Časopis pro pěstování matematiky

Valter Šeda

Несколько теорем о линейном дифференциальном уравнении второго порядка типа Якоби в комплексной области

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 1, 29--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108345

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ЯКОБИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

ВАЛЬТЕР ШЕДА (Valter Šeda), Братислава

(Поступило в редакцию 17/VIII 1961 г.)

В работе рассматривается одно свойство линейного дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом. Показано, что помимо этого уравнения существуют еще и другие линейные дифференциальные уравнения второго порядка, обладающие этим свойством. Далее изучается вопрос, определяется ли линейное дифференциальное уравнение второго порядка однозначно нулями своих решений.

Дифференциальное уравнение

$$y'' = ky\,, \tag{1'}$$

где k отличная от нуля постоянная, обладает следующим интересным свойством: Для каждого нетривиального решения u этого уравнения существует линейно независимое решение v того же уравнения, такое, что функции u, v', также как и u', v имеют одинаковые нули.[1])

Возникает вопрос, является ли это уравнение единственным уравнением типа Якоби

$$y'' = Q(x)\,y\,, \tag{1}$$

где $Q(x)$ — голоморфная функция в односвязной области $T(\infty \notin T)$, обладающим этим свойством. Покажем, что помимо уравнения (1') существуют еще другие уравнения (1), обладающие этим свойством. Далее рассматриваем вопрос, определяется ли уравнение (1) нулями своих решений однозначно. Ответ на этот вопрос связан с числом классов (их точное определение дается ниже) ненулевых решений этого уравнения. (Это решения, которые нигде не обращаются в нуль.) Если число этих классов, соответствующее данному уравнению (1) не более чем счетно, то это уравнение определяется однозначно нулями своих решений, если число классов несчетно, то уравнение может не быть однозначно

[1]) Доказательство этого утверждения можно найти в работе [1], стр. 235.

определенным. Эти результаты доказываются с помощью некоторых свойств конформного преобразования и автоморфных функций, которые рассмотрены в первой части данной работы.

I. В дальнейшем мы будем пользоваться некоторыми свойствами конформного отображения. Известно, что каждое конформное отображение расширенной плоскости есть дробно-линейное преобразование. Верно даже более общее утверждение, приведенное в качестве упражнения в книге [2], стр. 217. Сформулируем его в виде леммы 1 и приведем его доказательство, поскольку мы его нигде не встретили.

Лемма 1. *Каждое конформное отображение расширенной плоскости E, из которой исключено не более чем счетное множество A, есть дробно-линейное преобразование.*

Доказательство. Пусть w функция мероморфная и взаимнооднозначная в открытой области $E - A$. Пусть $E - B = \bigcup_{\tau} E_\tau$, где открытое множество $E_\tau \supseteq E - A$ обладает следующим свойством: На множестве E_τ определена функция w_τ, мероморфная на E_τ, и такая ,что для $z \in E - A$ есть $w_\tau(z) = w(z)$. Функция w_τ есть, по существу, продолжение функции w на множестве E_τ. Покажем, что для двух функций w_{τ_1} и w_{τ_2} в $E_{\tau_1} \cap E_{\tau_2}$, где E_{τ_1} и E_{τ_2} — области определения w_{τ_1} и w_{τ_2} соответственно, выполняется тождество $w_{\tau_1}(z) \equiv w_{\tau_2}(z)$. $E_{\tau_1} \cap$ $\cap E_{\tau_2}$ — открытое множество. Поэтому каждая его компонента содержит по крайней мере одну точку множества $E - A$ вместе с некоторой ее окрестностью. В этой окрестности $w_{\tau_1}(z) \equiv w(z) \equiv w_{\tau_2}(z)$. Отсюда вытекает, что $w_{\tau_1}(z) \equiv w_{\tau_2}(z)$ на всей компоненте. Но это означает, что w_{τ_1} в $E_{\tau_1} \cap E_{\tau_2}$ равна w_{τ_2} тождественно. Поэтому на открытом множестве $E - B$ можно определить функцию $\bar{w}$ следующим образом: $\bar{w}(z) = w_\tau(z)$ для $z \in E_\tau$. Поскольку w_τ мероморфна на E_τ, $\bar{w}$ мероморфна на каждом множестве E_τ и на их объединении. Для $z \in E - A$ $\bar{w}(z) = w_\tau(z) = w(z)$ и поэтому функция $\bar{w}$ есть продолжение функции w на множестве $E - B$. Для каждого τ есть $E_\tau \subset E - B$, и поэтому $E - B$ наибольшее множество, на которое можно продолжить w как мероморфную функцию. Покажем теперь, что из взаимной однозначности w на множестве $E - A$ вытекает взаимно-однозначность $\bar{w}$ на $E - B$. Пусть это не так. Тогда существуют две точки $z_1, z_2 \in E - B$, $z_1 \neq z_2$, так что $\bar{w}(z_1) = \bar{w}(z_2)$. На основании свойств отображений, осуществляемых мероморфными функциями (см. [2], стр. 161), существует несчетное число различных пар точек $z', z'' \in E - B$, $z' \neq z''$, таких, что $\bar{w}(z') = \bar{w}(z'')$. Поскольку $E - A \subset E - B \subset E$ и множество A не более чем счетно, множества $E - A$ и $E - B$ отличаются друг от друга не более чем на счетное множество. Следовательно по крайней мере одна пара z', z'' принадлежит также множеству $E - A$. Так как на $E - A$ w совпадает с $\bar{w}$, то мы получаем, что w не является взаимно-однозначной на $E - A$, что противоречит предположению в начале доказательства.

Свойства множества B. B — замкнутое множество, так как его дополнение $E - B$ открыто. Так как $E - A \subset E - B$, то $B \subset A$ и B не более чем счетно. Множество B не содержит ни одной изолированной точки. Такая точка $b \in B$ была бы изолированной особой точкой функции $\overline{w}$. Она не может быть существенно особой точкой. Действительно, в открытом множестве $E - B$ существует круг K, не имеющий общих точек с некоторой кольцевой окрестностью P_b точки b. Так как $\overline{w}$ взаимно-однозначная в $E - B$, то не принимает в P_b значения из открытого множества $\overline{w}(K)$. Согласно теореме Касорати-Вейерштрасса отсюда вытекает, что b либо устранимая особая точка функции $\overline{w}$, или ее полюс. Поэтому можно продолжить $\overline{w}$ на точку b как мероморфную функцию, очевидно и взаимно-однозначную. Следовательно $b \in E - B$ и не может быть $b \in B$. Если бы множество $B \neq \emptyset$, то оно было бы замкнутым и плотным в себе. Плотное в себе замкнутое множество на плоскости несчетно (см. [2], стр. 24). Но это противоречит тому, что B не более чем счетно. Поэтому B пусто и функция $\overline{w}$ есть дробно-линейная функция, и такой же является и ее ветвь w, ч. т. д.

При доказательстве некоторых теорем будем применять основную теорему о конформных отображениях. Приведем ее в виде леммы 2. вместе со следствием, приведенным после ее доказательства в книге [3], стр. 277—281.

Лемма 2. *Пусть дополнение области G относительно расширенной плоскости содержит более чем две точки. Тогда существует аналитическая функция w, продолжимая по любому пути и унивалентная в G (т. е. такая, что из $w(z_1) = w(z_2)$ вытекает $z_1 = z_2$ для $z_1, z_2 \in G$), которая отображает эту область на единичный круг K. Эта функция определяется однозначно условием, чтобы данной точке $z \in G$ и данному направлению в этой точке соответствовали при отображении с помощью одного элемента функции w с центром z точка $w = 0$ и направление положительной действительной оси. Любая функция, аналитическая, продолжимая по любому пути и унивалентная в G, которая отображает эту область на K, либо взаимно-однозначная, либо бесконечно многозначная.*

Замечание. Функция w взаимно-однозначная тогда и только тогда, когда G односвязна. Это может быть только тогда, когда дополнение области G, которое содержит более чем две точки, содержит несчетное число точек.

Докажем еще теорему о существовании неподвижной точки конформных отображений частного вида.

Лемма 3. *Пусть w конформное отображение области G (не обязательно односвязной) на себя, тождественное со своим обратным w^{-1}, $w = w^{-1}$, то либо w дробно-линейное преобразование, либо имеет в G по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Условие $w = w^{-1}$ можно записать в виде $ww = z$, т. е. во всей области G выполнено тождество

$$w[w(z)] = z\,. \tag{2}$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда G единичный круг K. Тогда w есть дробно-линейное преобразование. Дробно-линейное преобразование имеет (за исключением тождественного преобразования) одну или две неподвижные точки. Рассмотрим сначала преобразования, которые имеют две неподвижные точки z_1, z_2. Они имеют вид

$$(3)\qquad \frac{w - z_1}{w - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{либо} \quad w - z_1 = k(z - z_1), \quad \text{если} \quad z_2 = \infty,$$

где k — константа, отличная от нуля. Для отображения $w[w(z)]$ выполнено равенство

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k^2\,\frac{z - z_1}{z - z_2}, \text{ соответственно } w - z_1 = k^2(z - z_1).$$

Из условия (2) вытекает $k^2 = 1$, следовательно, $k = \pm 1$. Для $k = 1$ равенство (3) означает тождественное преобразование. При $k = -1$ получаем эллиптическое преобразование

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = -\,\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{соответственно } w - z_1 = -(z - z_1).$$

Если эллиптическое преобразование отображает окружность C на себя, то его неподвижные точки z_1, z_2, соответственно z_1, ∞ симметричны относительно C (см. [4], стр. 20). Если w отображает K на себя, то и окружность $|z| = 1$ отображается на себя. Точки z_1, z_2, или z_1, ∞ симметричны относительно этой окружности и одна из них лежит внутри K, ч. т. д.

Дробно-линейные преобразования с одной неподвижной точкой z_1 — параболические — имеют вид

$$(4)\qquad \frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + k, \quad \text{либо } w = z + k, \text{ если } z_1 = \infty,$$

где $k \neq 0$ постоянная. Тогда условие (2) не может выполняться, так как функция ww удовлетворяет равенству (4), куда вместо k нужно подставить $2k$, что отлично от нуля.

б) Если дополнение CG области G в расширенной плоскости содержит не более чем две точки, то w есть дробно-линейное преобразование, которое, согласно пункту а), есть либо тождественное преобразование, либо имеет две неподвижные точки. Если CG содержит не более чем одну точку, то по крайней мере одна из них лежит в G. Но область G может не содержать ни одной неподвижной точки отображения w, если CG состоит ровно из двух точек.

