Časopis pro pěstování matematiky

František Machala

Über Ordnungsverhältnisse auf affinen Ebenen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 2, 191--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108412`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

ÜBER ORDNUNGSVERHÄLTNISSE AUF AFFINEN EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 4. Dezember 1981)

In den Arbeiten [1] und [2] hat W. Junkers ein Ordnungsverhältnis auf einer affinen Ebene definiert als eine Abbildung der Menge $\mathscr{T}$ aller angeordneten Tripel (O, A, B) kollinearer Punkte mit $O \neq A, B$ in eine Gruppe, wobei zwei zusätzliche Forderungen (T1), (T2) erfüllt sind. In [1] wird bewiesen, daß das Bild $\tau(\mathscr{T})$ von $\mathscr{T}$ wieder eine Gruppe für jedes Ordnungsverhältnis τ ist.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst gezeigt, daß $\tau(\mathscr{T})$ eine Gruppe bildet, wenn $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G}$ den Forderungen (T1) und (T2) genügt, aber $\mathscr{G}$ nur ein Gruppoid ist. Dies bedeutet, daß sich die Gruppe $\mathscr{G}$ in der Definition des Ordnungsverhältnisses $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G}$ in [1] durch ein Gruppoid ersetzen läßt. Mittels eines Koordinatensystems in der affinen Ebene $\mathscr{A}$ lassen sich ein Ternärkörper T und durch T eine multiplikative Loop $\mathscr{R}$ erklären (Ist $\mathscr{A}$ desarguessch, so bildet $\mathscr{R}$ eine Gruppe) (siehe etwa [3]). Zu jedem Ordnungsverhältnis τ auf $\mathscr{A}$ gibt es ein zu τ äquivalentes Ordnungsverhältnis $\sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$, wo $\mathscr{H}$ eine Faktorgruppe von $\mathscr{R}$ ist (Satz 3). Im Abschluß des Artikels sind alle Ordnungsverhältnisse (bis auf Äquivalenz) einer desarguesschen Ebene durch die Normalteiler der Gruppe $\mathscr{R}$ beschrieben.

Vorgegeben sei eine affine Ebene $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ (vgl. etwa [3]). Eine durch ver-

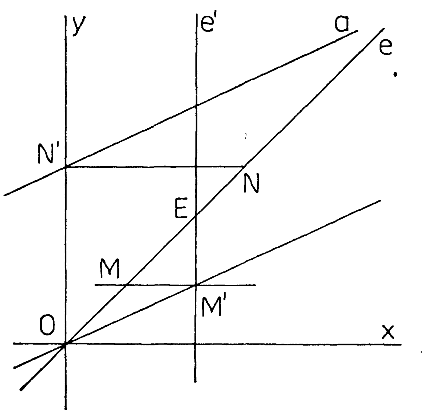

Fig. 1

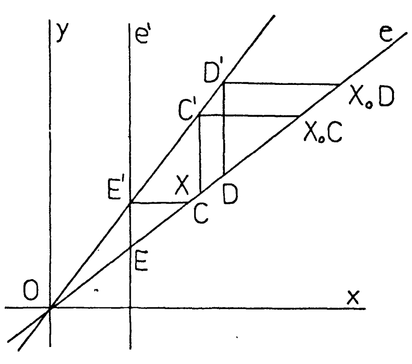

Fig. 2

schiedene Punkte $P, Q \in \mathscr{P}$ bestimmte Gerade $p \in \mathscr{L}$ bezeichnen wir mit $p = PQ$ und mit $P = p \sqcap q$ bezeichnen wir den Schnittpunkt P der Geraden p, q mit $p \nparallel q$. Das Symbol $L(A, a)$ bedeutet eine Parallele zur Geraden a durch einen Punkt A.

