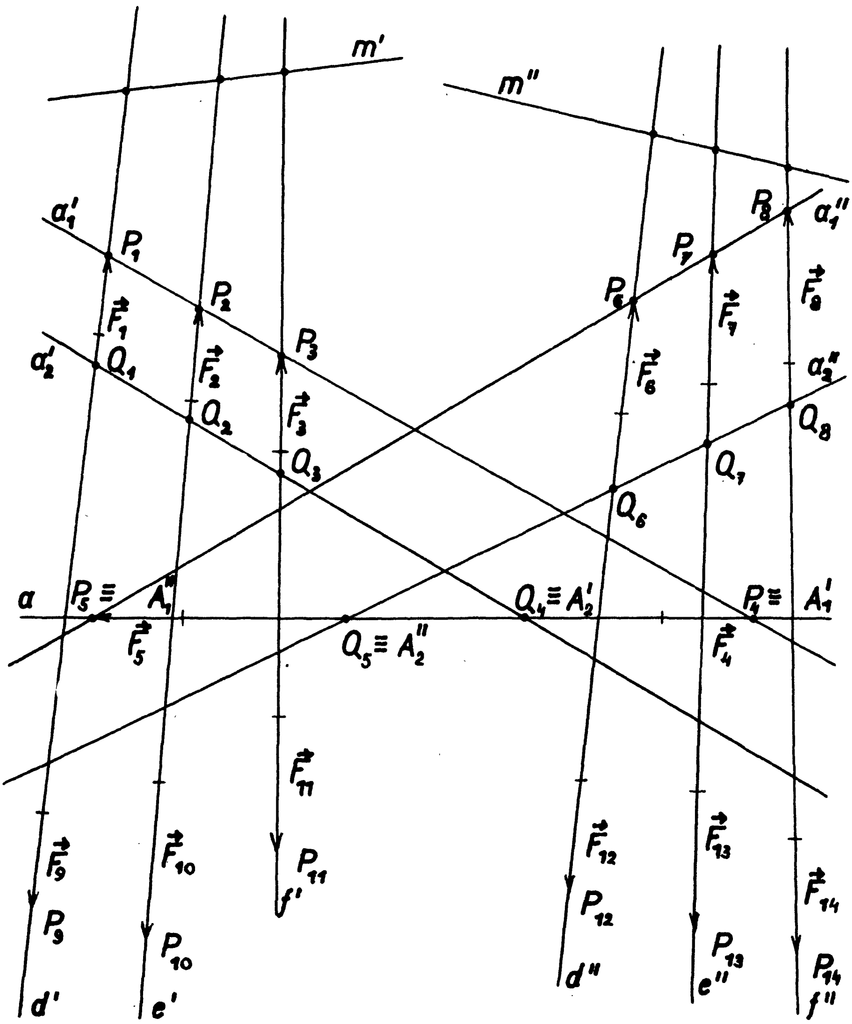
d'', e'' a f'', jakož i podél paprsku a působí na těleso T síly $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_{14}$, jak naznačeno na obr. 1, o kterých nechť platí tyto vektorové rovnice:

(1) $$\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = \mathbf{O}\,.$$

(2) a) $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{O}$, b) $\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_8 = \mathbf{O}$,

c) $\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_9 + \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{11} = \mathbf{O}$, d) $\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} = \mathbf{O}$.

Vyloučíme-li triviální řešení rovnic (1), (2) nulovými vektory, pak vzhledem k před-



Obr. 1.

pokladům o mimoběžkách d', e', f', d'', e'' a f'' a o paprsku a jsou všechny vektory $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_{14}$ nenulové.

