ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Najděte konvergentní řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ takové, že $\lim_{n\to\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) = 0$, ale řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$ nekonverguje.

Poznámka: Tuto úlohu klade nepřímo vlastně již G. H. HARDY na konci § 11 své práce The multiplication of conditionally convergent series, Proc. London Math. Soc. (2) *6* (1908), 410—423, když podotýká, že konstrukce řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ s požadovanými vlastnostmi není příliš zřejmá a žádný příklad takových řad neuvádí. Úloha nebyla, jak se zdá, vyřešena doposud.

František Štěpánek, Praha

Řešení úlohy č. 2. (autor *Jan Mařík*) z roč. *81* (1956), str. 247. (Elementární důkaz věty o substituci pro Riemannův integrál)

J. MAŘÍK předložil v Časopise pro pěstování matematiky roč. *81* (1956), str. 247 následující úlohu:

Úloha. Dokažte elementárními prostředky, že platí tato věta:

Nechť funkce f má (vlastní) Riemannův integrál v intervalu $\langle c, d\rangle$. *Nechť funkce* φ *má spojitou derivaci v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť* $c \leqq \varphi(t) \leqq d$ *pro každé* $t \in \langle a, b\rangle$. *Potom existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *a rovná se* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka: Důkaz lze provést dosti jednoduše pomocí některých ne zcela triviálních vět z teorie reálných funkcí.

Poměrně nedávno dokázal H. KESTELMAN v práci [3] následující obecnější větu o substituci pro Riemannův integrál.

Věta 1. *Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Zvolme* $s \in \langle a, b\rangle$ *pevně a položme* $G(t) = \int_s^t g(w)\,\mathrm{d}w$ *pro všechna* $t \in \langle a, b\rangle$. *Nechť funkce f má Riemannův integrál v intervalu* $G(\langle a, b\rangle) = E[G(t);\ t \in \langle a, b\rangle]$. *Potom existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f(G(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *a rovná se* $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Přitom H. Kestelman při důkazu této věty užil z teorie Lebesqueova integrálu pouze pojmu množiny míry nula.

Vzápětí na to však ROY O. DAVIES v práci [1] ukázal, užívaje základních myšlenek práce [3], že větu 1 lze dokázat zcela elementárně jen s použitím aparátu teorie

Riemannova integrálu. Provedeme si zde nyní elementární důkaz věty 1 a to v podstatě tak, jak je uveden v práci [1]. V některých místech však originální důkaz Roy O. Daviese poněkud zpřesníme a naznačené úvahy provedeme podrobně.

Úmluva. Základních pojmů z teorie Riemannova integrálu užíváme (včetně označení) tak jako ve [2]. Je-li z funkce omezená v intervalu I, pak číslo $\sup_{x\in I} z(x) - \inf_{x\in I} z(x)$ nazýváme oscilací funkce z v intervalu I a značíme je $\operatorname{osc}[z, I]$ resp. i jen krátce $\operatorname{osc}[z]$, vysvětlíme-li blíže slovy, o který interval se jedná. Slova „integrace", „integrál" a p. pak v dalším značí výhradně „Riemannovu integraci", „Riemannův integrál" a p. Přitom předpokládáme, že integrál je definován t. zv. součtovou definicí. (Viz [2], str. 35.)

Při důkazu věty 1 užijeme následujících dvou kriterií pro existenci integrálu.

Věta A. *Budiž funkce u definována v $\langle\alpha, \beta\rangle$, budiž C (reálné) číslo. Potom u má integrál od α do β rovný C právě tehdy, když k libovolnému $\eta > 0$ existují čísla $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta$ taková, že pro každou volbu hodnot $\zeta_j \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ je*

$$\left|C - \sum_{j=1}^{n} u(\zeta_j)(x_j - x_{j-1})\right| < \eta\,.$$

Věta B. (Srov. [4], str. 217–218.) *Budiž v funkce omezená v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom v má integrál od α do β právě když k libovolným číslům $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ existuje rozdělení D intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, takové, že součet délek všech intervalů rozdělení D, v kterých* $\operatorname{osc}[v] > \eta_1$, *je menší než η_2.*

Důkaz věty 1. Položme $M = \max\left(\sup_{x\in G(\langle a,b\rangle)} |f(x)|, \sup_{t\in\langle a,b\rangle} |g(t)|\right)$. Budiž dále $\omega > 0$. Položme ještě $\varepsilon = \omega(4M^2 + 6(b-a)M)^{-1}$.

Jelikož funkce g má integrál od a do b, existuje k číslu ε dle věty B $(\eta_1 = \eta_2 = \varepsilon)$ rozdělení $\bar{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že součet délek všech intervalů rozdělení $\bar{D}$, v kterých $\operatorname{osc}[g] > \varepsilon$, je menší než ε. Tyto intervaly rozdělení $\bar{D}$ nazveme intervaly typu 1. Zbývající intervaly rozdělení $\bar{D}$ (tj. ty, v kterých $\operatorname{osc}[g] \leqq \varepsilon$) jsou dvojího druhu:

1) Intervaly, ve kterých pro jisté t je $|g(t)| < \varepsilon$. Tyto intervaly nazveme intervaly typu 2. V každém intervalu typu 2 je pak zřejmě pro všechna t z tohoto intervalu $|g(t)| < 2\varepsilon$.

2) Intervaly, ve kterých je všude $|g(t)| \geqq \varepsilon$. Tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.

V případě, že množina všech intervalů typu 3 je neprázdná, označíme písmenem N počet prvků této množiny. V tomto případě pak budeme intervaly typu 3 dále dělit. Vezměme proto jeden z intervalů typu 3, budiž to např. interval $\langle s_1, s_2\rangle$. Potom v intervalu $\langle s_1, s_2\rangle$ platí, že buďto je v něm všude $g(t) \geqq \varepsilon$ nebo všude $g(t) \leqq -\varepsilon$.