Es sei ein Koordinatensystem von $\mathscr{A}$, d.h. ein Tripel (x, y, E) mit $x, y \in \mathscr{L}$, $E \in \mathscr{P}$ und $x \nparallel y$, $E \notin x, y$, gegeben. Wir setzen $O = x \sqcap y$, $e = OE$, $e' = L(E, y)$ und $Q = \{X \mid X \in e\}$ (Fig. 1). Setzen wir $X_1 = L(X, y) \sqcap e$ und $X_2 = L(X, x) \sqcap e$ für einen Punkt X, dann ist $X \to (X_1, X_2)$ eine bijektive Abbildung von $\mathscr{P}$ auf $Q \times Q$ und es läßt sich $X := [X_1, X_2]$ schreiben. Konstruieren wir zu einer Geraden a mit $a \nparallel y$ die Punkte $N' = a \sqcap y$, $N = L(N', x) \sqcap e$, $M' = L(O, a) \sqcap e'$, $M = L(M', x) \sqcap e$ (Fig. 1), dann ist $a \to (M, N)$ eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{L}_1 = \{p \in \mathscr{L} \mid p \nparallel y\}$ auf $Q \times Q$ und es läßt sich $a := \langle M, N \rangle$ schreiben. Setzen wir $X_2 = t(M, X_1, N) \Leftrightarrow [X_1, X_2] \in \langle M, N \rangle$ für $(M, X_1, N) \in Q \times Q \times Q$, dann ist t eine ternäre Operation auf Q und das Paar $T = (Q, t)$ heißt ein Ternärkörper [3]. Definieren wir eine binäre Operation $\circ$ auf der Menge $R = Q \setminus \{O\}$ durch die Vorschrift $A \circ B = t(A, B, O)$ $\forall A, B \in R$, dann gilt $[B, A \circ B] \in \langle A, O \rangle$ und nach Vorangehendem erhalten wir $A' = L(A, x) \sqcap e'$, $\langle A, O \rangle = OA'$, $B' = L(B, y) \sqcap OA'$, $A \circ B = L(B', x) \sqcap e$ (Fig. 2). Nach [3] bildet $\mathscr{R} = (R, \circ)$ eine Loop mit Einselement E.

Definition 1. *$\mathscr{T}$ sei die Menge aller geordneten Tripel (O, A, B) kollinearer Punkte O, A, B mit $O \neq A, B$ und $\mathscr{G} = (G, \cdot)$ sei ein Gruppoid. Unter einem Ordnungsverhältnis (auf $\mathscr{A}$ in bezug auf $\mathscr{G}$) verstehen wir eine Abbildung $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G}$, für welche folgendes gilt:*

(T1) *Für je vier kollineare Punkte O, A, B, C mit $O \neq A, B, C$ gilt $\tau(O, A, B) \cdot \tau(O, B, C) = \tau(O, A, C)$.*

(T2) *Gehen drei kollineare Punkte O, A, B mit $O \neq A, B$ durch eine Parallelprojektion in Punkte O', A', B' über, so gilt $\tau(O, A, B) = \tau(O', A', B')$.*

Satz 1. *Es seien O, A zwei verschiedene Punkte von $\mathscr{A}$ und sei (P, M, N) aus $\mathscr{T}$. Auf der Geraden OA gibt es einen Punkt B, so daß $\tau(P, M, N) = \tau(O, A, B)$ für jedes Ordnungsverhältnis τ auf $\mathscr{A}$ gilt.*

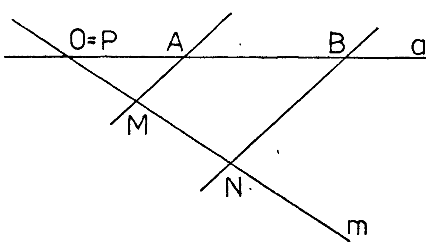

Fig. 3

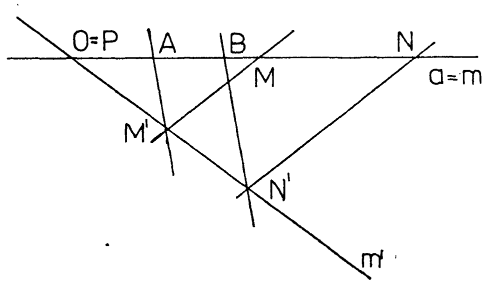

Fig. 4

Beweis. Wir setzen $a = OA$ und $m = PM$.