в) CG содержит более чем две точки. Согласно лемме 2. существует функция f, аналитическая, продолжимая по любому пути и унивалентная в G, которая отображает эту область на K. Из унивалентности f вытекает по теореме 4. [5], однозначность ее обратной функции f^{-1}, которая определена и мероморфна в K (если $\infty \in CG$, то она даже голоморфна) и отображает K на G. Такими-же свойствами обладает и сложная функция wf^{-1}. Пусть теперь $z_1 \in K$ — неподвижная точка, P_1^{-1} — элемент функции f^{-1} с центром z_1, и пусть P_τ — все элементы функции f с центром в точке $w[f^{-1}(z_1)]$. Их значение в центре обозначим z_τ. Элемент $P_\tau w P_1^{-1}$ определяет в области K сложную функцию $F_\tau = fwf^{-1}$. Функции F_τ представляют собой, очевидно, все сложные функции fwf^{-1}. Так как wf^{-1} отображает область K на G, в которой функция f продолжима по любому пути, то каждая функция F_τ продолжима по любому пути в K ([2], стр. 261) и по теореме о монодромии мероморфна в K. Так как $F_\tau(K) = K$, то она голоморфна в K. Далее $F_\tau(z_1) = z_\tau$. Из унивалентности f вытекает, что если $\tau_1 \neq \tau_2$, то $z_{\tau_1} \neq z_{\tau_2}$ и следовательно F_τ разные функции, которые однозначно определяются своим значением в точке z_1. Выберем одну из них, на пример $F_{\tau_1}(z) = F(z)$.

Ее обратная функция F^{-1} является аналитической функцией в K и определяется элементом $P_1 w^{-1} P_{\tau_1}^{-1}$, обратным к элементу $P_{\tau_1} w P_1^{-1}$, и тогда она является одной из сложных функций $fw^{-1}f^{-1} = fwf^{-1}$, относительно $w^{-1} = w$, и, следовательно, одной из функций F_τ. Поэтому F^{-1} голоморфна и F взаимно-однозначная. Покажем еще, что $F^{-1} = F$. Переходя к элементам, получим из равенства $F = fwf^{-1}$ соотношение $w = f^{-1}Ff$ и $w^{-1} = f^{-1}F^{-1}f$. В отличие от функций fwf^{-1} последние две функции определены однозначно ([2], стр. 262) и поэтому из $w = w^{-1}$ вытекает $f^{-1}Ff = f^{-1}F^{-1}f$, откуда последовательно $f^{-1}F = f^{-1}F^{-1}$ и $F = F^{-1}$. Согласно пункту а) существует неподвижная точка функции F в K. Пусть это точка $z_0 \in K$. Из равенства $F = fwf^{-1}$ вытекает $f^{-1}F = wf^{-1}$. В точке z_0 получаем отсюда $f^{-1}[F(z_0)] = w[f^{-1}(z_0)]$, и далее $f^{-1}(z_0) = w[f^{-1}(z_0)]$, т. е. точка $f^{-1}(z_0) \in G$ есть неподвижная точка отображения w, что требовалось.

Замечание. Из доказательства леммы 3 видно, что отображение w не имеет неподвижную точку в области G только в том случае, если G есть расширенная плоскость, из которой исключены две точки, неподвижные точки отображения w.

Далее докажем одну теорему из теории автоморфных функций, которая представляет собой обобщение теорем 1, 2 из книги [4], стр. 84—85, в том смысле, что не исключается случай многозначной автоморфной функции.

Введем следующее понятие.

Пусть функция w аналитична в области G. Пусть существует группа H дробно-линейных преобразований области G на себя. Если для каждого преобразования $h \in H$ имеет место равенство

$$wh = w\,, \tag{5}$$

то функция w, которая не объязана быть однозначной, называется автоморфной относительно группы H в области G. Имеет место лемма 4.

Лемма 4. *Пусть функция f мероморфна в области T. Пусть существуют точки $z_\tau \in T$ и дробно-линейные преобразования h_τ такие, что $h_\tau(z_\tau) \in T$ и в окрестности точки z_τ имеет место тождество*

$$f[h_\tau(z)] = f(z)\,. \tag{6}$$

Тогда существует область $G \supset T$, в которой продолжение w функции f в области G автоморфно относительно группы преобразований H, которая образована функциями h_τ. Функция w определена в области G.

Доказательство. Если через h_τ^{-1} обозначить обратную функцию к функции h_τ, то (6) можно записать в виде

$$f(z) = f[h_\tau^{-1}(z)]\,, \tag{6'}$$

причем (6′) имеет место в окрестности точки $h_\tau(z_\tau)$. Пусть w есть продолжение функции f в расширенной плоскости E и G естественная подобласть функции w. Обозначим через P_1 и P_2 элементы функции f с центрами в точках z_τ и $h_\tau(z_\tau)$ соответственно. Из равенств (6) и (6′) получаем $P_2 h_\tau = P_1$, $P_2 = P_1 h_\tau^{-1}$. Так как $P_2 h_\tau$, $P_1 h_\tau^{-1}$ определяют на E сложные функции wh_τ, wh_τ^{-1}, то обе эти функции равны функции w. Произвольное преобразование $h \in H$ есть комбинация степеней преобразований h_τ, h_τ^{-1}, поэтому из равентсв $wh_\tau = w$, $wh_\tau^{-1} = w$ вытекает равенство

$$wh = w\,. \tag{7}$$

Утверждаем далее, что каждое преобразоваине $h \in H$ отображает область G на себя. В противном случае некоторая из функций wh была бы определена и в точках, не принадлежащих G, и равенство (7) не выполнялось бы. Если w — аналитическая также в G, то она автоморфна в этой области относительно группы H.

II. В теории уравнения (1), о котором в дальнейшем предполагаем, что оно определено в односвязной области T, $\infty \notin T$, важное значение имеет соотношение решений уравнения (1) — причем под решением уравнения (1) всегда будем понимать нетривиальное решение (т. е. $\not\equiv 0$) и решений уравнения Шварца

$$-\{z, x\} = Q(x)\,, \tag{8}$$

где символ $\{z, x\} = 1/2z'''(x)/z'(x) - 3/4(z''(x)/z'(x))^2$ означает производную Шварца функции z в точке x. Известно ([1], стр. 224–225), что отношение $f = u/v$ двух линейно независимых решений уравнения (1) есть решение уравнения (8). И наоборот, каждое решение f уравнения (8) можно представить как отношение двух линейно независимых решений уравнения (1). Отсюда вытекает, что решения уравнения (8) являются мероморфными функциями в области T и если f_1 одно решение уравнение (8), то ее общее решение есть $(af_1 + b)/(cf_1 + d)$, причем $ad - bc \neq 0$, где a, b, c, d константы. Далее получаем, что все значения любого решения уравнения (8) простые. Отношение между нулями решений уравнения (1) и распределением значений решений уравнения (8) выясняет лемма 5.

Лемма 5. *Пусть u, v — два линейно независимых решения уравнения* (1). *Тогда для каждого c из расширенной плоскости E существует ровно один класс решений уравнения* (1) *такой, что c-точки функции u/v, т. е. точки x, в которых $[u(x)]/[v(x)] = c$, совпадают с нулями решений этого класса. И наоборот, каждому классу решений уравнения* (1) *соответствует ровно одна константа $c \in E$ такая, что множество нулей решений этого класса совпадает с множеством c-точек функции u/v.*

Наряду с этой леммой имеет фундаментальное значение в наших рассуждениях также лемма 6.

Лемма 6. *Пусть u, v — два линейно независимых решения уравнения* (1). *Тогда для любого c из расширенной комплексной плоскости E соответствует ровно один класс решений уравнения* (1) *такой, что c-точки функции u'/v' совпадают с нулями производной решений этого класса. И наоборот, каждому классу решений уравнения* (1) *соответствует ровно одна константа $c \in E$ такая, что множество нулей производной решений этого класса совпадает с множеством c-точек функции u'/v'.*

Леммы 5 и 6 доказаны в работе [1], стр. 225. Разбиение на классы множества решений уравнения (1) определяется следующим образом: два решения u, v, принадлежат одному и тому-же классу тогда и только тогда, если они линейно зависимы. Нули решений и соответственно нули производной решений, принадлежащих одному и тому-же классу одинаковы, в то время как решения из разных классов, ни их производные, не имеют ни одной общей нулевой точки. Покажем еще, что если в обеих леммах u и v выбраны одни и те-же, причем в том же порядке, то каждому значению $c \in E$ соответствует в обеих леммах тот же класс. Действительно, значениям 0 или ∞ соответствует класс, которому принадлежит функция u или v соответственно. Постоянной c $(\neq 0, \neq \infty)$ в лемме 5 соответствует класс решений, которому принадлежит $u - cv$, в лемме 6 класс, содержащий решение, производная которого равна $u' - cv'$. Таким решением может быть только $u - cv$ и поэтому оба класса совпадают.

О полезности лемм 5 и 6 говорят их следствия.

Следствие леммы 5. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждое решение уравнения* (1) *имело не более одного нуля, является существование унивалентного решения уравнения* (8).

Это следствие было доказано в работах [6], [7], [8]. Мы проводим здесь его доказательство лишь ради полноты.

Если каждое решение $c_1 u + c_2 v$ уравнения (1) имеет не более одной нулевой точки, то по лемме 5 функция u/v унивалентна. Но она есть решение уравнения (8). Наоборот, если существует унивалентное решение w уравнения (8), то его можно писать в виде $w = u/v$, где u, v линейно независимые решения (1). По лемме 5 тогда любое решение уравнения (1) имеет не более одного нуля.

Аналогично доказывается следствие леммы 6. Для его доказательства нужна лемма 7.

Лемма 7. *Пусть* $T_0 \subset T$ *область, в каждой точке которой* $Q(x) \neq 0$. *Тогда отношение* u'/v' *производных двух линейно независимых решений* u, v *уравнения* (1) *рассматриваемых в* T_0, *удовлетворяет уравнению*

$$-\{z, x\} = Q(x) - \left\{\int Q \,\mathrm{d}x, x\right\}, \tag{9}$$

определенному в T_0, *и наоборот, каждое решение этого уравнения есть отношение двух линейно независимых решений уравнения* (1) *в области* T_0.

