Jiří Kopáček

Решение задачи Коши и смешанной задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка методом конечных разностей

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 148--157

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108582`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ И СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

JIŘÍ KOPÁČEK (Иржи Копачек), Прага

(Поступило в редакцию 31/I 1967 г.)

Рассмотрим в области $V_T = \langle 0, T\rangle \times E_n$ дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + c(x)\,u = f\,.$$

Предполагая, что

$$(\mathrm{A}) \qquad a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqq 0$$

для всех $x \in V_T$ и всех действительных $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, будем решать для уравнения (1) задачу Коши

$$(2) \qquad u\big|_{x_0=0} = \frac{\partial u}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=0} = 0\,.$$

О. А. Олейник в [1] показала существование и единственность решения задачи (1), (2), предполагая, что существуют такие положительные числа θ и α, что

$$(3) \qquad \left(\theta a_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_0}a_{ij}\right)\xi_i\xi_j - \alpha(b_i\xi_i)^2 \geqq 0$$

а также существование и единственность (при некоторых дополнительных предположениях на коэффициенты (1)) слабого решения $\in L_2$ смешанной задачи

$$(1') \qquad Lu = f \quad \text{в} \quad \langle 0, T\rangle \times \Omega = Q_T$$

$$(2') \qquad u = \frac{\partial u}{\partial x_0} = 0 \quad \text{для} \quad x_0 = 0\,, \quad x' = x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$$

$$(3') \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \langle 0, T\rangle \times \sigma = S$$

где σ граница Ω, Ω область в E_n. Слабое решение здесь понимается в том смысле, что $u \in L_2(Q_T)$ и для любой функции $v \in W_2^2(Q_T)$, $v = \partial v/\partial x_0 = 0$ для $x_0 = T$, $v = 0$ для $x \in S$ выполнено интегральное соотношение

$$\int_{Q_T} uL^*v \, \mathrm{d}x = \int_{Q_T} fv \, \mathrm{d}x$$

где L^* оператор формально сопряженный к L.

Целью настоящей работы будет, предполагая (A), (3), показать устойчивость одной конечноразностной схемы для задач (1), (2), (1′), (2′), (3′), и существование решения этих задач. Для этого мы докажем некоторые оценки для решений этой схемы и их разностных отношений. Так как эти оценки получаются для смешанной задачи также как для задачи Коши, то мы подробно рассмотрим лишь задачу Коши.

1. Обозначения. В полупространстве $x_0 \geqq 0$ строим сетку $\{k_0\tau, k_1h, \ldots \ldots, k_nh\} = \{k_0\tau, kh\}$, $T > \tau > 0$, $h > 0$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ произвольные целые числа, k_0 любое натуральное или нуль. Если u функция, определенная в точках сетки, то ${}^{\pm i}u(k_0\tau, kh) = u(k_0\tau, \ldots, (k_i \pm 1)\, h, \ldots)$, $\Delta_i u = 1/h({}^{+i}u - u)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ${}^{\pm 0}u = u((k_0 \pm 1)\, \tau, kh)$, $\Delta_0 u = 1/\tau({}^{+0}u - u)$, $Ju = {}^{+0}u + u$, $\Delta_{-j}u = \Delta_j{}^{-j}u$, $\langle u \rangle_p = h^n \sum_k u(p\tau, kh)$, $[u]_p = \tau \sum_{s=1}^{p-1} \langle u \rangle_s$, $w_p(k_0\tau, kh) = \tau \sum_{s=k_0}^{p} u(s\tau, kh)$ для $k_0 \leqq p$, $w_p(k_0\tau, kh) = 0$ для $k_0 > p$, $E(x_0, \theta) = e^{\theta x_0}$, где θ положительная постоянная. Всюду предполагается суммирование от 1 до n по дважды встречающемуся индексу.