1. Es sei $P = O$.

a) Wir nehmen $m \nparallel a$ an. Setzen wir $B = L(N, AM) \sqcap a$, dann nach (T2) gilt $\tau(P, M, N) = \tau(O, A, B)$ für jedes Ordnungsverhältnis τ auf $\mathscr{A}$ (Fig. 3).

b) Wir nehmen $m = a$ an. Durch den Punkt O führen wir eine Gerade m' mit $m' \nparallel a$ und auf m' wählen wir einen Punkt M' mit $M' \neq O$ (Fig. 4). Setzen wir $N' = L(N, MM') \sqcap m'$, $B = L(N', AM') \sqcap a$, dann ist $\tau(P, M, N) = \tau(O, M', N') = \tau(O, A, B)$.

2. Es sei $P \neq O$.

a) Wir nehmen $O \notin m$ an. Durch O führen wir eine Gerade m' mit $m' \nparallel OP, a$ und setzen wir $M' = L(M, OP) \sqcap m'$, $N' = L(N, OP) \sqcap m'$ (Fig. 5). Dann ist $\tau(P, M, N) = \tau(O, M', N')$ und nach 1a) erklären wir den Punkt B, so daß $\tau(O, M', N') = \tau(O, A, B)$ gilt.

b) Wir nehmen $O \in m$ an. Durch P führen wir eine Gerade m' mit $m' \nparallel m$ und auf m' wählen wir einen Punkt M' mit $M' \neq P$. Setzen wir $N' = L(N, MM') \sqcap m'$, dann ist $\tau(P, M, N) = \tau(P, M', N')$ und nach 2a) bestimmen wir einen Punkt $B \in a$ mit $\tau(P, M', N') = \tau(O, A, B)$.

Bemerkung 1. τ sei ein Ordnungsverhältnis auf $\mathscr{A}$. Setzen wir $\tau(\mathscr{T}) = \{\tau(P, M, N) \mid (P, M, N) \in \mathscr{T}\}$ und $\mathscr{T}_{OA} = \{(O, A, B) \in \mathscr{T} \mid B \in OA\}$, $\tau(\mathscr{T}_{OA}) = \{\tau(O, A, B) \mid (O, A, B) \in \mathscr{T}_{OA}\}$ für zwei verschiedene Punkte O, A, dann gilt $\tau(\mathscr{T}_{OA}) = \tau(\mathscr{T})$.

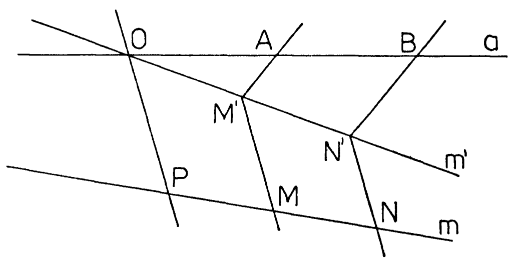

Fig. 5

Satz 2. *Ist $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G} = (G, \cdot)$ ein Ordnungsverhältnis auf $\mathscr{A}$, dann ist $(\tau(\mathscr{T}), \cdot)$ eine Gruppe.*

Beweis. Wir wählen zwei verschiedene Punkte O, A und setzen $a = OA$.

1. $(\tau(T), \cdot)$ ist ein Gruppoid: Es seien $\alpha, \beta \in \tau(\mathscr{T})$. Nach Bemerkung 1 gibt es Punkte B, C auf a mit $\alpha = \tau(O, A, B)$, $\beta = \tau(O, A, C)$. Zugleich gibt es nach Satz 1 einen Punkt D auf $a = OA = OB$ mit $\tau(O, A, C) = \tau(O, B, D)$. Dann ist $\alpha\beta = \tau(O, A, B)\, \tau(O, B, D) = \tau(O, A, D) \in \tau(\mathscr{T})$.