Доказательство. Рассмотрим решение u уравнения (1) в области T_0. Дифференцированием тождества $u'' = Qu$ получим $u''' - Q'u - Qu' = 0$. Так как u можно писать в виде $u = u''/Q$, то последнее тождество принимает вид

$$u''' - \frac{Q'}{Q} u'' - Qu' = 0\,.$$

Отсюда видно, что производная u' решения u удовлетворяет в T_0 уравнению

$$y'' - \frac{Q'}{Q} y' - Qy = 0\,. \tag{10}$$

Аналогично и v' удовлетворяет этому уравнению и решения u', v' образуют его фундаментальную систему. Тогда любое решение s уравнения (10) можно писать в виде $s = c_1 u' + c_2 v'$ и оно есть производная решения $c_1 u + c_2 v$ уравнения (1) в области T_0. Приведем уравнение (10) к нормальному виду. Известно ([9], стр. 130), что если s решение уравнения (10), то функциця

$$p = \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{Q'}{Q}\,\mathrm{d}x\right].\,s\,, \quad \text{т. е.} \quad p = k\frac{s}{Q^{1/2}}\,,$$

где k-постоянная, есть решение уравнения

$$y'' + \left[-Q - \frac{1}{2}\left(-\frac{Q'}{Q}\right)' - \frac{1}{4}\left(-\frac{Q'}{Q}\right)^2\right] y = 0\,,$$

которое приводится к виду

$$y'' = \left[Q - \frac{1}{2}\frac{Q''}{Q} + \frac{3}{4}\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2\right] y\,.$$

Но это не есть ничто иное, как уравнение

$$y'' = \left[Q - \left\{\int Q \,\mathrm{d}x, x\right\}\right] y\,. \tag{11}$$

Следовательно, функции $u'/Q^{1/2}$, $v'/Q^{1/2}$, которые, вообще говоря, являются двузначными аналитическими функциями, образуют фундаментальную систему решений уравнения (11). Поэтому их отношение $g = u'/v'$ есть решение уравнения (9). Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\frac{ag + b}{cg + d} = \frac{au' + bv'}{cu' + dv'}, \quad ad - bc \neq 0,$$

и является отношением производных двух линейно независимых решений уравнения (1).

Замечание. Функция $Q - \{\int Q\, dx, x\}$, фигурирующая в уравнениях (9) и (11), голоморфна в каждой точке $x \in T$, в которой $Q(x) \neq 0$. В нулевой точке функции Q она имеет полюс второго порядка ([8], стр. 237). Поэтому уравнения (9), (11) можно определить только в такой подобласти области T, в которой $Q(x) \neq 0$.

Следствие леммы 6. *Для того, чтобы производная любого решения уравнения* (1) *имела не более одного нуля, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке* $x \in T$ *было* $Q(x) \neq 0$ *и чтобы существовало унивалентное решение уравнения* (9).

Доказательство. Производная $(u'/v')'$ отношения u'/v' производных двух линейно независимых решений уравнения (1) u, v, равна

$$\left(\frac{u'}{v'}\right)' = Q\,\frac{w}{v'^2},$$

где w вронскиан решений u, v и, следовательно это постоянная, отличная от нуля. Если x_0 есть нулевая точка функции Q и v подходяще выбранное решение уравнения (1) такое, что $v'(x_0) \neq 0$, то $[u'/v']'|_{x=x_0} = 0$. Следовательно, функция u'/v' в окрестности точки x_0 не является взаимно-однозначной. По лемме 6 это означает, что производная некоторых решений уравнения (1) имеет по крайней мере два нуля. Поэтому для того, чтобы производная любого решения уравнения (1) имела не более одного нуля, необходимо, чтобы $Q(x) \neq 0$ в любой точке $x \in T$. Далее поступаем аналогично, как при доказательстве следствия леммы 5, причем используем лемму 7.

Переходим к решению нашей задачи. Ради простоты будем говорить, что уравнение *обладает свойством* А, если выполняется следующее:

Для каждого решения u этого уравнения существует линейно независимое решение v того же уравнения такое, что функции u, v', также как и функции u', v имеют одинаковые нулевые точки той-же кратности. Лемма 8 дает необходимое условие для того, чтобы уравнение (1) обладало свойством А.

Лемма 8. *Если уравнение* (1) *обладает свойством* А, *то его коэффициент* $Q(x)$ *отличен от нуля во всей области* T.

Доказательство. Решения уравнения (1) имеют простые нули. Поэтому если уравнение (1) обладает свойством А, то нули первой производной всех его решений простые. Но в точке $a \in T$, в которой $Q(a) = 0$, производная решения, удовлетворяющего условию $u'(a) = 0$, имеет по крайней мере двукратный нуль. Поэтому для всех $x \in T$ $Q(x) \neq 0$.

Докажем теперь необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение (1) обладало свойством А.

Теорема 1. *Пусть u, v — два линейно независимых решения уравнения* (1), *H_1 и H_2 области значений функций u/v и u'/v' соответственно. Тогда уравнение* (1) *обладает свойством* А *тогда и только тогда, если отображение F области H_1 на область H_2, определенное соотношением*

$$F\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{u'(x)}{v'(x)}, \tag{12}$$

имеет следующие свойства:

а) *является конформным отображением,*

б) *не имеет ни одной неподвижной точки*

и если $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, при выполнении еще следующих двух условий:

в) *существует аналитическое продолжение F_1 функции F в области $H_1 \cup H_2$, которое взаимно-однозначно отображает $H_1 \cup H_2$ на себя и удовлетворяет тождеству $F_1 = F_1^{-1}$, где F_1^{-1} означает функцию, обратную к F_1,*

г) *дополнение области $H_1 \cup H_2$ состоит ровно из двух точек.*

Доказательство. На основании лемм 5 и 6 можно свойство А уравнения (1) сформулировать следующим образом: Для любого значения c из расширенной комплексной плоскости E существует точка $d \in E$, $d \neq c$, такая, что c-точки функции u/v совпадают с d-точками функции u'/v', и наоборот, d-точки функци u/v совпадают с c-точками функции u'/v'. Это условие в частности означает, что все значения функции u'/v' имеют ту же кратность, как значения функции u/v, и поэтому они простые. Таким образом, условие простоты нулей производной решения уравнения (1) выполнено. Покажем, что эквивалентная формулировка условия А будет выполняться тогда и толька тогда, когда отображение F, определенное равенством (12), имеет свойства а)—г). Заметим еще, что F, очевидно, отображает H_1 на H_2.

Необходимость. Если $c \in H_1$ — любая точка, то множество c-точек функции u/v не пусто, и так как оно совпадает с множеством d-точек функции u'/v' $(d \in H_2)$, то $F(c) = d$, причем $c \neq d$ и отображение F принимает значение d только в точке c. Следовательно, F отображает H_1 на H_2 взаимно однозначно и не имеет в H_1 ни одной неподвижной точки. Далее функция F мероморфна в H_1. Действительно, пусть P любой элемент функции u/v, принимающий в своем центре x_0 значение c. Для P существует обратный элемент P^{-1}, так как все значения функции u/v простые. Элемент P^{-1} отображает окрестность точки c на окрестность точки x_0. Сложная функция $[u'/v']\, P^{-1}(u'/v'$ берется в окрестности точки $x_0)$ определена, очевидно, в некоторой окрестности O точки c, мероморфна и удовлетворяет в ней равенству (12). Благодаря своей однозначности, F принимает в каждой точке $z \in O$ ровно одно значение, поэтому в O $F(z) \equiv [u'/v']\,[P^{-1}(z)]$ и F мероморфна в O. Следовательно, она мероморфна во всей области H_1 и конформно отображает H_1 на H_2. Обратная функция F^{-1} конформно отображает H_2 на H_1.

Если $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, то открытое множество $H_1 \cup H_2$ есть область. Если c — любая точка из $H_1 \cap H_2$, то существует точка d такая, что $F(c) = d$. Так как кроме того d-точки функции u/v совпадают с c-точками функции u'/v' и множество c-точек функции u'/v' не пусто (поскольку $c \in H_2$), то $d \in H_1 \cap H_2$ и $F(d) = c$. Отсюда получаем две вещи: 1. Прежде всего функция F отображает $H_1 \cap H_2$ в себя. Далее, $H_1 - H_2$ отображается в $H_2 - H_1$. Действительно, пусть $p \in H_1 - H_2$, $F(p) = r$. Это означает, что множество p-точек функции u/v не пусто и совпадает с множеством r-точек функции u'/v', в то время как множество p-точек функции u'/v' пусто. Так как множество r-точек функции u/v совпадает с множеством p-точек функции u'/v' и последнее пусто, то $r \in H_2 - H_1$. Функция F отобразит H_1 на H_2, и так как ни одна точка из $H_1 - H_2$ или $H_1 \cap H_2$ не может быть прообразом точки из $H_1 \cap H_2$ или $H_2 - H_1$ соответственно и множества $H_1 - H_2$ и $H_1 \cap H_2$ имеют пустое пересечение, и их объединение совпадает с H_1, то множество $H_1 \cap H_2$ отображается функцией F на себя, в то время как $H_1 - H_2$ отображается на $H_2 - H_1$. 2. Для каждого $c \in H_1 \cap H_2$

$$F[F(c)] = c. \tag{13}$$

Множество $H_1 \cap H_2$ открыто. Благодаря (13), на каждой его компоненте имеем тождественно $F(z) \equiv F^{-1}(z)$. Поэтому можем в области $H_1 \cup H_2$ определить функцию F_1 следующим образом: $F_1(z) = F(z)$ для $z \in H_1$, $F_1(z) = F^{-1}(z)$ для $z \in H_2$. F_1 очевидно мероморфна в $H_1 \cup H_2$ и является в этой области продолжением функции F (и также функции F^{-1}). F_1 отображает взаимно-однозначно $H_1 \cup H_2$ на себя. Это вытекает из того, что она отображает взаимно-однозначно $H_1 - H_2$ на $H_2 - H_1$, $H_1 \cap H_2$ на себя и $H_2 - H_1$ на $H_1 - H_2$. Эти подмножества области $H_1 \cup H_2$ не имеют попарно общих точек и их объединение равно $H_1 \cup H_2$. На компонентах множества $H_1 \cap H_2$ имеем тождественно $F_1(z) \equiv F(z) \equiv F^{-1}(z) \equiv F_1^{-1}(z)$ и поэтому во всей области $H_1 \cup H_2$ $F_1 = F_1^{-1}$. Функция F_1 не имеет ни одной неподвижной точки, так как отображает $H_1 - H_2$ на $H_2 - H_1$ и $H_2 - H_1$ на $H_1 - H_2$ и пересечение $H_1 - H_2$ и $H_2 - H_1$ пусто, и на множестве $H_1 \cap H_2$ совпадает с функцией F, которая не имеет неподвижных точек. Согласно замечанию после леммы 3 тогда получаем, что дополнение области $H_1 \cup H_2$ состоит ровно из двух точек, что требовалось доказать.