Разностную схему, апроксимирующую (1), (2), определяем следующим образом. Полагаем

$$u(k_0\tau, kh) = 0 \quad \text{для} \quad k_0 = 0, 1 \tag{2″}$$

и для $1 \leqq k_0 \leqq M - 1$ (M такое натуральное число, что $0 \leqq T - M\tau < \tau$) составляем уравнение

$$L_\Delta u = f \tag{1″}$$

где $L_\Delta u = \Delta_0\Delta_{-0}u - \Delta_{-j}(a_{ij}\Delta_i u) + b_i\, \Delta_i u + b_0\, \Delta_0 u + Cu$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $y(p)$, $F(p)$ неотрицательные функции целочисленного аргумента p, $1 \leqq p \leqq M$, F неубывающая, $\tau > 0$ такое, что $M\tau \leqq T$. Пусть для $1 \leqq p \leqq M$*

$$y(p) \leqq F(p) + C\tau \sum_{s=1}^{p} y(s)\,, \tag{Б}$$

где $C > 0$ константа. Если $C\tau < 1$, то для $p = 1, 2, \ldots, M$

$$y(p) \leqq F(p)\left(\frac{1}{1 - C\tau}\right)^p \leqq F(p)\, l\, \frac{Cp\tau}{1 - C\tau}\,.$$

Доказательство. Из (Б) вытекает $y(1) \leqq \Phi(1)$ и $y(p) \leqq \Phi(p) + (\gamma - 1)\sum_{s=1}^{p-1} y(s)$ для $p \geqq 2$, где $\Phi(p) = F(p)/(1 - C\tau)$, $\gamma = (1 - C\tau)^{-1} = 1 + C\tau/(1 - C\tau)$. Методом математической индукции легко получается отсюда $y(p) \leqq \gamma^{p-1}\,\Phi(p)$.

Лемма 2. *Пусть вместо (Б) $y(p)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\text{(В)}\qquad y(p) - \tfrac{1}{2}y(p - 1) \leqq F(p) + C\tau\sum_{s=1}^{p} y(s) \quad \text{для} \quad p = 2, 3, \ldots, M \quad \text{и}$$

$$y(1) \leqq F(1)\,.$$

Тогда для $p = 1, 2, \ldots, M$

$$y(p) \leqq 2\,F(p)\left(1 + \frac{2C\tau}{1 - C\tau}\right)^{p-1} \Big/ (1 - C\tau) \leqq 2\,F(p)\, e^{2Cp\tau/(1-C\tau)}\,.$$

Доказательство. Методом математической индукции получим из (В)

$$y(p) \leqq \sum_{s=0}^{p-1} 2^{-s}\,\chi(p - s)\,,$$

где $\chi(p) = F(p) + C\tau\sum_{s=1}^{p} y(s)$. Правая часть меньше чем $2\,F(p) + C\tau\, y(p) + 2C\tau\sum_{s=1}^{p-1} y(s)$. Таким образом

$$y(p) \leqq \Phi(p) + (\gamma - 1)\sum_{s=1}^{p-1} y(s)\,,$$

где $\Phi = 2F/(1 - C\tau)$, $\gamma = (1 + C\tau)/(1 - C\tau) = 1 + 2C\tau/(1 - C\tau)$. Отсюда, как при доказательстве леммы 1, получим $y(p) \leqq \Phi(p)\,\gamma^{p-1}$.

Лемма 3. *Пусть $a_{ij}(z)\,\xi_i\xi_j$ неотрицательная квадратичная форма с вещественными коэффициентами для $z \in E_1$, $a_{ij} \in C^{1,\mathrm{lip}}(E_1)$. Пусть $\xi = \{\xi_{ij}\}$ симметричная действительная матрица. Тогда существует такая константа N, зависящая от констант Липшица производных a'_{ij}, что имеет место неравенство*