2. In $(\tau(\mathscr{T}), \cdot)$ gibt es ein Einselement 1 mit $\tau(P, X, X) = 1$ für je zwei verschiedene Punkte P, X: Es seien $P \neq X$. Erklären wir einen Punkt $B \in a$ mit $\tau(P, X, X) = \tau(O, A, B)$ nach der Konstruktion aus dem Satz 1, so ist $A = B$. Es genügt also $\tau(O, A, A) = 1$ zu beweisen. Für $\alpha \in \tau(\mathscr{T})$ gibt es einen $B \in a$ mit $\alpha = \tau(O, A, B)$ und wegen $\tau(O, A, A) = \tau(O, B, B)$ erhalten wir $\alpha\, \tau(O, A, A) = \tau(O, A, B)\, \tau(O, A, A) = \tau(O, A, B)\, \tau(O, B, B) = \tau(O, A, B) = \alpha, \tau(O, A, A)\, \alpha = \tau(O, A, A) \cdot \tau(O, A, B) = \tau(O, A, B) = \alpha$. Hieraus folgt, daß $\tau(O, A, A)$ das Einselement 1 von $(\tau(\mathscr{T}), \cdot)$ ist.

3. Es sei $\tau(P, M, N) \in \tau(\mathscr{T})$. Nach (T1) gilt $\tau(P, M, N) \cdot \tau(P, N, M) = \tau(P, M, M) = 1$ und $\tau(P, N, M)\, \tau(P, M, N) = \tau(P, N, N) = 1$. Somit ist $\tau(P, N, M)$ ein inverses Element zu $\tau(P, M, N)$.

4. Das Gruppoid $(\tau(\mathscr{T}), \cdot)$ is assoziativ: Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \tau(\mathscr{T})$. Nach Bemerkung 1 gibt es $B, C, D \in a$ mit $\alpha = \tau(O, A, B)$, $\beta = \tau(O, A, C)$, $\gamma = \tau(O, A, D)$ (Fig. 6).

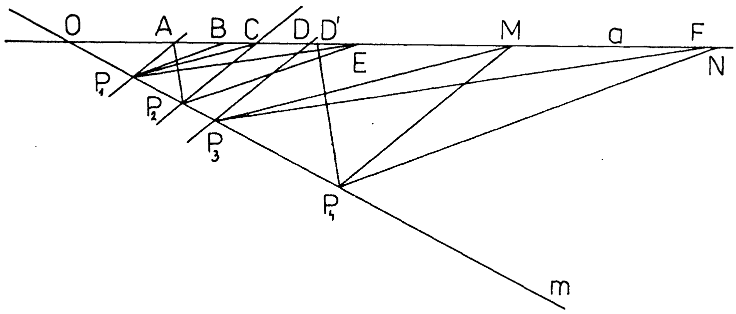

Fig. 6

Durch O führen wir eine Gerade m mit $m \neq a$ und auf m wählen wir zwei von O verschiedene Punkte P_1, P_2 mit

(1) $$AP_1 \parallel CP_2 .$$

Wir setzen $E = L(P_2, P_1B) \sqcap a$, also

(2) $$P_1B \parallel P_2E .$$

Nach (T2) erhalten wir $\tau(O, A, C) = \tau(O, P_1, P_2) = \tau(O, B, E)$ und folglich $\alpha\beta = \tau(O, A, B)\, \tau(O, A, C) = \tau(O, A, B)\, \tau(O, B, E) = \tau(O, A, E)$. Ferner sei $P_3 = L(D, AP_1) \sqcap m$, $F = L(P_3, P_1E) \sqcap a$, also

(3) $$AP_1 \parallel DP_3 ,$$

(4) $$P_1E \parallel P_3F .$$

Dann ist $\tau(O, A, D) = \tau(O, P_1, P_3) = \tau(O, E, F)$ und $(\alpha\beta)\gamma = \tau(O, A, E)\, \tau(O, A, D) = \tau(O, A, E)\, \tau(O, E, F) = \tau(O, A, F)$. Setzen wir $M = L(P_3, P_1C) \sqcap a$, dann gilt