Достаточность. Пусть с начала $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Для любого $c \in H_1$ существует $d \neq c$, $d \in H_2$ такое, что $F(c) = d$, т. е. c-точки функции u/v являются d-точками функции u'/v'. Так как F взаимно-однозначна, то других d-точек функция u'/v' не имеет. Так как $c \in H_1$, $d \in H_2$, то $c \notin H_2$, $d \notin H_1$. Но это означает, что множества d-точек функции u/v и c-точек функции u'/v' пусты и поэтому совпадают. С другой стороны, если $c \in H_2$, то существует $d \neq c$, $d \in H_1$ такое, что $F(d) = c$. Тогда получим тот же результат, что раньше, только c и d поменяются ролями. Если, наконец, $c \notin H_1 \cup H_2$, то существует d, $d \neq c$, $d \notin H_1 \cup H_2$. Если бы такое

d не существовало, то область $E - \{c\}$ (расширенная плоскость с исключенной точкой c) была бы объединением двух непустых открытых множеств H_1 и H_2, которые имеют пустое пересечение, что противоречит ее связности. $c \notin H_1 \cup H_2$, $d \notin H_1 \cup H_2$ означает, что множества c-точек и d-точек функций u/v и u'/v' соответственно пусты и, следовательно, совпадают, что требовалось.

Случай $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Функция F_1 конформно отображает $H_1 \cup H_2$ на себя следующим образом: Так как F является ее ветвью в H_1 и $F(H_1) = H_2$, то F_1 отображает H_1 на H_2 и вследствие $F_1 = F_1^{-1}$ область H_2 на H_1. Отсюда вытекает, что она отовражает $H_1 \cap H_2$ в $H_1 \cap H_2$ и вследствие $F_1 = F_1^{-1}$ на $H_1 \cap H_2$. Так как H_1 отображается на H_2, $H_1 \cap H_2$ на себя, то $F_1(H_1 - H_2) = H_2 - H_1$ и $F_1(H_2 - H_1) = H_1 - H_2$. Отсюда $F(H_1 - H_2) = H_2 - H_1$, $F(H_1 \cap H_2) = H_1 \cap H_2$, так как на множествах $H_1 - H_2$, $H_1 \cap H_2$ F совпадает с F_1. На $H_1 \cap H_2$ $F(z) \equiv F_1(z) \equiv F_1^{-1}(z) \equiv F^{-1}(z)$. Следовательно, если $c \in H_1 \cap H_2$, то существует $d \in H_1 \cap H_2$, $d \neq c$ такое, что $F(c) = d$, $F(d) = c$. Отсюда и из взаимной однозначности F получаем, что множество c-точек (d-точек) функции u/v совпадает с множеством d-точек (c-точек) функции u'/v'. Для c из $H_1 - H_2$ существует $d \in H_2 - H_1$ такое, что $F(c) = d$. Опять получаем, что множество c-точек функции u/v совпадает с множеством d-точек u'/v', в то время как множества c-точек функции u'/v' и d-точек функции u/v пусты. Если $c \in H_2 - H_1$, то существует $d \in H_1 - H_2$, для которого $F(d) = c$ и получаем прежний результат с той разницей, что c и d поменялись местами. Наконец, если $c \notin H_1 \cup H_2$, то, согласно пункту г) теоремы 1, существует точка $d \notin H_1 \cup H_2$, $d \neq c$. Множества c-, d-точек функций u/v и u'/v' пусты и, следовательно, совпадают. Теорема 1 доказана.

Пусть уравнение (1) обладает свойством A. Тогда множество $H_1 \cap H_2$, фигурирующее в теореме 1, либо пусто, либо $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим сначала второй случай. По теореме 1 дополнение области $H_1 \cup H_2$ имеет тогда ровно две точки и, следовательно, F_1 а также ее ветвь F, фигурирующие в теореме 1 являются по лемме 1 дробно-линейными преобразованиями. Из свойств дополнения $H_1 \cup H_2$ получаем с помощью лемм 5 и 6, что существуют два класса решений уравнения (1), не имеющие, также как их производные, ни одного нуля в T. Чтобы избежать трудностей, связанных с точкой ∞, выбираем функции u, v так, чтобы H_1 не содержала эту точку. Образуем теперь производную Шварца обеих частей равенства (12). Получим

$$\left\{\frac{u'}{v'}, x\right\} = \left\{F\left[\frac{u}{v}\right], x\right\} = \left\{F, \frac{u(x)}{v(x)}\right\}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'^2 + \left\{\frac{u}{v}, x\right\}, \tag{14}$$

где мы использовали тождество для производной Шварца (см. [8], стр. 239). Функции u, v представляют собой два линейно независимых решения уравнения (1), поэтому из уравнения (8) с помощью леммы 7 получим подстановкой в (14)

$$-Q(x) + \left\{\int Q\,\mathrm{d}x, x\right\} = \left\{F, \frac{u(x)}{v(x)}\right\}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'^2 - Q(x)$$

и далее

$$\left\{\int Q \,\mathrm{d}x, x\right\} = \left\{F, \frac{u(x)}{v(x)}\right\} \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'^2 .$$

Так как F — дробно-линейное преобразование, то $\{F, u(x)/v(x)\} \equiv 0$, и функция $\int Q \,\mathrm{d}x$ удовлетворяет в области T уравнению

$$\{z, x\} = 0 . \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) есть дробно-линейная функция. Следовательно, $\int Q \,\mathrm{d}x = (ax + b)/(cx + d)$, $D = ad - bc \neq 0$, a, b, c, d константы. Отсюда $Q(x) = D/(cx + d)^2$. Не уменьшая общности, можем предполагать, что $D = 1$. Если $c = 0$, то $Q(x) = \text{const} \neq 0$. Покажем, что c не может быть отличным от нуля. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$y'' = \frac{1}{(cx + d)^2} y \tag{1''}$$

(уравнение Эйлера), причем область T не содержит точки x_0, в которой $cx_0 + d = 0$. Решение уравнения (1″) ищем в виде $y = (cx + d)^r$, где r постоянная. Для r получаем уравнение

$$r^2 - r - \frac{1}{c^2} = 0 .$$

Его решения имеют вид

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4/c^2}}{2} . \tag{16}$$

Если $1 + 4/c^2 \neq 0$, то функции $u = (cx + d)^{r_1}$, $v = (cx + d)^{r_2}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1″). Для их отношения и отношения их производных имеем $u/v = (cx + d)^{r_1 - r_2}$, $u'/v' = (r_1/r_2)(u/v)$. Функция F, фигурирующая в равенстве (12) имеет тогда вид $F(z) = (r_1/r_2) z$. Так как ее продолжение F_1 удовлетворяет равенству $F_1 = F_1^{-1}$, то F должна быть того-же вида, как обратная к ней функция $F^{-1} = (r_2/r_1) z$. Но это возможно только тогда, когда $r_2/r_1 = \pm 1$. Предположение $r_1 = r_2$ противоречит тому, что корни r_1, r_2 различны. Не может быть также $r_2 = -r_1$, так как, согласно (16), $r_1 + r_2 = 1 \neq 0$.

Если $1 + 4/c^2 = 0$, то $r_1 = r_2 = 1/2$ и в качестве двух линейно независимых решений уравнения (1″) можно взять функции $u = \log(cx + d) . (cx + d)^{1/2}$, $v = (cx + d)^{1/2}$. Их отношение $u/v = \log(cx + d)$, причем $u'/v' = \log(cx + d) + 2$. Для F тогда получим $F(z) = z + 2$. Эта функция не имеет одинаковый вид со своей обратной функцией.

Мы показали, что если уравнение (1) имеет свойство A и $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, то это уравнение с постоянным коэффициентом. Предположение $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ означает, что для любого $c \in E$ по крайней мере одно из множеств c-точек функции u/v и c-точек функции u'/v' пусто. На основании лемм 5 и 6 тогда для любого решения u уравнения (1) верно следующее утверждение: По крайней мере одна из функций u, u' не имеет ни одного нуля. Далее существует несчетное число классов решений u уравнения (1) таких, что функция uu' не имеет ни одного нуля. Если бы это было не так, то дополнение G открытого, очевидно не связного множества $H_1 \cup H_2$, состояло бы не более чем из счетного числа точек. Пусть $a \in H_1$ и $b \in H_2$ две произвольные точки. Их можно соединить несчетной системой S ломанных, которые, за исключением концов, не имеют попарно общих точек. Так как $H_1 \cup H_2$ несвязна, то каждая ломанная из S содержит по крайней мере одну точку из G. Но это противоречит тому, что G не более чем счетна и S несчетна. Следовательно, имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Если уравнение* (1) *обладает свойством* А, *то либо это уравнение с постоянным коэффициентом, либо каждое его решение и обладает следующим свойством: По крайней мере одна из функций u, u' не имеет ни одного нуля. В этом случае существует несчетное число классов решений и уравнения* (1) *таких, что функция uu' не имеет ни одного нуля.*

Следствие. *Среди уравнений* (1) *с целым коэффициентом только уравнение с постоянным коэффициентом* (*отличным от нуля*) *обладает свойством* А.

Доказательство. Уравнение с ненулевым постоянным коэффициентом действительно имеет свойство А. Если какое-нибудь уравнение с целым коэффициентом обладает свойством А, то по лемме 8 ее коэффициент отличен от нуля во всей расширенной плоскости. Поэтому можем применить теоремы 3 и 4 из [1], стр. 233. Получим, что, за исключением конечного числа классов, все решения этого уравнения, так же, как их производные, имеют бесконечное число нулей. Но тогда не выполнено второе условие теоремы 2, и уравнение является уравнением с постоянным коэффициентом.

В дальнейшем будем различать два типа уравнений, обладающих свойством А. Если каждое решение этого уравнения (в области T) имеет не более одного нуля, то будем говорить, что это уравнение имеет свойство А первого типа. В противном случае, т. е. если хотя бы одно решение имело более одного нуля, — второго типа. Очевидно, что уравнение не может иметь свойство А обоих типов одновременно. Далее, если уравнение (1) имеет свойство А, то уравнение, которое получим из уравнения (1), если вместо $Q(x)$ будем рассматривать ее ветвь в любой односвязной подобласти T' области T, и которое обозначим $(1T')$, тоже имеет свойство А. При этом свойство А первого типа сохраняется. Но если уравнение (1) имеет свойство А второго типа, то уравнение $(1T')$ уже может не обладать свойством А второго типа. Например уравнение

$$(1''') \qquad y'' = y\,,$$

определенное в открытой плоскости, имеет свойство А второго типа. Каждое его решение u, которое имеет по крайней мере один нуль, имеет бесконечное число нулей, которые все лежат на прямой, параллельной мнимой оси. Производная u' имеет тоже бесконечное число нулей, которые лежат на той-же прямой, что и нули решения u, и делят расстояние двух соседних нулей функции u пополам (см. [1], стр. 235). Следовательно, полоса $0 < \operatorname{Im} x < \frac{1}{2}\pi$ содержит не более одного нуля функции uu' для каждого u, которое есть решение уравнения ($1'''$). В полосе $0 < \operatorname{Im} x < \pi$ уравнение ($1'''$) имеет еще свойство А первого типа, но существуют уже такие его решения, которые вместе с производной имеют по одному нулю.