Z vektorových rovnic (1) a (2) je možno snadno odvodit tyto vektorové rovnice:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \mathbf{F}_9 + \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{b)}\ (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_9) + (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{10}) + (\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{11}) = \mathbf{O}\,, \\ &\text{c)}\ (\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{F}_8 + \mathbf{F}_{14}) = \mathbf{O}\,. \end{aligned}$$

Z posledních dvou vektorových rovnic plynou ihned tyto vektorové rovnice (vzhledem k předpokladu o mimoběžkách d', e', f', d'', e'' a f''):

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_9 = \mathbf{O}\,, \quad \text{b)}\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{10} = \mathbf{O}\,, \quad \text{c)}\ \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{11} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{d)}\ \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{O}\,, \quad \text{e)}\ \mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_{13} = \mathbf{O}\,, \quad \text{f)}\ \mathbf{F}_8 + F_{14} = \mathbf{O}\,. \end{aligned}$$

V důsledku rovnic (1) a (4) je absolutně tuhé těleso T v rovnováze. Proto je celkový moment sil $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_{14}$ vzhledem k libovolnému bodu O prostoru roven nulovému vektoru, což vyjádříme vektorovou rovnicí:

$$(5)\qquad \sum_{n=1}^{4} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n + \sum_{n=5}^{8} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n + \sum_{n=9}^{14} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n = \mathbf{O}\,.$$

Zaveďme označení:

$$(6)\qquad \text{a)}\ \mathbf{M}'_a = \sum_{n=1}^{4} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n\,, \quad \text{b)}\ \mathbf{M}''_a = \sum_{n=5}^{8} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n\,, \quad \text{c)}\ \mathbf{M}_a = \sum_{n=9}^{14} \mathbf{P}_n \times \mathbf{F}_n\,.$$

$\mathbf{P}_n$ značí tu geometrické vektory, jejichž počáteční bod je libovolný bod O prostoru a koncový bod je příslušný bod P_n. Přepíšeme-li rovnici (5), obdržíme:

$$(7)\qquad \mathbf{M}'_a + \mathbf{M}''_a + \mathbf{M}_a = \mathbf{O}\,.$$

O vektoru $\mathbf{M}'_a$ dokážeme, že

a) je nenulový,

b) je nezávislý na volbě bodu O v prostoru,

c) je kolmý na povrchové přímky a'_1 a a'_2 hyperboloidu H'. Představme si na okamžik, že na absolutně tuhé těleso T působí pouze síly $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_4$ a že absolutně tuhé těleso T je volně otáčivé kolem površky m' prvního regulu hyperboloidu H', neprotínající paprsek a. Síly $\mathbf{F}_1$ až $\mathbf{F}_3$ nevyvíjejí na absolutně tuhé těleso T kroutící moment, protože protínají osu m'.

Avšak síla $\mathbf{F}_4$, která je nenulovým vektorem a neprotíná osu m', vyvíjí na absolutně tuhé těleso T kroutící moment. *Proto je $\mathbf{M}'_a$ nenulový vektor.*

Vzhledem k vektorové rovnici (2a) je vektor $\mathbf{M}'_a$ nezávislý na volbě bodu O v prostoru. Zvolíme-li za libovolný bod prostoru bod N'_1, ležící na površce a'_1, obdržíme z rovnice (6a) vektorovou rovnici:

$$(8) \qquad \boldsymbol{M}'_a = \sum_{n=1}^{4} \boldsymbol{P}'_n \times \boldsymbol{F}_n .$$

$\boldsymbol{P}'_n$ značí tu opět geometrické vektory, jejichž počáteční bod je bod N'_1 a koncový bod je příslušný bod P_n.

Nositelkou všech vektorů $\boldsymbol{P}'_n$ v rovnici (8) je přímka a'_1. Proto je vektor $\boldsymbol{M}'_a$ kolmý na tuto přímku. Stejnou úvahou je možno dokázat, že vektor $\boldsymbol{M}'_a$ je kolmý i na přímku a'_2.

Zcela stejnými úvahami je možno dokázat i o vektoru $\boldsymbol{M}''_a$, že

a) je nenulový,

b) je nezávislý na volbě bodu O v prostoru,

c) je kolmý na povrchové přímky a''_1 a a''_2 hyperboloidu H''.