$$(a'_{ij}\xi_{ij})^2 \leqq N a_{ij}\xi_{ik}\xi_{jk}\,.$$

Доказательство. Пусть $z_0 \in E_1$ произвольное но фиксированное. Докажем требуемое неравенство для $z = z_0$. Положим $\xi = \alpha^*\eta\alpha$, где α ортогональная действительная матрица, α^* к ней транспонированная, η симметричная матрица. Тогда $a'_{ij}\xi_{ij} = \eta_{st}\alpha_{si}\alpha_{tj}a'_{ij} = \eta_{st}\tilde{a}'_{st}$, где $\tilde{A}' = \{\tilde{a}'_{st}\} = \alpha A'\alpha^*$, $A = \{a_{ij}\}$, $A' = \{a'_{ij}\}$. Выберем α так, чтобы $\tilde{A}(z_0) = \alpha\, A(z_0)\, \alpha^*$ была диагональной. Тогда $a_{ij}(z_0)\,.\,\xi_{ik}\xi_{jk} = \tilde{a}_{ss}(z_0)\,\eta_{st}\eta_{st}$. Если докажем, что существует константа C такая, что $\tilde{a}'^2_{st} \leqq C(\tilde{a}_{ss} + \tilde{a}_{tt})$ то получим (n порядок всех рассматриваемых матриц) $(a'_{ij}\xi_{ij})^2 = (\tilde{a}'_{st}\eta_{st})^2 \leqq n^2(\tilde{a}'_{st})^2\,\eta^2_{st} \leqq Cn^2(\tilde{a}_{ss} + \tilde{a}_{tt})\,\eta^2_{st} = 2Cn^2\tilde{a}_{ss}\eta_{st}\eta_{st} = 2Cn^2 a_{ij}\xi_{ik}\xi_{jk}$. Остается, следовательно, доказать оценку для $\tilde{a}'^2_{st}$. Для этого докажем прежде всего, что для любой неотрицательной функции $a(z) \in C^{1,lip}(E_1)$ имеет место неравенство $(a'(z))^2 \leqq 4K\, a(z)$, где K константа Липшица, $a'(z)$. Пусть это неверно в точке z_0. Тогда $a(z_0) \neq 0$, $a'(z_0) \neq 0$. Положим $z_1 = z_0 - 2\, a(z_0)/a'(z_0)$. Имеем

$$a(z_1) = a(z_0) + a'(z_0)\,(z_1 - z_0) + [a'(z_0 + \vartheta(z_1 - z_0)) - a'(z_0)]\,(z_1 - z_0) \leqq$$
$$\leqq a(z_0) - a'(z_0)\,.\,2\,a(z_0)/a'(z_0) + 4K(a(z_0)/a'(z_0))^2 =$$
$$= a(z_0)\,(-1 + 4K\,a(z_0)\,|\,(a'(z_0))^2) < 0\,,$$

что противоречит неотрицательности $a(z_1)$. Для завершения доказательства остается применить доказанное неравенство для функций $\tilde{a}_{ss}$ и $\tilde{a}_{ss} + 2\tilde{a}_{st} + \tilde{a}_{tt}$. Это доказательство является модификацией доказательства леммы 1 работы [3].

Лемма 4. *Пусть $a_{ij}(z)\,\xi_i\xi_j$ неотрицательная квадратичная форма $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ с непрерывными коэффициентами для $z \in \langle 0, T\rangle$, имеющими ограниченные производные по z, $b_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ функции, удовлетворяющие условию Липшица на $\langle 0, T\rangle$. Пусть существуют такие константы $\theta > 0$, $\alpha > 0$, что для всех $z \in \langle 0, T\rangle$, ξ_i действительных*

$$\left(\theta a_{ij}(z) + \frac{\partial}{\partial z}\, a_{ij}(z)\right)\xi_i\xi_j - \alpha(b_i(z)\,\xi_i)^2 \geqq 0\,.$$

Пусть $\tau \in (0, T)$. Тогда существует C, зависящее от θ, α, T и от констант Липшица функций $b_i(z)$, что для всех $z \in \langle 0, T - \tau\rangle$ и ξ_i действительных

$$\Delta_0(e^{2\theta z}\, a_{ij}(z))\,\xi_i\xi_j - \frac{\alpha}{2}\, e^{2\theta z}(b_i(z)\,\xi_i)^2 \geqq -\tau^2 C \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \theta e^{2\theta z} a_{ij}\xi_i\xi_j\,.$$