Займемся сначала уравнениями (1), которые имеют свойство А первого типа.

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение* (1) *имело свойство* А *первого типа необходимо и достаточно, чтобы либо это было уравнение с постоянным коэффициентом, каждое решение которого имеет в области T не более одного нуля, либо чтобы функция uu' имела не более одного нуля для любого решения u уравнения* (1).

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 2 уравнение (1) является либо уравнением с постоянным коэффициентом; по определению свойства А первого типа каждое его решение имеет не более одного нуля, либо для каждого его решения по крайней мере одна из функций u, u' не имеет ни одного нуля. Так как u и, очевидно, u' могут иметь не более одного нуля, то uu' тоже не имеет более одного нуля.

Достаточность. Она очевидна для уравнения с постоянным коэффициентом. Но если uu' имеет для каждого решения u уравнения (1) не более одного нуля, то тем более u и u' не имеют более одного нуля, причем по крайней мере одна из них отлична от нуля всюду. Тогда по леммам 5 и 6, сохраняя принятые в них обозначения, получим, что функции u/v и u'/v' взаимно-однозначны и области их значений H_1 и H_2 соответственно имеют пустое пересечение. Отображение F, определенное равенством (12) имеет свойства а) и б) теоремы 1, согласно которой уравнение (1) имеет свойство А, очевидно, первого типа.

Следствие. *Не существует уравнение* (1) *с целым коэффициентом, обладающее свойством* А *первого типа.*

Доказательство. По следствию из теоремы 2 только уравнение с постоянным коэффициентом обладает свойством А в открытой плоскости. За исключением двух классов все решения этого уравнения имеют бесконечное число нулей ([1], стр. 234).

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция uu' имела не более одного нуля для каждого решения u уравнения* (1), *является существование унивалентного решения z уравнения* (8), *унивалентного решения $t = z - 2z'^2/z''$ уравнения* (9) *и таких, что области значений z и t не имеют общих точек, и чтобы функция $Q(x) \neq 0$ во всех точках области T.*

Доказательство. Функция uu' имеет для каждого решения u уравнения (1) не более одного нуля тогда и только тогда, когда, во первых, функции u, u'

имеют каждая не более одного нуля, и, во вторых, по крайней мере одна из функций u, u' отлична от нуля всюду. Первое условие эквивалентно по леммам 5 и 6 тому, что существует унивалентное решение уравнений (8) и (9) и функция $Q(x) \neq 0$ во всей области T. Второе условие можно, используя леммы 5 и 6, сформулировать следующим образом: Для решения z уравнения (8) существует такое решение t уравнения (9), что если z можно представить в виде $z = u/v$, где u и v два линейно независимых решения уравнения (1), то $t = u'/v'$, и области значений функций z и t не имеют общих точек. Покажем, что t можно представить с помощью z в виде $t = z - 2z'^2/z''$. При этом, не уменьшая общности, можно предполагать, что вронскиан решений u, v уравнения (1) равен -1. Тогда $z' = 1/v^2$, $z'' = (-2/v^3)\, v'$, и далее

$$\frac{1}{z} = \frac{v}{u}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{u^2}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)'' = \frac{2}{u^3} u'.$$

Отсюда

$$\frac{(1/z)''}{z''} = -\frac{u'}{v'}\frac{v^3}{u^3},$$

следовательно,

$$t = \frac{u'}{v'} = -z^3 \frac{(1/z)''}{z''}. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} z', \quad \left(\frac{1}{z}\right)'' = -\frac{z''z^2 - 2zz'^2}{z^4}.$$

Подставляя последнее выражение в (17), получим, что $t = z - 2z'^2/z''$. Наконец используем то обстоятельство, что если одно решение уравнения (9) унивалентно, то все решения этого уравнения унивалентны.

С помощью теоремы 4 покажем существование уравнения (1) с непостоянным коэффициентом, которое имеет свойство А первого типа.

Теорема 5. *Дифференциальное уравнение*

$$y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} y, \tag{18}$$

определенное в квадранте K, определенном неравенствами $0 < \operatorname{Re} x < \infty$, $0 < \operatorname{Im} x < \infty$, *обладает свойством* А *первого типа.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $z = x^2$. Эта функция удовлетворяет в K дифференциальному уравнению $-\{z, x\} = \frac{3}{4}x^{-2}$, унивалентна в нем и отображает его на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Функция $t = z - 2z'^2/z'' = -3x^2$ унивалентна в K и отображает K на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$. Коэффициент $Q(x) = \frac{3}{4}x^{-2}$ уравнения (18) не имеет в K ни одного нуля. По теоремам 4 и 3 это уравнение обладает свойством А первого типа.

Теорема 5 гарантирует существование уравнения (1) с непостоянным коэффициентом, которое обладает свойством A первого типа в квадранте K. Но из следствия теоремы 3 вытекает, что такого уравнения нет в открытой плоскости. В общем случае вопрос о существовании уравнения (1), обладающего свойством A первого типа решается теоремой 6.

Теорема 6. *В области T существует уравнение* (1) *с непостоянным коэффициентом, обладающее свойством* A *первого типа, тогда и только тогда, если существует конформное отображение z_1 этой области, обладающее следующими свойствами:*

1. *Не имеет вид $h(e^{ax})$, где h дробно-линейное преобразование и $a \neq 0$ постоянная.*

2. *Функция $t_1 = z_1 - 2z_1'^2/z_1''$ также является конформным отображением области T.*

3. *Области $z_1(T)$ и $t_1(T)$ не имеют общих точек. Если такое отображение z_1 области T существует, то уравнение*

$$y'' = -\{z_1, x\}\, y \tag{19}$$

имеет свойство A *первого типа.*

Доказательство. Заметим сначала, что отношение u/v двух линейно независимых решений u, v уравнения (1) имеет вид $h(e^{ax})$ тогда и только тогда, если оно является уравнением с постоянным коэффициентом. Действительно. Прежде всего, каждое решение уравнения (8) с ненулевым постоянным коэффициентом имеет, очевидно, вид $h(e^{ax})$. Наоборот, если уравнение (8) имеет решение вида $h(e^{ax})$, то имеет также решение e^{ax}, а это удовлетворяет уравнению (8) с постоянным коэффициентом $Q(x) = \frac{1}{4}a^2$. Пусть в области T существует уравнение (1) с непостоянным коэффициентом, обладающее свойством A первого типа. По теореме 3 для каждого его решения u функция uu' имеет не более одного нуля. По теореме 4 отсюда получаем, что существует решение z_1 уравнения 8, которое конформно отображает область T, функция $t_1 = z_1 - 2z_1'^2/z_1''$ также является конформным отображением области T, причем области значений функций z_1 и t_1 не имеют общих точек. Функция z_1 обладает также свойством 1.

Наоборот, если существует конформное отображение z_1 области T со свойствами 1.—3., то оно является решением уравнения (8) с коэффициентом $Q_1(x) = -\{z_1, x\}$ и его можно писать в виде u/v, где u, v два линейно независимых решения уравнения (19). Тогда из доказательства теоремы 4 вытекает, что отношение u'/v' есть функция $t_1 = z_1 - 2z_1'^2/z_1''$. Из ее унивалентности получаем, что $Q_1(x) \neq 0$ во всей области T. Тогда последовательно выполняются достаточные условия в теоремах 4 и 3, и, следовательно, уравнение (19) имеет свойство A первого типа, причем не является уравнением с постоянным коэффициентом.

Остается показать, что функция $Q_1(x)$ голоморфна в области T. Но это вытекает из леммы 9.

Лемма 9. *Пусть w — мероморфная функция в области T ($\infty \notin T$), состоящая только из простых элементов. Тогда ее производная Шварца $\{w, x\}$ является голоморфной функцией в области T.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для точек, в которых функция w голоморфна, так как в этих точках производная функции w отлична от нуля. Пусть теперь $x_0 \in T$ есть полюс функции w. Так как этот полюс простой, то ряд Лорана функции w в окрестности точки x_0 имеет вид

$$w = \frac{c_{-1}}{x - x_0} + c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \ldots, \quad c_{-1} \neq 0 .$$

Отсюда имеем

$$w' = \frac{-c_{-1}}{(x - x_0)^2} + c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$w'' = \frac{2c_{-1}}{(x - x_0)^3} + 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + \ldots, \quad w''' = \frac{-6c_{-1}}{(x - x_0)^4} - 6c_3 + \ldots .$$

Из этих равенств получаем, что ряд Лорана функций $\frac{1}{2}(w'''/w')$, $\frac{3}{4}(w''/w')^2$ в окрестности точки x_0 имеет вид

$$(20) \qquad \frac{1}{2}\frac{w'''}{w'} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{1}{(x - x_0)^4}\left[-6c_{-1} + 6c_3(x - x_0)^4 + \ldots\right]}{\dfrac{1}{(x - x_0)^2}\left[-c_{-1} + c_1(x - x_0)^2 + \ldots\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(x - x_0)^2}\left[6 + 0\,.\,(x - x_0) + k_0(x - x_0)^2 + \ldots\right] = \frac{3}{(x - x_0)^2} + k_0 + \ldots,$$

так как отношение $(-6c_{-1} + 6c_3(x - x_0)^4 + \ldots)/(-c_{-1} + c_1(x - x_0)^2 + \ldots)$ дает, согласно [10], стр. 163, степенной ряд $\zeta_0 + \zeta_1(x - x_0) + \zeta_2(x - x_0)^2 + \ldots$, коэффициенты которого определяются из соотношений

$$\zeta_0 = \frac{-6c_{-1}}{-c_1} = 6\,, \quad \zeta_1 = \frac{-1}{(-c_{-1})^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -c_{-1} & -6c_{-1} \end{vmatrix} = 0\,, \ldots .$$

Аналогично

$$\frac{w''}{w'} = \frac{\dfrac{1}{(x - x_0)^3}\left[2c_{-1} + 2c_2(x - x_0)^3 + \ldots\right]}{\dfrac{1}{(x - x_0)^2}\left[-c_{-1} + c_1(x - x_0)^2 + \ldots\right]} =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left[-2 + 0(x - x_0) + k_1(x - x_0)^2 + \ldots\right].$$

Из этого

$$(21)\qquad \frac{3}{4}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{(x-x_0)^2}[4+0(x-x_0)-4k_1(x-x_0)^2+\ldots] = \frac{3}{(x-x_0)^2}+l_0+\ldots .$$

Из (20) и (21) вытекает, что главная часть ряда Лорана производной Шварца функции w в окрестности точки x_0 тождественно равна нулю, следовательно, можно эту производную доопределить в точке x_0 так, что она станет голоморфной и в точке x_0 и, следовательно, во всей области T.

Для уравнений, обладающих свойством A второго типа, имеет место теорема 7.