Předpokládejme např., že $g(t) \geqq \varepsilon$ pro všechna $t \in \langle s_1, s_2 \rangle$. (V druhém případě bychom totiž postupovali zcela analogicky.) Potom dostáváme pro libovolná t', t'', pro která platí $s_1 \leqq t' < t'' \leqq s_2$, že

$$(1) \qquad \frac{G(t'') - G(t')}{t'' - t'} \geqq \varepsilon .$$

Jelikož f je integrabilní v intervalu $G(\langle s_1, s_2 \rangle)$, existuje dle věty B ($\eta_1 = \varepsilon$, $\eta_2 = \varepsilon^2 N^{-1}$) rozdělení D' intervalu $G(\langle s_1, s_2 \rangle)$ takové, že součet délek všech intervalů rozdělení D', ve kterých osc $[f] > \varepsilon$, je menší než $\varepsilon^2 N^{-1}$. Jelikož, dle (1), funkce G je rostoucí v $\langle s_1, s_2 \rangle$, jsou intervaly rozdělení D' tvaru $\langle G(\tau_{j-1}), G(\tau_j) \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, l$, kde $s_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = s_2$. Položíme-li nyní ještě pro jednoduchost $h(t) = f(G(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$, dostáváme tedy, že osc $[f]$ v intervalu $\langle G(\tau_{j-1}), G(\tau_j) \rangle$ je rovna osc $[h]$ v intervalu $\langle \tau_{j-1}, \tau_j \rangle$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, l$.

Intervaly $\langle \tau_{j-1}, \tau_j \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, l$ jsou opět dvojího druhu:

a) Intervaly, ve kterých osc $[h] > \varepsilon$; tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.1. Podle (1) je součet délek všech intervalů typu 3.1 menší než $\varepsilon^{-1} \varepsilon^2 N^{-1} = \varepsilon N^{-1}$.

b) Intervaly, ve kterých osc $[h] \leqq \varepsilon$; tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.2.

Rozdělíme-li tedy ještě každý z intervalů typu 3 právě popsaným způsobem, obdržíme tak celkem jisté rozdělení D^* intervalu $\langle a, b \rangle$, jež se skládá ze všech intervalů typu 1, 2, 3.1 a 3.2. Nechť toto rozdělení D^* má dělicí body $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Všimněme si ještě, že součet délek všech intervalů typu 1 a 3.1 z rozdělení D^* je menší než $\varepsilon + N\varepsilon N^{-1} = 2\varepsilon$.

Celkem snadno dále zjistíme, že

$$(2) \quad \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} [G(t_i) - G(t_{i-1})]\,\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\,\lambda_i \mu_i ,$$

kde $\lambda_i \in \langle \inf_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} h(t), \sup_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} h(t) \rangle$, $\mu_i \in \langle \inf_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t), \sup_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t) \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Buďte nyní $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ libovolná čísla taková, že $t_{i-1} \leqq \xi_i \leqq t_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom jest dle (2)

$$(3) \quad \left| \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\, h(\xi_i)\, g(\xi_i) \right| \leqq \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \left| \lambda_i \mu_i - h(\xi_i)\, g(\xi_i) \right| .$$

Nyní budeme odhadovat velikost součtu na pravé straně nerovnosti (3).

Součet délek všech intervalů typu 1 a 3.1 rozdělení D^* je, jak už bylo řečeno, menší než 2ε a tudíž celkový příspěvek těchto intervalů v právě zmíněném součtu je menší než $2\varepsilon \,.\, 2M^2$.

V každém intervalu typu 2 rozdělení D^* jest $|g(t)| < 2\varepsilon$ pro všechna t z tohoto intervalu a tudíž i $|\mu_i| \leqq 2\varepsilon$ pro příslušná i. Tedy celkový příspěvek intervalů typu 2 do uvažovaného součtu z nerovnosti (3) je nejvýše roven $(b - a)\, 4\varepsilon M$.

Konečně pak v každém z intervalů typu 3.2 rozdělení D^* je osc $[g] \leqq \varepsilon$ a zároveň i osc $[h] \leqq \varepsilon$, takže pro příslušné indexy i máme

$$|\lambda_i \mu_i - h(\xi_i)\, g(\xi_i)| = |\lambda_i[\mu_i - g(\xi_i)] + [\lambda_i - h(\xi_i)]\, g(\xi_i)| \leqq$$
$$\leqq |\lambda_i|\, |\mu_i - g(\xi_i)| + |\lambda_i - h(\xi_i)|\, |g(\xi_i)| \leqq 2\varepsilon M\,.$$

Tedy celkový příspěvek intervalů typu 3.2 v uvažovaném součtu je nejvýše roven $(b - a)\, 2\varepsilon M$.

Shrneme-li nyní výsledky právě provedené úvahy, dostaneme celkem

$$\left| \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m} h(\xi_i)\, g(\xi_i)\, (t_i - t_{i-1}) \right| <$$
$$< 2\varepsilon\,.\, 2M^2 + (b - a)\, 4\varepsilon M + (b - a)\, 2\varepsilon M = 4\varepsilon M^2 + 6(b - a)\, \varepsilon M = \omega\,.$$

Podle věty A tedy zřejmě $\int_a^b h(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$ cbd.

Literatura

[1] *Roy O. Davies:* An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration. Math. Gazette *45* (1961), 23—25.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet I. Praha 1956.

[3] *H. Kestelman:* Change of Variable in Riemann Integration. Math. Gazette *45* (1961), 17—23.

[4] *K. Petr:* Počet integrální. Praha 1931.

František Štěpánek, Praha