Доказательство. Для фиксированных ξ_i и θ положим $F(z) = e^{2\theta z}\, a_{ij}(z)\,\xi_i\xi_j$. Тогда для $z \in \langle 0, T - \tau\rangle$

$$\Delta_0\, F(z) = \frac{\partial}{\partial z}\,(e^{2\theta\tilde{z}}\, a_{ij}(\tilde{z}))\,\xi_i\xi_j = e^{2\theta\tilde{z}}\left(2\theta a_{ij}(\tilde{z}) + \frac{\partial a_{ij}}{\partial z}\,(\tilde{z})\right)\xi_i\xi_j\,,$$

где $\tilde{z} = z + \vartheta\tau$, $\vartheta \in (0, 1)$

$$-(\alpha/2)\, e^{2\theta z}(b_i(z)\,\xi_i)^2 \geqq -2(\alpha/2)\, e^{2\theta\tilde{z}}\{[b_i(\tilde{z})\,\xi_i]^2 + [(b_i(z) - b_i(\tilde{z}))\,\xi_i]^2\} \geqq$$

$$\geqq -\alpha e^{2\theta\tilde{z}}(b_i(\tilde{z})\,\xi_i)^2 - \tau^2 C \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \,.$$

Так как $(\partial/\partial z)\, F(z) \geqq 0$, то лемма доказана.

3. Энергетические неравенства для решений разностной схемы.

Лемма 5. *Пусть f непрерывная функция с компактным носителем в V_T и пусть коэффициенты* (1) *удовлетворяют следующим требованиям:* a_{ij}, $(\partial/\partial x_0)\, a_{ij}$, b_0, b_i, c ограничены, b_i $(i = 1, 2, \ldots, x)$ *удовлетворяют условию Липшица по всем переменным,* b_0 *условию Липшица по* x_0, *и выполнены* (A) *и* (3). *Тогда существуют константы* $\tau_0 > 0$, $\varkappa_0 > 0$, *и константа* C, *независящая от* τ, h, f, *что для* $\tau \leqq \tau_0$, $\varkappa = \tau/h \leqq \varkappa_0$ *выполнено неравенство*

$$\langle u^2 \rangle_p \leqq C[f^2]_p$$

для $p = 0, 1, \ldots, M$, *где* u *решение* (1″), (2″).

Доказательство. Пусть p целое $1 \leqq p \leqq M - 1$. Умножая (1″) на $\tau h^n E J w_p$ и суммируя, получим

$$[L_\Delta u E J w_p] = [f E J w_p]_p \,. \tag{4}$$

Постоянную θ, от которой зависит E, выберем позже. Будем преобразовывать слагаемые в левой части (4), причем индекс p будем опускать. Заметим прежде всего, что $\Delta_0 w_p = -u$ для $k_0 = 0, 1, \ldots, p$, $w_p = \tau u$ для $k_0 = p$. Будем пользоваться следующими формулами для разностных отношений произведения

$$\Delta_i(uv) = \Delta_i u v + {}^{+i}u\, \Delta_i v = \tfrac{1}{2}(Jv\, \Delta_i u + Ju\, \Delta_i v)$$
$$\Delta_{-i}(uv) = v\, \Delta_{-i} u + {}^{-i}u\, \Delta_{-i} v$$

для $i = 0, 1, \ldots, n$.