Теорема 7. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение* (1) *с непостоянным коэффициентом обладало свойством* A *второго типа, является существование решения z уравнения* (8), *удовлетворяющего следующим условиям:*

1. *z не есть вида $h(e^{ax})$, где h — дробно-линейное преобразование и $a \neq 0$ — постоянная.*
2. *z не является унивалентным.*
3. *Обратная к z функция x есть решение уравнения*

$$(22)\qquad x'' - Q_0(z)\,x' = 0\,,$$

определенного в области значений H функции z. При этом коэффициент $Q_0(z)$ этого уравнения такой, что функция

$$(23)\qquad F(z) = z + \frac{2}{Q_0(z)}$$

отображает конформно область H на область, не имеющую с H общих точек.

Доказательство. Из доказательства теоремы 6 и леммы 5 вытекает, что решение z уравнения (8), удовлетворяющее условиям 1. и 2. существует тогда и только тогда, если уравнение (1) есть уравнение с непостоянным коэффициентом и по крайней мере одно его решение имеет более чем один нуль. Далее видно, что если одно решение z уравнения (8) имеет свойства 1. и 2., то этими свойствами обладают все решения этого уравнения. Покажем, что то-же самое верно и для условия 3, которое эквивалентно утверждению, что уравнение (1) имеет свойство A. Действительно, пусть уравнение (1) имеет свойство A и z любое решение уравнения (8). Если записать z в виде отношения u/v двух линейно независимых решений u, v уравнения (1), то по теореме 1 существует конформное отображение F области H, удовлетворяющее тождеству (12). При доказательстве теоремы 4 мы показали, что это тождество можно записать в виде

$$(24)\qquad F[z(x)] = z(x) - 2\frac{z'^2(x)}{z''(x)}\,.$$

По теореме 2 функция F отображает область H на область, которая не имеет с H общих точек, так как уравнение (1) есть уравнение с непостоянным коэффициентом.

Рассмотрим функцию x. Согласно определению обратной функции (см. [5]), функция x аналитична в области H и определяется обратным элементом любого элемента функции z, так как z содержит толко простые элементы. Пусть P элемент функции z с центром $x_0 \in T$, не являющимся ни полюсом функции z, ни нулем z''. Заметим, что $z''(x) \equiv 0$ противоречит условию 2. теоремы 7. В окрестности O точки x_0 P удовлетворяет тождеству (24). Пусть P^{-1} есть обратный элемент к элементу P. Для производных элементов P, P^{-1} выполняется в O тождество

$$P'(x) = \frac{1}{P^{-1\prime}[P(x)]}, \quad P''(x) = -\frac{P^{-1\prime\prime}[P(x)]}{P^{-1\prime\,3}[P(x)]}. \tag{25}$$

Если обозначить $P(x) = z$, то из (24) с помощью (25) получим

$$F(z) = z + 2\,\frac{P^{-1\prime}(z)}{P^{-1\prime\prime}(z)}.$$

Из этого видно, что P^{-1} удовлетворяет в окрестности своего центра $z_0 = P(x_0)$ дифференциальному уравнению

$$x'' - \frac{2}{F(z) - z}\,x' = 0, \tag{22'}$$

что представляет уравнение (22), где положено

$$Q_0(z) = \frac{2}{F(z) - z}. \tag{26}$$

Из теоремы о перманентности функциональных уравнений (ее общую формулировку можно найти в [8], стр. 232) вытекает, что функция x удовлетворяет уравнению (22).

Рассмотрим еще уравнение (22). Так как равенства (23) и (26) эквивалентны, то коэффициент Q_0 обладает требуемым в теореме свойством. Из равенства (26) и из того, что $F(H) \cap H = \emptyset$ вытекает, что Q_0 голоморфная функция в области H. Чтобы выяснить, определено ли уравнение (22) также в точке $z = \infty$, если эта точка принадлежит H, рассмотрим преобразование независимой переменной

$$z = 1/t. \tag{27}$$

Производные функции x по старой и новой независимым переменным удовлетворяют соотношениям

$$x'(z) = -t^2\,x'(t), \quad x''(z) = t^4\,x''(t) + 2t^3\,x'(t),$$

поэтому уравнение (22′) после преобразования (27) примет вид

$$x''(t) + \left[\frac{2}{t} + \frac{2}{t^2[F(1/t) - 1/t]}\right] x'(t) = 0$$

и после приведения

$$x''(t) + 2\,\frac{F(1/t)}{t\,F(1/t) - 1}\,x'(t) = 0\,. \tag{28}$$

Функция $2[F(1/t)]/(t\,F(1/t) - 1)$ голоморфна в точке $t = 0$, и следовательно, уравнение (22) определено и в точке $z = \infty$, что требовалось доказать.

Наоборот, пусть существует одно решение z уравнения (8), обладающее свойством 3. Из равенства (23) вытекает, что коэффициент уравнения (22) удовлетворяет равенству (26) и, следовательно, функция x есть решение уравнения (22′). Снова, если взять элемент $P \in z$, то увидим, что удовлетворяет равенству (24) и согласно принципу аналитического продолжения (24) выполняется для функции z, т. е. выполнено соотношение (12). По теореме 1 уравнение (1) имеет тогда свойство А, что мы хотели показать.

Следствие. *Если уравнение* (1) *обладает свойством* А *второго типа, то каждое решение* z *уравнения* (8) *обладает следующими свойствами:*

1. *z является в области T ветвью функции, автоморфной относительно некоторой группы линейных преобразований в некоторой области $G \supset T$.*

2. *Обратная к z функция x продолжима по любому пути в области значений H функции z.*

3. *Область H не является односвязной.*

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (1) с непостоянным коэффициентом. Так как функция z неунивалентна, то существуют по крайней мере две точки $x_1, x_2 \in T$, $x_1 \neq x_2$, такие, что $z(x_1) = z(x_2) = z_0$. Обозначим через P_1 и P_2 элементы функции z с центрами в точках x_1 и x_2 соответственно. Обратные к ним элементы P_1^{-1}, P_2^{-1} с общим центром z_0 удовлетворяют в кольцеобразной окрестности точки z_0 уравнению (22) и, следовательно, их производные имеют одну и ту-же логарифмическую производную. Две голоморфных функции, имеющие одну и ту-же логарифмическую производную, отличаются лишь на мультипликативную константу. Поэтому $P_1^{-1\prime} = c_1 P_2^{-1\prime}$, $c_1 \neq 0$ и после интегрирования $P_1^{-1} = LP_2^{-1}$, где L линейное преобразование. Из последнего равенства получаем для элементов P_1, P_2 в окрестности точки x_1 соотношение $P_1(x) = P_2[L^{-1}(x)]$, из которого вытекает тождество $z(x) = z[L^{-1}(x)]$. L^{-1} есть тоже линейное преобразование и отображает точку x_1 в точку $x_2 \in T$. Поэтому можем применить лемму 4 из которой вытекает выполнение 1. Условие 2. выполняется потому, поскольку функция x, как решение линейного дифференциального уравнения (22) или (28) с коэффициентом Q_0, голоморфным в области H, продолжима по любому пути в этой области (см. [8], стр. 233). Если бы H была односвязной, то функция x, продолжимая в ней по любому пути, была бы в ней однозначной. Из однозначности x вытекало бы, что эта функция не имеет других элементов, кроме обратных к элементам функции z, поэтому два разных элемента функции z не могли бы принимать в своем центре одно и то-же значение и, следовательно z была бы унивалентной, что противоречит свойству 2 этой функции.

В случае уравнения (1) с постоянным коэффициентом решение z уравнения (8) является ветвью сложной функции $z_1 = h(e^{ax})$, где h дробно-линейное преобразование, $a \neq 0$ постоянная, и условие 1 очевидно выполняется. Областью значений H_1 функции z_1 является расширенная плоскость E, из которой исключены точки $h(0)$, $h(\infty)$. Обратная к ней функция $x_1 = (1/a) \log h^{-1}(z)$ аналитична в области H_1, и поскольку h^{-1} отображает H_1 на область E без точек 0, ∞, то x_1 продолжима по любому пути в H_1. Функция x есть ветвь функции x_1, и поэтому тоже продолжима по любому пути в области, в которой она аналитична. Так как z не унивалентна, то выполнение пункта 3 доказывается так-же, как и раньше.

Покажем теперь, что существует уравнение (1) с непостоянным коэффициентом, которое обладает свойством A второго типа. Это доказывает теорема 8.

Теорема 8. *Существует полоса P, определенная неравенствами $a < \operatorname{Im} x < b$, где $0 < a < b$, такая, что дифференциальное уравнение*

$$y'' = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x - \tfrac{3}{16}\operatorname{ctg}^2 x)\, y\,, \tag{29}$$

определенное в P, имеет свойство A второго типа в P. Это уравнение обладает кроме того следующими свойствами: 1. *Для каждого его решения и либо и либо его производная не имеют ни одного нуля.* 2. *Существуют такие решения этого уравнения, которые имеют бесконечное число нулей, а также решения, производная которых имеет бесконечное число нулей. При этом каждое решение, у которого есть по крайней мере один нуль, имеет бесконечное число нулей. То-же верно для решений, производная которых имеет хотя бы один нуль.* 3. *Существует несчетное число решений этого уравнения, не имеющих, так же, как их производная, ни одного нуля.*

Доказательство. Рассмотрим голоморфную ветвь

$$z = z(x) \tag{30}$$

функции $(\sin x)^{1/2}$. Последняя существует в любой полосе P, определенной неравенствами $a < \operatorname{Im} x < b$, где $0 < a < b$, так как P односвязна и функция $\sin x$ голоморфна в P, причем ее нули лежат вне P. Каждый элемент функции z имеет вид RW, где R есть элемент $\sqrt{w}$ и W элемент функции $w = \sin x$. Это получается из теоремы (9, 1) книги [2], стр. 261, так как $w^{1/2}$ продолжима по любому пути в любой области, не содержащей точек 0 и ∞.

Функция z имеет только простые элементы. Она периодична с периодом 4π и, следовательно, автоморфна относительно группы линейных преобразований, порожденной функцией $x + 4\pi$. Действительно, если точка $x \in P$, $x = x_1 + ix_2$ движется по отрезку из точки x_0 в точку $x_0 + 2\pi$, то точка $\sin x = \sin(x_1 + ix_2) = \sin x_1 . \cosh x_2 + i \cos x_1 . \sinh x_2$ описывает кривую, которая в плоскости $w = w_1 + iw_2$ параметрически задается уравнениями

$$(31) \qquad w_1 = \sin x_1 . \cosh x_2 \,, \quad w_2 = \cos x_1 . \sinh x_2 \,, \quad x_2 = \text{const} \neq 0 \,.$$

Следовательно, точка $\sin x$ обойдет по эллипсу один раз точку 0. Поэтому $z(x_0 + 2\pi) = - z(x_0)$, откуда $z(x_0 + 4\pi) = - z(x_0 + 2\pi) = z(x_0)$, ч. т. д.