(5) $$P_1C \parallel P_3M$$

und $\tau(O, A, D) = \tau(O, P_1, P_3) = \tau(O, C, M)$, also $\beta\gamma = \tau(O, A, C)\,\tau(O, A, D) = = \tau(O, A, C)\,\tau(O, C, M) = \tau(O, A, M)$. Schließlich setzen wir $P_4 = L(M, AP_1) \sqcap m$ und $N = L(P_4, P_1B) \sqcap a$, also

$$AP_1 \parallel MP_4\,, \tag{6}$$

$$P_1B \parallel P_4N\,. \tag{7}$$

So erhalten wir $\tau(O, A, M) = \tau(O, P_1, P_4) = \tau(O, B, N)$ und $\alpha(\beta\gamma) = \tau(O, A, B)\,.\,\tau(O, A, M) = \tau(O, A, B)\,\tau(O, B, N) = \tau(O, A, N)$.

Wir wollen $(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, also $\tau(O, A, F) = \tau(O, A, N)$ beweisen. Nach (3) ist $\tau(O, A, D) = \tau(O, P_1, P_3)$, nach (5) ist $\tau(O, C, M) = \tau(O, P_1, P_3)$ und (1), (6) implizieren $\tau(O, C, M) = \tau(O, P_2, P_4)$. Setzen wir $D' = L(P_4, AP_2) \sqcap a$, dann gilt $\tau(O, A, D') = \tau(O, P_2, P_4)$, woraus wir $\tau(O, A, D) = \tau(O, C, M)$, $\tau(O, A, D') = = \tau(O, C, M)$ und $\tau(O, A, D) = \tau(O, A, D')$ erhalten. Nach (4) ist $\tau(O, E, F) = = \tau(O, P_1, P_3)$ und aus (7), (2) folgt $P_2E \parallel P_4N$, was $\tau(O, E, N) = \tau(O, P_2, P_4)$ bedeutet. Wegen $\tau(O, A, D) = \tau(O, A, D')$ gilt $\tau(O, P_1, P_3) = \tau(O, P_2, P_4)$ und $\tau(O, E, F) = \tau(O, E, N)$.

Definition 2. *Zwei Ordnungsverhältnisse $\tau_1 : \mathscr{T} \to \mathscr{N}_1$, $\tau_2 : \mathscr{T} \to \mathscr{N}_2$ auf $\mathscr{A}$ sind äquivalent, falls es ein Isomorphismus ξ der Gruppen $\tau_1(\mathscr{T}), \tau_2(\mathscr{T})$ gibt, daß $\tau_2 = \xi\tau_1$, also $\tau_2(O, A, B) = \xi\tau_1(O, A, B)$, für alle $(O, A, B) \in \mathscr{T}$ gilt.*

Satz 3. *Es seien $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G} = (G, \cdot)$ ein Ordnungsverhältnis auf $\mathscr{A}$ und $\mathscr{R} = = (R, \circ)$ eine zu einem Koordinatensystem (x, y, E) von $\mathscr{A}$ gehörige Loop. Eine durch die Vorschrift $C \sim D(\varrho) :\Leftrightarrow \tau(O, C, D) = 1$ definierte Relation ϱ auf der Menge $\mathscr{R}$ ist eine Kongruenz von $\mathscr{R}$. Die Faktorstruktur $\mathscr{H} = (R/\varrho, \cdot)$ ist eine Gruppe und es gibt ein zu τ äquivalentes Ordnungsverhältnis $\sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$ auf $\mathscr{A}$.*

Beweis. $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{G} = (G, \cdot)$ sei ein Ordnungsverhältnis auf $\mathscr{A}$ und $\mathscr{J} = (\tau(\mathscr{T}), \cdot)$ sei die zu τ gehörige Gruppe.

Zunächst beweisen wir, daß ϱ eine Äquivalenzrelation auf R ist: Wegen $\tau(O, C, C) = 1$ gilt $C \sim C$ für jeden Punkt $C \in R$. Aus $C \sim D$ folgt $\tau(O, C, D)\,.\,\tau(O, D, C) = \tau(O, D, C) = \tau(O, C, C) = 1$, was $D \sim C$ bedeutet. Es sei $C \sim D$ und $D \sim F$, also $\tau(O, C, D) = \tau(O, D, F) = 1$. Nach (T1) ist $\tau(O, C, D)\,\tau(O, D, F) = = \tau(O, C, F) = 1$, also $C \sim F$.