Имеем

$$\begin{aligned}
[\Delta_0\Delta_{-0} u E J w] &= [\Delta_0(\Delta_{-0} u E J w)] - [\Delta_0 u\, \Delta_0(E J w)] = \\
&= \langle \Delta_0 u E w \rangle_p - [\Delta_0 u E J\, \Delta_0 w] - [\Delta_0 u\, \Delta_0 E J\, {}^{+0}w] = \\
&= \langle \Delta_{-0} u E w \rangle_p + [\Delta_0 u^2 E] - [\Delta_0(u J\, {}^{+0}w\, \Delta_0 E)] + \\
&+ [{}^{+0}u J\, \Delta_0\, {}^{+0}w\, \Delta_0\, {}^{+0}E] + [{}^{+0}u J\, {}^{+0}w(\Delta_0)^2\, E] \geqq \\
\geqq \langle u^2 E \rangle_p - \langle u\, {}^{-0}u E \rangle_p &+ [\Delta_0(u^2 E)] - [{}^{+0}u^2\, \Delta_0 E] - C(\theta)\, \tau \sum_{s=1}^{p} \langle u^2 \rangle \geqq \\
&\geqq E(p\tau, \theta)\, \{\tfrac{3}{2}\langle u^2 \rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle u^2 \rangle_{p-1}\} - C_1(\theta)\, \tau \sum_{s=1}^{p} \langle u^2 \rangle_s \,.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$(6)\qquad -[\Delta_{-j}(a_{ij}\,\Delta_i u)\,EJw] = [a_{ij}\,\Delta_i uEJ\,\Delta_j w] \geqq [Ea_{ij}\,\Delta_0\Delta_i wJ\,\Delta_j w] =$$

$$= -[Ea_{ij}\,\Delta_0(\Delta_i w\,\Delta_j w)] = -[\Delta_0(Ea_{ij}\,\Delta_i w\,\Delta_j w)] + [\Delta_0(Ea_{ij})\,\Delta_i\,{}^{+0}w\,\Delta_j\,{}^{+0}w] =$$

$$= \langle Ea_{ij}\,\Delta_i w\,\Delta_j w\rangle_1 - \langle Ea_{ij}\,\Delta_i w\,\Delta_j w\rangle_p + [\Delta_0(Ea_{ij})\,\Delta_i\,{}^{+0}w\,\Delta_j\,{}^{+0}w] \geqq$$

$$\geqq -\varkappa^2\lambda\,.\,4n\langle Eu^2\rangle_p + [\Delta_0(Ea_{ij})\,\Delta_i\,{}^{+0}w\,\Delta_j\,{}^{+0}w]\,,$$

где $\lambda = \sup\limits_{|\xi|^2 \leqq 1,\, x\in V_T} a_{ij}\xi_i\xi_j$.

$$(7)\qquad |[b_i\,\Delta_i uEJw]| = |[\Delta_i(b_i uEJw)] - [E\,{}^{+i}u\,\Delta_i(b_iJw)]| =$$

$$= |-[E\,{}^{+i}u\,\Delta_i b_i J\,{}^{+i}w] - [E\,{}^{+i}ub_iJ\,\Delta_i w]| \leqq C(\theta,\varkappa)\,\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s +$$

$$+ 2|[E\,{}^{+i}ub_i\,\Delta_i\,{}^{+0}w]| \leqq C(\theta,\varkappa,\tilde\alpha)\,\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s + \tilde\alpha[E(b_i\,\Delta_i\,{}^{+0}w)^2]\,.$$

$$(8)\qquad |[b_0\,\Delta_0 uEJw]| = |[\Delta_0(b_0 uEJw)] - [{}^{+0}u\,\Delta_0(b_0EJw)]| \leqq$$

$$\leqq \tau\langle b_0u^2E\rangle_p + C(\theta)\,\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s\,.$$

Если $\varkappa$ выбрать так, что

$$(9)\qquad 4\varkappa^2\lambda n \leqq \tfrac{1}{2}$$

т. е. $\varkappa_0 = \frac{1}{4}\sqrt{(2/\lambda n)}$ то из (5)–(8) получим

$$(10)\qquad [L_\Delta uEJw]_p \geqq E(p\tau,\theta)\,\{\langle u^2\rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle u^2\rangle_{p-1}\} +$$

$$+ [\Delta_0(Ea_{ij})\,\Delta_i\,{}^{+0}w\,\Delta_j\,{}^{+0}w - \tilde\alpha E(b_i\,\Delta_i\,{}^{+0}w)^2] - C(\theta,\tilde\alpha)\,\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s\,.$$