Vzhledem k předpokladu, že povrchové přímky a'_1, a'_2, a''_1, a''_2 leží v obecné poloze, nemohou být vektory $\boldsymbol{M}'_a$ a $\boldsymbol{M}''_a$ kolineární, neboť v tom případě musel by být vektor $\boldsymbol{M}'_a$ kolmý také na površky a''_1, a''_2 a vektor $\boldsymbol{M}''_a$ musel by být zase kolmý na površky a'_1, a'_2, což je nemožné vzhledem k výše uvedenému předpokladu.

Také o vektoru $\boldsymbol{M}_a$ dokážeme, že

a) je nenulový,

b) je nezávislý na volbě bodu O prostoru,

c) je nekolineární jak s vektorem $\boldsymbol{M}'_a$, tak i s vektorem $\boldsymbol{M}''_a$.

Kdyby byl vektor $\boldsymbol{M}_a$ nulový, pak by musely být vektory $\boldsymbol{M}'_a$ a $\boldsymbol{M}''_a$ kolineární vzhledem k vektorové rovnici (7). Avšak právě jsme si dokázali, že vektory $\boldsymbol{M}'_a$ a $\boldsymbol{M}''_a$ nejsou kolineární, proto je vektor $\boldsymbol{M}_a$ nenulový. Vektor $\boldsymbol{M}_a$ je nezávislý na volbě bodu O prostoru vzhledem k vektorové rovnici (3a).

Kdyby byl vektor $\boldsymbol{M}_a$ kolineární např. s vektorem $\boldsymbol{M}'_a$, musel by i vektor $\boldsymbol{M}''_a$ (který je nenulový), být kolineární s vektorem $\boldsymbol{M}'_a$. Avšak už víme, že to není možné, proto ani vektor $\boldsymbol{M}_a$ není kolineární s vektorem $\boldsymbol{M}'_a$. Z téhož důvodu nemůže být kolineární vektor $\boldsymbol{M}_a$ ani s vektorem $\boldsymbol{M}''_a$.

Vektor $\boldsymbol{M}'_a$, který je kolmý na povrchové přímky a'_1 a a'_2, je kolmý také na bikomplanární přímku b_a. Z téhož důvodu je také vektor $\boldsymbol{M}''_a$ kolmý na bikomplanární přímku b_a. Je tedy bikomplanární přímka b_a kolmá na rovinu, rovnoběžnou s oběma vektory $\boldsymbol{M}'_a$ a $\boldsymbol{M}''_a$ a je tedy také kolmá na vektor $\boldsymbol{M}_a$. Stejnou úvahou můžeme dokázat, že i bikomplanární přímky b_b i b_c jsou kolmé na vektory $\boldsymbol{M}_b$ a $\boldsymbol{M}_c$. Avšak vektory $\boldsymbol{M}_a$, $\boldsymbol{M}_b$ a $\boldsymbol{M}_c$ jsou kolineární, poněvadž paprsky a, b, c jsou přímky navzájem rovnoběžné. Proto jsou všechny tři bikomplanární přímky b_a, b_b, b_c rovnoběžné s jednou rovinou (kolmou na kolineární vektory $\boldsymbol{M}_a$, $\boldsymbol{M}_b$ a $\boldsymbol{M}_c$). Tím je první věta o dvou zborcených hyperboloidech dokázána.

b) Druhá věta o dvou zborcených hyperboloidech. Buďte dány dva zborcené hyperboloidy H' a H'', u kterých nechť je určeno, které površky náleží k prvnímu regulu. Dále nechť jsou dány tři komplanární svazky rovnoběžných přímek (paprsků) S_a, S_b, S_c. Způsobem, vyloženým v první větě o dvou zborcených hyperboloidech, je možno sestrojit ke třem paprskům a_1, a_2 a a_3 svazku S_a bikomplanární přímky b'_a, b''_a a b'''_a, o kterých víme, že jsou rovnoběžné s jednou rovinou, kterou nazveme *komplanární rovinou* a označme K_a. Podobně sestrojme pomocí paprsků b_1, b_2, b_3 svazku S_b komplanární rovinu K_b a pomocí svazku S_c komplanární rovinu K_c. O těchto třech komplanárních rovinách K_a, K_b a K_c dokážeme větu:

Všechny tři komplanární roviny K_a, K_b a K_c, příslušné ke třem komplanárním svazkům rovnoběžných paprsků S_a, S_b a S_c, jsou rovnoběžné s jednou přímkou, tzv. komplanární osou.