Ist A ein Punkt von R, dann sind die nachstehenden Äquivalezen erfüllt: $C \sim D \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tau(O, C, D) = 1 \Leftrightarrow \tau(O, C, A)\,\tau(O, A, D) = 1 \Leftrightarrow \tau(O, A. C)\,\tau(O, C, A)\,\tau(O, A, D) = = \tau(O, A, C) \Leftrightarrow \tau(O, A, A)\,\tau(O, A, D) = \tau(O, A, C) \Leftrightarrow \tau(O, A, D) = \tau(O, A, C)$. Somit gilt

$$C \sim D \Leftrightarrow \tau(O, A, C) = \tau(O, A, D)\,. \tag{$*$}$$

ϱ ist eine Kongruenz auf der Loop $\mathscr{R} = (R, \circ)$, d.h. aus $C \sim D$ folt $X \circ C \sim X \circ D$ und $C \circ X \sim D \circ X$ für jeden Punkt $X \in R$: Es seien also $C, D \in R$ mit $C \sim D$ und X

sei ein beliebiger Punkt von R. Die Punkte $X \circ C = t(X, C, O)$, $X \circ D = t(X, D, O)$ erklären wir nach Fig. 2 folgendermaßen: $E' = L(X, x) \sqcap e'$, $C' = L(C, y) \sqcap OE'$, $D' = L(D, y) \sqcap OE'$, $X \circ C = L(C', x) \sqcap e$, $X \circ D = L(D', x) \sqcap e$ (Fig. 7). Nach (T2) gilt $\tau(O, E, C) = \tau(O, E', C') = \tau(O, X, X \circ C)$, $\tau(O, E, D) = \tau(O, E', D') = \tau(O, X, X \circ D)$, woraus $\tau(O, X, X \circ C) = \tau(O, X, X \circ D)$ und $\tau(O, X \circ C, X \circ D) = \tau(O, X \circ C, X)\, \tau(O, X, X \circ D) = \tau(O, X \circ C, X)\, \tau(O, X, X \circ C) = \tau(O, X \circ C, X \circ C) = 1$ folgt. Dies bedeutet aber $X \circ C \sim X \circ D$. Die Punkte $C \circ X = t(C, X, O)$, $D \circ X = t(D, X, O)$ erklären wir folgendermaßen: $E' = L(C, x) \sqcap e'$, $E'' = L(D, x) \sqcap e'$, $X' = L(X, y) \sqcap OE'$, $X'' = L(X, y) \sqcap OE''$, $C \circ X = L(X', x) \sqcap e$, $D \circ X = L(X'', x) \sqcap e$ (Fig. 8). Nach (T2) gilt $\tau(O, E, X) =$