По лемме 4 второе слагаемое в правой части $\geqq -C_1\tau\sum\limits_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s$, если θ и $\tilde\alpha$ выбрать подходящим образом. Из (10) и (4) вытекает тогда

$$E(p\tau,\theta)\,\{\langle u^2\rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle u^2\rangle_{p-1}\} \leqq C_2\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s + C_3[f^2]_p\,,$$

откуда

$$\langle u^2\rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle u^2\rangle_{p-1} \leqq C_2\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2\rangle_s + C_3[f^2]_p\,.$$

Для завершения доказательства достаточно применить лемму 2.

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения леммы 5 и кроме того* $\partial f/\partial x_i \in C(V_T)$, b_0, c, $\partial a_{ij}/\partial x_k$, a_{ij}, $\partial b/\partial x_0$ *удовлетворяют условию Липшица по* x_l *и ограничены* $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда при* $\varkappa \leqq \varkappa_0$, $\tau \leqq \tau_0$, *где* $\varkappa_0$ *определяется* *условием* (9) *и* τ_0 *достаточно мало, существует константа* C, *независящая от* τ, h, f, *что*

$$\langle(\Delta_{-0}u)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i u)^2\rangle_p \leqq C[f^2 + \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i f)^2]_p$$

для $p = 0, 1, \ldots, M$, *где и решение* (1″), (2″).

Доказательство. Применяя к (1″) оператор Δ_r ($r = 1, 2, \ldots, n$), умножая на $\tau h^n EJ\, \Delta_r w$ и суммируя, получим

$$(11)\qquad [L_\Delta\, \Delta_r u EJ\, \Delta_r w] - [\Delta_{-j}(\Delta_r a_{ij}\, \Delta_i\, {}^{+r}u)\, EJ\, \Delta_r w] + [\Delta_r b_0\, \Delta_0\, {}^{+r}u EJ\, \Delta_r w] \leqq$$
$$\leqq C_1\{[\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i f)^2]_p + \tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2 + \Delta_i u\, \Delta_i u\rangle_s\,.$$

Оценим второй и третий член в левой части (11).

$$(12)\qquad |[\Delta_{-j}(\Delta_r a_{ij}\, \Delta_i\, {}^{+r}u)\, EJ\, \Delta_r w]| = |[\Delta_r a_{ij}\, \Delta_i\, {}^{+r}u EJ\, \Delta_j \Delta_r w]| \leqq$$
$$\leqq |[\Delta_r a_{ij}\, \Delta_i \Delta_{-r}\, {}^{+r}u EJ\, \Delta_j w]| + C\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s \leqq$$
$$\leqq |[\Delta_i(\Delta_r a_{ij} J\, \Delta_j w)\, EJ\, \Delta_r\, {}^{+i}u]| + C_1\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s \leqq$$
$$\leqq [(\Delta_r a_{ij}\, \Delta_i \Delta_j\, {}^{+0}w)^2\, E] + C_2\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s \leqq$$
$$\leqq C_3\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\, a_{ij}\, \Delta_i \Delta_j\, {}^{+0}w\right)^2 E\right] + C_4\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s \leqq$$
$$\leqq C_5[a_{ij}\, \Delta_i \Delta_l\, {}^{+0}w\, \Delta_j \Delta_l\, {}^{+0}wE] + C_4\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s\,.$$

Для получения последней оценки мы использовали лемму 3. Преобразуя второе слагаемое, получим

$$(13)\qquad |[\Delta_r b_0\, \Delta_0\, {}^{+r}u EJ\, \Delta_r w]| \leqq C\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2 + \Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s\,.$$