Důkaz. Nechť jsou dány tři mimoběžky d', e' a f' v obecné poloze, kterými proložme zborcený hyperboloid H' a tři mimoběžky d'', e'' a f'', rovněž v obecné poloze, kterými proložme zborcený hyperboloid H''. Každá tato trojice přímek nechť patří k druhému regulu povrchových přímek příslušného hyperboloidu. Předpokládejme ještě, že paprsky a, b, c, náležející postupně svazkům S_a, S_b a S_c a které jsou proto navzájem komplanární, jsou obecně položeny jak k mimoběžkám d', e', f', tak i k mimoběžkám d'', e'' a f''. Dále předpokládejme, paprsek a (b, příp. c) protíná hyperboloid H' ve dvou (a jen dvou) různých bodech A'_1 a A'_2 (B'_1, B'_2, příp. C'_1, C'_2) a hyperboloid H'' také ve dvou (a jen dvou) různých bodech A''_1 a A''_2 (B''_1, B''_2, příp. C''_1, C''_2). Všemi těmito dvanácti body proložme povrchové přímky prvního regulu příslušného zborceného hyperboloidu H' nebo H'', které označme a'_1, a'_2, a''_1, a''_2, b'_1, b'_2, b''_1, b''_2, c'_1, c'_2, c''_1, c''_2. O každé čtveřici mimoběžek předpokládejme ještě, že žádné tři její mimoběžky nejsou komplanární. Kromě toho ještě předpokládejme, že je vždy možno sestrojit přímku v, rovnoběžnou s libovolně danou přímkou w, obecně položenou jak k mimoběžkám d', e', f', tak i k mimoběžkám d'', e'' a f'', která protíná hyperboloid H' ve dvou (a jen dvou) různých bodech V'_1, V'_2 a hyperboloid H'' také ve dvou (a jen dvou) různých bodech V''_1 a V''_2 a že povrchové přímky prvního regulu hyperboloidů H' a H'', sestrojené v bodech V'_1, V'_2, V''_1 a V''_2 jsou obecně položeny (tj. žádné tři z nich nejsou komplanární). Důsledkem tohoto předpokladu je, že vektor

$$\boldsymbol{M} = \sum_{n=9}^{14} \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{F}_n$$

je vždy nenulový, protože síly $\boldsymbol{F}_9$ až $\boldsymbol{F}_{14}$ jsou nenulové vektory a platí rovnice (3a), jak bylo již dokázáno v první větě.

Představme si, že oba hyperboloidy H' a H'', jakož i svazky paprsků S_a, S_b, S_c jsou pevně spojeny s absolutně tuhým tělesem T. Nechť podél povrchových přímek d', e', f', d'', e'' a f'', jakož i podél paprsků a, b, c, působí na absolutně tuhé těleso T síly $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$, $\boldsymbol{F}_9$ až $\boldsymbol{F}_{14}$, $\boldsymbol{f}_4$, $\boldsymbol{f}_5$, $\boldsymbol{f}_9$ až $\boldsymbol{f}_{14}$, $\boldsymbol{g}_4$, $\boldsymbol{g}_5$, $\boldsymbol{g}_9$ až $\boldsymbol{g}_{14}$, jak naznačeno na obr. 2.