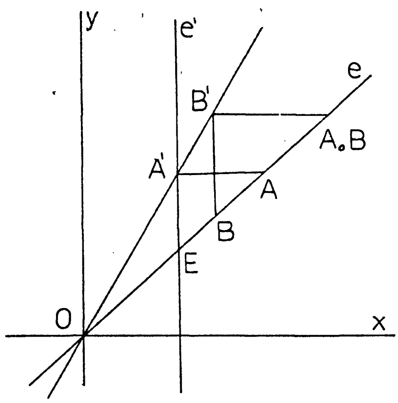

Fig. 7

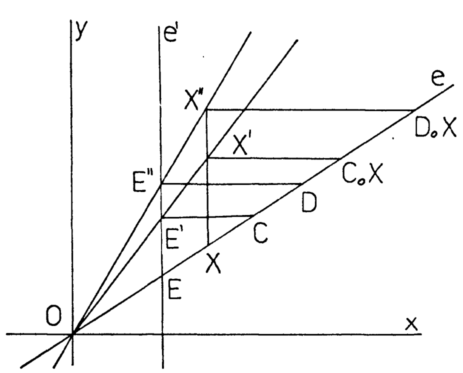

Fig. 8

$= \tau(O, E', X') = \tau(O, C, C \circ X) = \tau(O, E'', X'') = \tau(O, D, D \circ X)$ und nach (T1) erhält man $\tau(O, C, C \circ X) = \tau(O, C, E)\, \tau(O, E, C \circ X) = \tau(O, D, D \circ X)$. Wegen $\tau(O, E, C)\, \tau(O, C, E) = 1$ ist $\tau(O, E, C \circ X) = \tau(O, E, C)\, \tau(O, D, D \circ X)$. $C \sim D$ impliziert nach (*) $\tau(O, E, C) = \tau(O, E, D)$, woraus $\tau(O, E, C \circ X) = \tau(O, E, D)$. $\tau(O, D, D \circ X) = \tau(O, E, D \circ X)$ folgt. Nach (*) also gilt $C \circ X \sim D \circ X$.

Bezeichnen wir mit ϱ_X jene Klasse von ϱ, die den Punkt X enthält, dann läßt sich auf der Faktormenge R/ϱ eine Operation $\cdot$ durch $\varrho_X \varrho_Y = \varrho_{X \circ Y}$ definieren und die Struktur $\mathscr{H} = (R/\varrho, \cdot) = (\bar{R}, \cdot)$ ist ein Gruppoid. Durch die Vorschrift $\alpha(\varrho_X) = \tau(O, E, X)\ \forall X \in R$ ist eine bijektive Abbildung von $\bar{R}$ auf $\tau(\mathscr{T})$ definiert: Zunächst beweisen wir, daß α eine Abbildung ist. Ist $Y \in \varrho_X$ gegeben, dann gilt $Y \sim X$, woraus nach (*) $\tau(O, E, X) = \tau(O, E, Y)$ folgt, was aber $\alpha(\varrho_X) = \alpha(\varrho_Y)$ bedeutet. Es sei $\gamma \in \tau(\mathscr{T})$. Nach Satz 1 und Bemerkung 1 gibt es einen Punkt $X \in R$ mit $\gamma = \tau(O, E, X)$, woraus $\alpha(\varrho_X) = \gamma$ folgt. Deswegen ist α eine Abbildung auf die Menge $\tau(\mathscr{T})$. Aus $\alpha(\varrho_X) = \alpha(\varrho_Y)$ ergibt sich $\tau(O, E, X) = \tau(O, E, Y)$ und nach (*) folgt daraus $X \sim Y$, also $\varrho_X = \varrho_Y$. Dies bedeutet, daß α injektiv ist. α ist ein Isomorphismus von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{J}$: Es seien $\varrho_A, \varrho_B \in \bar{R}$. Dann ist $\alpha(\varrho_A \varrho_B) = \alpha(\varrho_{A \circ B}) = \tau(O, E, A \circ B)$. Nach Fig. 2 ergibt sich $\tau(O, E, B) = \tau(O, A', B') = \tau(O, A, A \circ B)$, woraus $\tau(O, E, A)$ ·

$\cdot\, \tau(O, E, B) = \tau(O, E, A)\, \tau(O, A, A \circ B) = \tau(O, E, A \circ B)$ und $\alpha(\varrho_A \varrho_B) = \tau(O, E, A \circ B) = \tau(O, E, A)\, \tau(O, E, B) = \alpha(\varrho_A)\, \alpha(\varrho_B)$ folgt. Weil $\mathcal{J}$ eine Gruppe ist, ist auch $\mathcal{H}$ eine Gruppe.

Wir zeigen, daß die Abbildung $\sigma = \alpha^{-1}\tau$ ein Ordnungsverhältnis auf $\mathcal{A}$ (in bezug auf $\mathcal{H}$) ist. Offensichtlich ist σ eine Abbildung von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{H}$.

Ad (T1) Es seien P, M, N, Q kollineare Punkte mit $P \neq M, N, Q$. Der Definition von σ nach ist $\sigma(P, M, N)\, \sigma(P, N, Q) = \alpha^{-1}\tau(P, M, N)\, \alpha^{-1}\tau(P, N, Q)$. Da α ein Isomorphismus von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{J}$ ist, ist auch α^{-1} ein Isomorphismus von $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{H}$, woraus sich $\alpha^{-1}\tau(P, M, N)\, \alpha^{-1}\tau(P, N, Q) = \alpha^{-1}(\tau(P, M, N)\, \tau(P, N, Q)) = \alpha^{-1}(\tau(P, M, Q)) = \sigma(P, M, Q)$ ergibt.