Доказательство теоремы 8 проводится в несколько приемов.

1. Покажем, что отображение F, определенное тождеством (24), конформно, если полоса P лежит достаточно высоко над действительной осью, т. е. если a достаточно большое. Для этого найдем выражение функции $z - 2z'^2/z''$ через z. Дифференцируя, получим

$$z'(x) = \frac{\cos x}{2(\sin x)^{1/2}}, \quad z''(x) = - \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x . (\sin x)^{1/2}},$$

откуда

$$z'^2(x) = \frac{1 - z^4(x)}{4z^2(x)}, \quad z''(x) = - \frac{1 + z^4(x)}{z^3(x)},$$

$$z - 2\frac{z'^2}{z''} = z + \frac{1}{2}\frac{z(1 - z^4)}{1 + z^4} = \frac{1}{2}z + \frac{z}{z^4 + 1}.$$

Отображение F, фигурирующее в (24), имеет поэтому вид

$$(32) \qquad F(z) = \frac{1}{2}z + \frac{z}{z^4 + 1}.$$

F — мероморфная функция. В точке ∞ имеет полюс первого порядка, поэтому в достаточно малой окрестности точки ∞, т. е. в области

$$(33) \qquad |z| > R \,,$$

где R достаточно большое положительное число, F взаимно-однозначна. z есть сложная функция. Ее внутреняя составляющая w отображает точки прямой $x_2 = \text{const}$ в эллипс, определенный равенствами (31), следовательно, полоса $0 < a < x_2 < b$ переводится этой функцией в область M, заключенную между эллипсами e_1, e_2, которые имеют одни и те-же фокусы, полуоси которых равны $a_1 = \cosh a$, $b_1 = \sinh a$ для внутреннего эллипса e_1 (видно, что $a_1 > b_1$) и $a_2 = \cosh b$, $b_2 = \sinh b$ для внешнего e_2. M лежит в кольце $K : b_1 < |w| < a_2$. Внешняя составляющая $w^{1/2}$ функции z отображает кольцо K на кольцо

$$(34) \qquad b_1^{1/2} < |z| < a_2^{1/2} \,.$$

Отсюда получаем, что функция z отображает полосу P в область, лежащую в кольце (34). Для достаточно большого a кольцо (34) лежит в области (33), ч. т. д.

2. Если ширина полосы P достаточно мала, т. е. если $b - a$ мало, то отображение F таково, что его область определения, лежащая согласно пункту 1. в кольце (34), не имеет общих точек с областью значений отображения F. Это вытекает из того, что F имеет согласно (32) вид $F(z) = \frac{1}{2}z + o(|z|)$, причем функция $\frac{1}{2}z$, являющаяся главной частью отображения F, отображает достаточно узкое кольцо (34) на область, не имеющую с кольцом (34) общих точек.

3. Функция z удовлетворяет в P уравнению

$$-\{z, x\} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x - \tfrac{3}{16}\operatorname{ctg}^2 x\,, \tag{35}$$

так как выполняется следующее: Если R — элемент функции $w^{1/2}$, то, дифференцируя, получим

$$R'(w) = \tfrac{1}{2}w^{-1/2}\,, \quad R''(w) = -\tfrac{1}{4}w^{-3/2}\,, \quad R'''(w) = \tfrac{3}{8}w^{-5/2}\,,$$

откуда вытекает, что R удовлетворяет уравнению

$$\{R, w\} = \tfrac{3}{8}w^{-2} - \tfrac{3}{16}w^{-2} = \tfrac{3}{16}w^{-2}\,. \tag{36}$$

Элемент W функции $w = \sin x$ удовлетворяет уравнению

$$\{W, x\} = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos x}{\cos x} - \frac{3}{4}\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x\,. \tag{37}$$

Применяя тождество для производной Шварца сложной функции, получим с помощью (36) и (37) для сложной функции RW соотношение

$$\{RW, x\} \equiv \{R, W(x)\}\, W'^2(x) + \{W, x\} = \tfrac{3}{16}\operatorname{ctg}^2 x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x\,.$$

Отсюда получаем, что RW и, следовательно, функция z являются решениями (35).

4. Так как отображение F, фигурирующее в тождестве (24) для решения z уравнения (35), конформно, причем область его значений не имеет общих точек с его областью определения, то уравнение (29), соответствующее уравнению (35), имеет свойство А очевидно второго типа. Свойства 1 и 3 уравнения (29) вытекают из теоремы 2. Свойство 3 получается с помощью лемм 5 и 6 и из того, что функции z и $z - 2z'^2/z''$ периодические и принимают каждое свое значение в бесконечном числе точек.

Следствие. *В каждой полосе P_1 существует дифференциальное уравнение* (1) *с непостоянным коэффициентом, обладающее свойством* А *второго типа.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — линейное преобразование, переводящее полосу P_1 в полосу P, о которой говорится в теореме 8. Такое преобразование, очевидно, существует. Если y есть решение уравнения (29), то сложная функция

$$u(t) = \frac{y[x(t)]}{(x'(t))^{1/2}} \tag{38}$$

определена в области P_1 и, согласно [8], стр. 246, удовлетворяет уравнению

$$u'' = Q_1(t)\, u\,, \tag{39}$$

где $Q_1(t) = Q_0[x(t)]\, x'^2(t)$, так как $-\{x, t\} \equiv 0$. При этом функция Q_0 есть коэффициент уравнения (29). Очевидно $Q_1(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Уравнение (39) имеет свойство A второго типа. Действительно, из равенства (38) вытекает

$$u'(t) = y'[x(t)]\, (x'(t))^{1/2}\,. \tag{40}$$

Так как $(x'(t))^{1/2} \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то из (38) и (40) видно, что между нулями функций y и u так же, как и между нулями их производных, существует взаимно-однозначное соответствие. Так как уравнение (29) имеет свойство A второго типа, то тем-же свойством обладает и уравнение (39) в области P_1.

Также как доказывалась с помощью теорем 4 и 3 теорема 6, можно с помощью теоремы 7 доказать теорему 9.

Теорема 9. *В области T существует уравнение* (1) *с непостоянным коэффициентом, обладающее свойством* A *второго типа тогда и только тогда, когда в области T существует мероморфная функция z_1, состоящая лишь из простых элементов, обладающая следующими свойствами:*

1. *z_1 не есть вида $h(e^{ax})$, где h дробно-линейное преобразование и $a \neq 0$ постоянная.*
2. *z_1 не является унивалентной.*
3. *Обратная к z_1 функция x_1 есть решение уравнения $x'' - Q_0(z)\, x' = 0$, определенного в области значений H функции z_1. При этом $Q_0(z)$ такое, что функция $F(z) = z + 2/Q_0(z)$ отображает конформно область H на область, имеющую с ней пустое пересечение.*

Если такая функция z_1 существует, то уравнение $y'' = -\{z_1, x\}\, y$, определенное в области T, обладает в этой области свойством A *второго типа.*

III. В этой части разберем вопрос, определяется ли уравнение (1) однозначно нулями своих решений. Для точной формулировки вопроса нам понадобится следующее определение.

Пусть даны два уравнения

$$y'' = Q_1(x)\, y \tag{1_1}$$

и

$$y'' = Q_2(x)\, y\,, \tag{1_2}$$

определенные в одной и той же односвязной области T, не содержащей точки ∞. Будем говорить, что уравнения (1_1) и (1_2) имеют все решения с одинаковыми нулями, если для каждого решения u уравнения (1_1) существует интеграл s уравнения (1_2) такой, что функции u и s имеют те-же нули, и наоборот, для каждого интеграла t уравнения (1_2) существует решение v уравнения (1_1) с теми-же нулями, что и интеграл t.

Если все уравнения (1_2), имеющие с уравнением (1_1) все решения с одинаковыми нулями, совпадают с уравнением (1_1), то будем говорить, что уравнение (1_1) определяется нулями своих решений однозначно.

Основной теоремой об уравнениях, имеющих все решения с одинаковыми нулями, является теорема 10.

Теорема 10. *Пусть u, v и s, t пары линейно независимых решений уравнений (1_1) и (1_2) соответственно, H_1 (H_2) область значений функции u/v (s/t). Тогда уравнения (1_1) и (1_2) имеют все решения с одинаковыми нулями тогда и только тогда, если отображение F области H_1 на область H_2, определенное соотношением*

$$F\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{s(x)}{t(x)} \tag{41}$$

конформно.

Доказательство. Будем поступать аналогично, как при доказательстве теоремы 1. На основании леммы 5 имеют уравнения (1_1) и (1_2) все решения с одинаковыми нулями тогда и только тогда, если для любой константы $c \in H_1$ существует точка $d \in H_2$ такая, что s-точки функции u/v являются d-точками функции s/t и наоборот, для любой константы $b \in H_2$ существует $a \in H_1$ такое, что b-точки функции s/t являются a-точками функции u/v. Следовательно, утверждение теоремы справедливо тогда и только тогда, когда F взаимно-однозначная функция. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1 можно показать, что если уравнения (1_1) и (1_2) имеют все решения с одинаковыми нулями, то F мероморфна.

Далее имеет место следующая лемма.

Лемма 10. *В обозначениях предыдущей теоремы, уравнения (1_1) и (1_2) совпадают тогда и только тогда, когда F есть дробно-линейное преобразование.*

Доказательство. Уравнения (1_1) и (1_2) совпадают тогда и только тогда, если можно записать $s = au + bv$, $t = cu + dv$, где a, b, c, d — константы. Тогда и только тогда

$$\frac{s}{t} = \frac{au + bv}{cu + dv} = \frac{a(u/v) + b}{c(u/v) + d},$$

причем условие $ad - bc \neq 0$ вытекает из того, что s и t линейно независимы.

Следствие. *Уравнение (1), имеющее не более чем счетное число классов ненулевых решений, определяется нулями своих решений однозначно. В частности, уравнение (1) с целым коэффициентом Q определяется однозначно нулями своих решений.*

Доказательство. Пусть уравнения (1_1) и (1_2) имеют все решения с одинаковыми нулями и пусть (1_1) имеет не более чем счетное число классов ненулевых решений. По лемме 5 область H_1 представляет собой расширенную плоскость с исключенным из нее не более чем счетным множеством. Но тогда по лемме 1 F есть дробно-линейное преобразование, поэтому уравнения (1_1) и (1_2) совпадают. Далее уравнение (1) с целым коэффициентом $Q(x) \not\equiv 0$ имеет не более чем два класса ненулевых решений ([1], стр. 233), и уравнение $y'' = 0$ ровно один класс ненулевых решений.