O těchto silách nechť platí tyto vektorové rovnice:

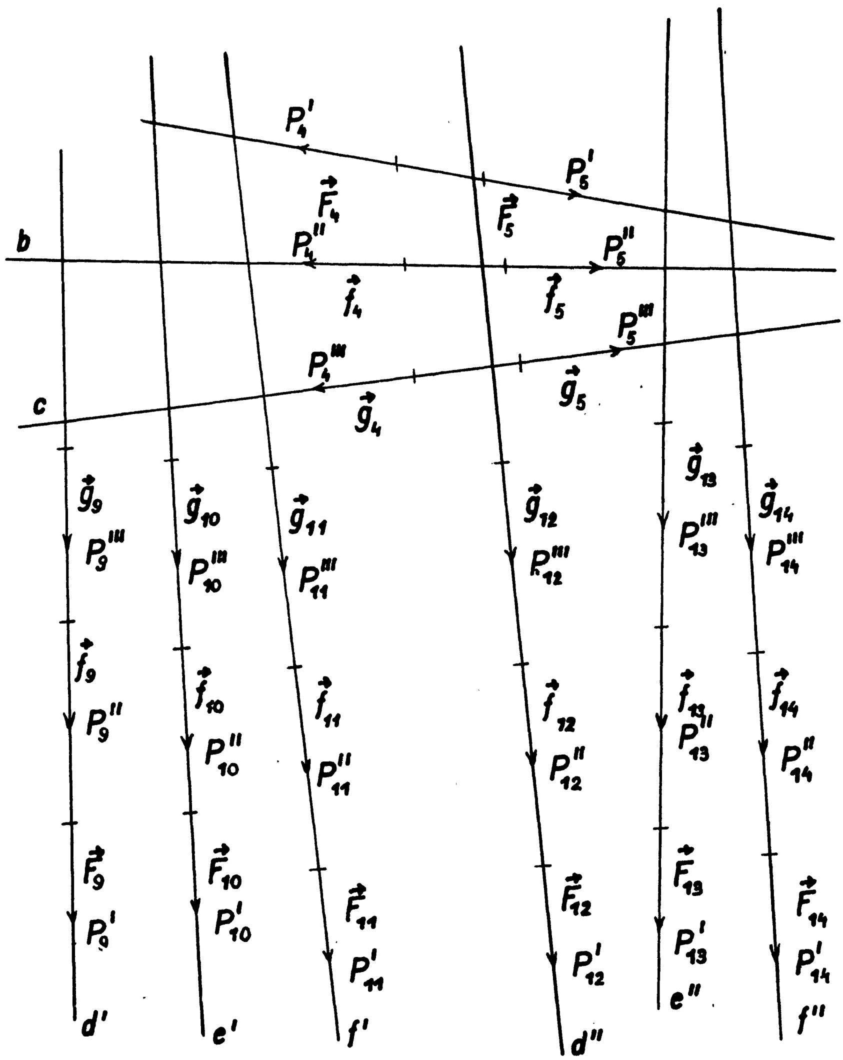
(9) a) $\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = \mathbf{O}$, b) $\mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \mathbf{O}$, c) $\mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_5 = \mathbf{O}$.

(10) a) $\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_9 + \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{11} = \mathbf{O}$, d) $\mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{14} = \mathbf{O}$,

b) $\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} = \mathbf{O}$, e) $\mathbf{g}_5 + \mathbf{g}_9 + \mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{11} = \mathbf{O}$,

c) $\mathbf{f}_5 + \mathbf{f}_9 + \mathbf{f}_{10} + \mathbf{f}_{11} = \mathbf{O}$, f) $\mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{13} + \mathbf{g}_{14} = \mathbf{O}$,

(11) $$\mathbf{F}_4 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{g}_4 = \mathbf{O}.$$



Obr. 2.

Způsobem, vyloženým v první větě lze dokázat, že všem právě napsaným vektorovým rovnicím lze vyhovět vesměs nenulovými vektory.