Ad (T2) Sind P', M', N' die Bilder von P, M, N mit $(P, M, N) \in \mathcal{T}$ in einer Parallelprojektion, dann gilt $\sigma(P, M, N) = \alpha^{-1}\tau(P, M, N) = \alpha^{-1}\tau(P', M', N') = \sigma(P', M', N')$.

Da α^{-1} ein Isomorphismus von $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{H}$ mit $\sigma(P, M, N) = \alpha^{-1}\tau(P, M, N)$ $\forall (P, M, N) \in \mathcal{T}$ ist, sind die Ordnungsverhältnisse τ, σ äquivalent.

Satz 4. *Es sei $\tau : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ ein Ordnungsverhältnis auf $\mathcal{A}$ mit $\tau(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$. Ist $\overline{\mathcal{H}}$ eine Faktorgruppe von $\mathcal{G}$ bezüglich eines Normalteilers $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$, dann ist die Abbildung $\tau_{\mathcal{H}} : \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{H}}$ mit*

$$\tau_{\mathcal{H}}(P, M, N) = \overline{\tau(P, M, N)} \;\; \forall (P, M, N) \in \mathcal{T}$$

ein Ordnungsverhältnis auf $\mathcal{A}$.

Beweis. Wir beweisen, daß $\tau_{\mathcal{H}}$ die Forderungen (T1), (T2) erfüllt.

Ad (T1) Nach den Eigenschaften des Ordnungsverhältnisses τ und der Faktorgruppe $\overline{\mathcal{H}}$ erhalten wir

$$\tau_{\mathcal{H}}(P, M, N)\, \tau_{\mathcal{H}}(P, N, Q) = \overline{\tau(P, M, N)}\; \overline{\tau(P, N, Q)} =$$

$$= \overline{\tau(P, M, N)\, \tau(P, N, Q)} = \overline{\tau(P, M, Q)} = \tau_{\mathcal{H}}(P, M, Q)\,.$$

Ad (T2) Es sei $(P, M, N) \in \mathcal{T}$ und seien P_1, M_1, N_1 die Bilder von P, M, N in einer Parallelprojektion. Dann ist

$$\tau_{\mathcal{H}}(P, M, N) = \overline{\tau(P, M, N)} = \overline{\tau(P_1, M_1, N_1)} = \tau_{\mathcal{H}}(P_1, M_1, N_1)\,.$$

Definition 3. *Ein Ordnungsverhältnis τ auf $\mathcal{A}$ heißt normal, wenn aus $\tau(P, M, N) = 1$ stets $A = B$ folgt.*

Bemerkung 2. Es sei $\mathcal{A}$ desarguessch. Dann ist $\mathcal{R}$ eine Gruppe und es gibt ein normales Ordnungsverhältnis τ auf $\mathcal{A}$ [1]. Nach Satz 3 läßt sich τ als eine Abbildung auf $\mathcal{R}$ begreifen. Nach Satz 4 wird durch jeden Normalteiler von $\mathcal{R}$ ein Ordnungsverhältnis auf $\mathcal{A}$ erklärt und nach Satz 3 lassen sich alle Ordnungsverhältnisse auf $\mathcal{A}$ (bis auf Äquivalenz) in dieser Weise ausdrücken.

Literatur

[1] *W. Junkers:* Eine Kennzeichnung der desarguesschen affinen Räume durch kennzeichende Eigenschaften des affinen Teilverhältnisses. Arch. der Math. *21* 299—303 (1970).
[2] *W. Junkers:* Über normale Inhaltsfunktionen auf affinen Ebenen. Beiträge zur Geometrischen Algebra. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1977, S. 167—178.
[3] *R. Lingenberg:* Grundlagen der Geometrie I. Mannheim 1969.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).