Видно теперь, что если уравнение (1) имеет „мало" (например, не более чем счетное число) классов ненулевых решений, то оно определяется нулями своих решений однозначно. Если у него несчетное число классов ненулевых решений, то может так и не быть. Прежде всего, легко получается, что два уравнения типа (1), определенные в одной и той-же области T, все решения которых имеют не более одного нуля, имеют все решения с одинаковыми нулями. Другой группой уравнений, которые не определяются нулями своих решений однозначно, являются уравнения, обладающие свойством А. Здесь выясняется связь этой части работы с предыдущей.

Теорема 11. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* А. *Тогда уравнение* (1) *и уравнение*

$$y = \left[Q - \left\{\int Q \, \mathrm{d}x, x\right\}\right] y \tag{11}$$

имеют все решения с одинаковыми нулями. При этом уравнения (1) *и* (11) *совпадают тогда и только тогда, когда* $Q(x) = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что уравнение (11) определено во всей области T, так как в этой области по лемме 8 функция Q отлична от нуля. Далее для каждого интеграла u уравнения (1) существует решение v того-же уравнения такое, что u, v' имеют одинаковые нули. Из доказательства леммы 7 вытекает, что функция $v' = s$ является решением уравнения (10). Пусть снова t есть интеграл уравнения (10). Он является, очевидно, производной некоторого решения w уравнения (1). По свойству А существует решение z уравнения (1), имеющее те-же нули, как и t; тогда уравнения (1) и (10) имеют все решения с одинаковыми нулями. То-же имеет место для уравнений (1) и (11), так как последнее есть нормальный вид уравнения (10), и из доказательства леммы 7 знаем, что каждое его решение получим из решения уравнения (10) умножением на отличную от нуля функцию $1/\sqrt{Q}$, голоморфную в T.

Покажем еще, когда совпадают уравнения (1) и (11). Это будет тогда и только тогда, когда $\{\int Q \, \mathrm{d}x, x\} \equiv 0$ в области T, т. е. когда $\int Q \, \mathrm{d}x$ является решением уравнения (15). При доказательстве теоремы 2 мы показали, что в таком случае $Q(x) \equiv \mathrm{const} \neq 0$. И наоборот, для уравнения с постоянным отличным от нуля коэффициентом, очевидно, $\{\int Q \, \mathrm{d}x, x\} \equiv 0$. Этим доказана вторая часть теоремы.

Между интегралами двух уравнений (1_1) и (1_2), имеющих все решения с одинаковыми нулями, существует взаимно-однозначное соответствие, которое каждому решению одного из них сопоставляет решение второго уравнения с теми-же нулями. Представляет интерес вопрос, когда это отображение будет проективным, т. е. если u, v образуют фундаментальную систему решений уравнения (1_1) и u соответствует s и v соответствует t, когда решению $c_1 u + c_2 v$ соответствует решение $c_1 s + c_2 t$ уравнения (1_2). Ответ на этот вопрос дает теорема 12.

Теорема 12. *Пусть уравнения* (1_1) *и* (1_2) *имеют все решения с одинаковыми нулями. Тогда отображение* G *множества интегралов уравнения* (1_1) *на множество интегралов уравнения* (1_2), *при котором сопоставлены друг другу решения с теми-же нулями, проективно тогда и только тогда, если уравнения* (1_1) *и* (1_2) *совпадают.*

Доказательство. Пусть u, v — фундаментальная система решений уравнения (1_1) и пусть $s = G(u)$, $t = G(v)$. Тогда, очевидно, s, t линейно независимы. Рассмотрим равенство (41). Если отображение G проективно, то функции $c_1 u + c_2 v$ и $c_1 s + c_2 t$ имеют одинаковые нули. Но нули этих функций являются $-c_2/c_1-$ точками функций u/v, s/t (если $c_1 = 0$, то их полюсами). Поэтому $F(-c_2/c_1) = -c_2/c_1$ и F тождественное преобразование. Тогда по лемме 10 уравнения (1_1) и (1_2) совпадают, ч. т. д. Обратное утверждение очевидно.

Литература

[1] *V. Šeda*: O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y'' = Q(z)\,y$, $Q(z) \not\equiv 0$ je celá funkcia. Acta F. R. N. Univ. Comen. *IV*-3-5, Mathem., 1959, 223—253.

[2] *S. Saks*, *A. Zygmund*: Analytic Functions. Warszawa-Wroclaw 1952.

[3] *Г. М. Голузин:* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва-Ленинград, 1952.

[4] *L. R. Ford*: Automorphic Functions. New York 1951.

[5] *V. Šeda*: O pojme inverznej analytickej funkcie. Mat.-fyz. Čas. Slovensk. akad. vied (в печати).

[6] *Z. Nehari*: Univalent functions and linear differential equations. Lectures on Functions of a Complex Variable. Ann. Arbor 1955.

[7] *O. Borůvka*: Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre. Bull. math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., T. *1*, *49*, No 2, 1957, 125—130.

[8] *V. Šeda*: Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu v komplexnom obore. Acta F. R. N. Univ. Comen. *II*-5-6, Mathem., 1957, 229—254.

[9] *Р. Беллман:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва 1954.

[10] *L. Bieberbach*: Lehrbuch der Funktionentheorie. B. I, Leipzig u. Berlin 1934.

Výťah

NIEKOĽKO VIET O LINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICI DRUHÉHO RÁDU JACOBIHO TYPU V KOMPLEXNOM OBORE

V. ŠEDA, Bratislava

Diferenciálna rovnica

$$y'' = ky\,, \quad k \neq 0 \text{ je konštanta}\,, \tag{1'}$$

má túto vlastnosť (ktorú budeme nazývať vlastnosťou A): Ku každému jej netriviálnemu riešeniu u jestvuje lineárne nezávislé riešenie v tejto rovnice tak, že funkcie u, v', ako aj u', v, majú rovnaké nulové body s tou istou násobnosťou. V práci sa rieši otázka, či je to jediná rovnica tvaru

$$y'' = Q(x)\,y\,, \tag{1}$$

kde $Q(x)$ je holomorfná funkcia v jednoducho súvislej oblasti T ($\infty \notin T$), ktorá má vlastnosť A.

Pomocou vzťahu medzi nulovými bodmi riešení $c_1u + c_2v$ rovnice (1), resp. ich derivácie $c_1u' + c_2v'$, a rozdelením hodnôt funkcie u/v, resp. u'/v', je dokázaná veta 1, ktorá udáva nutnú a postačujúcu podmienku, aby rovnica (1) mala vlastnosť A. Z nej potom vyplýva, že zo všetkých rovníc (1) s celým koeficientom má rovnica (1') a len táto rovnica vlastnosť A. Toto vo všeobecnosti neplatí, ako je to ukázané na príkladoch rovnice

$$y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^2}\,y\,, \tag{18}$$

definovanej v kvadrante $0 < \operatorname{Re} x < \infty$, $0 < \operatorname{Im} x < \infty$ a rovnice

$$y'' = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x - \tfrac{3}{16}\operatorname{cotg}^2 x\right) y\,, \tag{29}$$

definovanej v páse $a < \operatorname{Im} x < b$, $0 < a < b$, ktoré obe majú vlastnosť A.

Ďalej sa uvažuje v práci o tom, či je nulovými bodmi svojich riešení diferenciálna rovnica (1) jednoznačne určená. Je ukázané, že ak má rovnica (1) najviac spočetne mnoho tried riešení, ktoré nemajú ani jeden nulový bod (takou je každá rovnica (1) s celým koeficientom), je jednoznačne určená. Ak má však nespočetne mnoho tried riešení bez nulových bodov, nemusí byť jednoznačne určená. Rovnica (1) s vlastnosťou A, rôzna od rovnice (1'), nie je nulovými bodmi svojich riešení jednoznačne určená.

Zusammenfassung

EINIGE SÄTZE ÜBER DIE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG VOM TYPUS JACOBI IM KOMPLEXEN GEBIET

V. Šeda, Bratislava

Die Differentialgleichung

$$(1') \qquad y'' = ky\,, \quad k \neq 0 \text{ ist eine Konstante}\,,$$

hat diese Eigenschaft (welcher wir als die Eigenschaft A bezeichnen werden): Zu jeder ihrer nichttrivialen Lösung u existiert eine linear unabhängige Lösung v dieser Gleichung derart, dass die Funktionen u, v' sowie u', v die gleichen Nullstellen mit derselben Vielfachheit haben. In der Arbeit wird die Frage gelöst, ob (1′) die einzige Gleichung von Typus

$$(1) \qquad y'' = Q(x)\, y$$

ist, wo $Q(x)$ eine holomorphe Funktion in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $T(\infty \notin T)$ darstellt, welche die Eigenschaft A besitzt.

Mit Hilfe der Beziehung zwischen den Nullstellen der Lösungen $c_1u + c_2v$ der Gleichung (1), bzw. ihrer Ableitungen $c_1u' + c_2v'$, und der Wertverteilung der Funktion u/v, bzw. u'/v', ist der Satz 1 bewiesen, welcher die notwendige und hinreichende Bedingung dazu angibt, dass die Gleichung (1) die Eigenschaft A habe. Aus diesem Satze folgt, dass die Gleichung (1′) und nur diese Gleichung von allen Gleichungen (1) mit einem ganzen Koeffizienten die Eigenschaft A besitzt. Dies ist im allgemeinen ungültig, was an den Beispielen der Gleichung

$$(18) \qquad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{x^2}\, y\,,$$

welche im Quadranten $0 < \operatorname{Re} x < \infty$, $0 < \operatorname{Im} x < \infty$, definiert ist, und der Gleichung

$$(29) \qquad y'' = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 x - \tfrac{3}{16}\operatorname{cotg}^2 x\right) y\,,$$

die im Streifen $a < \operatorname{Im} x < b$, $0 < a < b$, definiert ist, welche beide die Eigenschaft A besitzen, gezeigt werden kann.

Weiter wird in der Arbeit die Frage betrachtet, ob die Differentialgleichung (1) durch die Nullstellen ihrer Lösungen eindeutig bestimmt ist. Es wird gezeigt, dass wenn die Gleichung (1) höchstens eine abzählbare Menge von Klassen der Lösungen ohne Nullstellen hat (diese Eigenschaft hat jede Gleichung (1) mit einem ganzen Koeffizienten), so ist dieselbe eindeutig bestimmt. Wenn jedoch die Gleichung (1) eine unabzählbare Menge von Klassen der Lösungen ohne Nullstellen hat, so braucht nicht dieselbe eindeutig bestimmt sein. Die Gleichung (1) mit der Eigenschaft A, welche von der Gleichung (1′) verschieden ist, ist durch die Nullstellen ihrer Lösungen nicht eindeutig bestimmt.