O vektoru

$$\mathbf{M}_a = \sum_{n=9}^{14} \mathbf{P}'_n \times \mathbf{F}_n$$

jsme dokázali, že je nenulový, nezávislý na volbě bodu prostoru O a kolmý na komplanární rovinu K_a. Totéž lze dokázat stejným postupem o vektoru

$$\mathbf{M}_b = \sum_{n=9}^{14} \mathbf{P}''_n \times \mathbf{f}_n$$

i o vektoru

$$\mathbf{M}_b = \sum_{n=9}^{14} \mathbf{P}''_n \times \mathbf{g}_n .$$

Z rovnic (9) a (11) obdržíme vektorovou rovnici:

$$\mathbf{F}_5 + \mathbf{f}_5 + \mathbf{g}_5 = \mathbf{O}$$

a z rovnic (2) obdržíme dvě vektorové rovnice:

$$\begin{aligned}(13)\qquad &\text{a)}\ (\mathbf{F}_5 + \mathbf{f}_5 + \mathbf{g}_5) + (\mathbf{F}_9 + \mathbf{f}_9 + \mathbf{g}_9) + (\mathbf{F}_{10} + \mathbf{f}_{10} + \mathbf{g}_{10}) + \\ &\qquad + (\mathbf{F}_{11} + \mathbf{f}_{11} + \mathbf{g}_{11}) = \mathbf{O}\,, \\ &\text{b)}\ (\mathbf{F}_4 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{g}_4) + (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{g}_{12}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{g}_{13}) + \\ &\qquad + (\mathbf{F}_{14} + \mathbf{f}_{14} + \mathbf{g}_{14}) = \mathbf{O}\,.\end{aligned}$$

Vzhledem k rovnicím (11) a (12) a vzhledem k předpokladu o mimoběžkách d', e', f' a d'', e'', f'' platí:

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\text{a)}\ \mathbf{F}_9 + \mathbf{f}_9 + \mathbf{g}_9 = \mathbf{O}\,, &\quad &\text{d)}\ \mathbf{F}_{12} + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{g}_{12} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{b)}\ \mathbf{F}_{10} + \mathbf{f}_{10} + \mathbf{g}_{10} = \mathbf{O}\,, & &\text{e)}\ \mathbf{F}_{13} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{g}_{13} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{c)}\ \mathbf{F}_{11} + \mathbf{f}_{11} + \mathbf{g}_{11} = \mathbf{O}\,, & &\text{f)}\ \mathbf{F}_{14} + \mathbf{f}_{14} + \mathbf{g}_{14} = \mathbf{O}\,.\end{aligned}$$

Z rovnic (9) a (10) plynou ještě tyto tři vektorové rovnice:

$$\begin{aligned}(15)\qquad &\text{a)}\ \mathbf{F}_9 + \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{b)}\ \mathbf{f}_9 + \mathbf{f}_{10} + \mathbf{f}_{11} + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{14} = \mathbf{O}\,, \\ &\text{c)}\ \mathbf{g}_9 + \mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{13} + \mathbf{g}_{14} = \mathbf{O}\,.\end{aligned}$$

Představme si na okamžik, že na absolutně tuhé těleso T působí pouze síly $\mathbf{F}_9$ až $\mathbf{F}_{14}$, $\mathbf{f}_9$ až $\mathbf{f}_{14}$, $\mathbf{g}_9$ až $\mathbf{g}_{14}$. Potom vzhledem k rovnicím (14) a (15) platí vektorová rovnice:

$$(16)\qquad \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c = \mathbf{O}\,.$$

O vektorech $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{M}_c$ dokážeme ještě, že nejsou spolu kolineární.

Za tím účelem předpokládejme, že vektory $\mathbf{M}_a$ a $\mathbf{M}_b$ jsou kolineární. Pak však musí být i vektor $\mathbf{M}_c$ (který je nenulový) kolineární s oběma vektory $\mathbf{M}_a$ a $\mathbf{M}_b$, takže platí skalární rovnice:

$$(\mathbf{M}_a) + m(\mathbf{M}_b) + n(\mathbf{M}_c) = 0 . \tag{17}$$

Potom je možno přepsat vektorové rovnice (13) na vektorové rovnice:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (\mathbf{F}_5 + m\mathbf{f}_5 + n\mathbf{g}_5) + (\mathbf{F}_9 + m\mathbf{f}_9 + n\mathbf{g}_9) + \\
&+ (\mathbf{F}_{10} + m\mathbf{f}_{10} + n\mathbf{g}_{10}) + (\mathbf{F}_{11} + m\mathbf{f}_{11} + n\mathbf{g}_{11}) = \mathbf{O} , \\
&\text{b) } (\mathbf{F}_4 + m\mathbf{f}_4 + n\mathbf{g}_4) + (\mathbf{F}_{12} + m\mathbf{f}_{12} + n\mathbf{g}_{12}) + \\
&+ (\mathbf{F}_{13} + m\mathbf{f}_{13} + n\mathbf{g}_{13}) + (\mathbf{F}_{14} + m\mathbf{f}_{14} + n\mathbf{g}_{14}) = \mathbf{O} .
\end{aligned} \tag{18}$$

Z právě napsaných rovnic je ihned zřejmé, že absolutně tuhé těleso T nemůže být v rovnováze, působí-li podél mimoběžek $d', e', f', d'', e'', f''$ síly $(\mathbf{F}_9 + m\mathbf{f}_9 + n\mathbf{g}_9)$ až $(\mathbf{F}_{14} + m\mathbf{f}_{14} + n\mathbf{g}_{14})$, neboť tyto vektory jsou vesměs nenulové, jestliže m i n jsou reálná čísla různá od 1. Proto také nemůže platit vektorová rovnice (16), což však vede ke sporu. Proto nemohou být vektory $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{M}_c$ spolu kolineární.

Nazveme-li přímku, kolmou na komplanární vektory $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$ a $\mathbf{M}_c$ *komplanární osou*, je ihned zřejmé, že komlanární roviny K_a, K_b, K_c, kolmé na vektory $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{M}_c$, jsou s touto přímkou rovnoběžné. Tím je druhá věta o dvou zborcených hyperboloidech dokázána.

Poznámka. Tuto druhou větu je možno ještě dále rozšířit. Nazvěme množinu všech komplanárních svazků paprsků *radikálem*. Je možno sestrojit přímku, kolmou na všechny možné paprsky radikálu, kterou nazvěme *radikální osou*. K radikální ose přísluší, jak jsme dokázali v druhé větě, komplanární osa. Mějme nyní dány komplanární radikály, tj. takové radikály, jejichž radikální osy jsou komplanární přímky. Pak platí věta, že i příslušné komplanární osy jsou spolu komplanární. Důkaz tohoto tvrzení lze provést stejným způsobem, jako důkazy předcházejících vět. V rozšiřování druhé věty je možno naznačeným způsobem pokračovat.

Adresa autora: Karlovy Vary, Na vyhlídce 57.

Zusammenfassung

ZWEI SÄTZE ÜBER ZWEI WINDSCHIEFE HYPERBOLOIDEN

JAROSLAV ŠTĚPÁN, Karlovy Vary

Es seien m_1, m_2 und n_1, n_2 zwei Paare von windschiefen Geraden, in allgemeiner Lage (d. h. keine drei von ihnen verlaufen parallel). Als Bikomplanargerade wird eine wie mit dem Paar m_1, m_2, so auch mit dem Paar n_1, n_2 komplanare Gerade bezeichnet. Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 1. Die Bikomplanargeraden b_a, b_b, b_c, die den drei Strahlen a, b, c eines Parallelgeradenbündels S entsprechen, welche zwei windschiefe Hyperboloide in zwei verschieden reellen Punkten schneiden, verlaufen parallel zu einer Ebene (die man Komplanarebene nennt).

Satz 2. Alle drei Komplanarebenen K_a, K_b, K_c, die drei komplanaren Parallelgeradenbündeln S_a, S_b, S_c entsprechen, sind zu einer Geraden (der Komplanarachse) parallel.