Суммируя (11) по $r = 1, 2, \ldots, n$, используя (10) (для $\Delta_r u$ вместо u), (12), (13) и лемму 5 (для оценки $\langle u^2\rangle_s$), получим

$$(14)\qquad E(p\tau, \theta)\,\{\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_{p-1} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{n}[\Delta_0(Ea_{ij})\, \Delta_i \Delta_r\, {}^{+0}w\, \Delta_j \Delta_r\, {}^{+0}w - \tilde{\alpha}E(b_i\, \Delta_i \Delta_r\, {}^{+0}w)^2 -$$
$$- C_6 Ea_{ij}\, \Delta_i \Delta_r\, {}^{+0}w\, \Delta_j \Delta_r\, {}^{+0}w] \leqq C(\tilde{\alpha}, \theta)\,\{\tau\sum_{s=1}^{p}\langle\Delta_l u\, \Delta_l u\rangle_s + [f^2 + \Delta_l f\, \Delta_l f]\}\,.$$

По лемме 4 можно подобрать θ и $\tilde{\alpha}$ так, что второе слагаемое в левой части (14) неотрицательно. Тогда из (14) имеем

$$\langle \Delta_l u \, \Delta_l u \rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle \Delta_l u \, \Delta_l u \rangle_{p-1} \leqq C\{\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \Delta_l u \, \Delta_l u \rangle_s + [f^2 + \Delta_l f \, \Delta_l f]\,,$$

откуда по лемме 2 следует

$$\langle \Delta_l u \, \Delta_l u \rangle_p \leqq C[f^2 + \Delta_l f \, \Delta_l f]_p \,. \tag{15}$$

Остается оценить $\Delta_{-0} u$. Заметим прежде всего, что для сеточных функций u, v выполняется соотношение

$$uJ\,\Delta_{-0} v + vJ\,\Delta_{-0} u = 2\,\Delta_0(uv) - \tau\,\Delta_0(v\,\Delta_{-0} u + u\,\Delta_{-0} v)\,.$$

Умножая (1″) на $\tau h^n J\,\Delta_{-0} u$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned}[L_\Delta u J\,\Delta_{-0} u]_p &\geqq \langle (\Delta_{-0} u)^2 \rangle_p + [a_{ij}\,\Delta_i u J\,\Delta_j \Delta_{-0} u] - \\ &- C\tau \sum_{s=1}^{p} \langle u^2 + (\Delta_{-0} u)^2 + \Delta_l u\,\Delta_l u \rangle_s\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|[a_{ij}\,\Delta_i u J\,\Delta_{-0}\Delta_j u]| &= \tfrac{1}{2}|[a_{ij}\,\Delta_i u J\,\Delta_{-0}\Delta_j u + \Delta_j u J\,\Delta_{-0}\Delta_i u]| = \\ &= |[\Delta_0(a_{ij}(\Delta_i u\,\Delta_j u - \tau\,\Delta_{-0}\Delta_i u\,\Delta_j u))] - \\ &- [\Delta_0 a_{ij}(\Delta_i{}^{+0} u\,\Delta_j{}^{+0} u - \tau\,\Delta_{-0}\Delta_i{}^{+0} u\,\Delta_j{}^{+0} u)]| \leqq \\ &C\{\langle \Delta_l u\,\Delta_l u \rangle_p + \langle \Delta_l u\,\Delta_l u \rangle_{p-1} + \tau \sum_{s=1}^{p} \langle \Delta_l u\,\Delta_l u \rangle_s\}\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Из этих оценок, (15) и леммы 5 вытекает

$$\langle (\Delta_{-0} u)^2 \rangle_p \leqq C[f^2 + \Delta_l f\,\Delta_l f]_p + C_1 \tau \sum_{s=1}^{p} \langle (\Delta_{-0} u)^2 \rangle_s\,.$$

Для завершения доказательства остается применить лемму 1.

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения леммы 6 и кроме того* $\partial b_i/\partial x_k$, $\partial b_i/\partial x_k$, $\partial b_0/\partial x_0$, $\partial C/\partial x_k$ *ограничены и удовлетворяют условию Липшица по* x_l, $\partial f/(\partial x_i\,\partial x_k) \in C(V_T)$, $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. *При* $\varkappa \leqq \varkappa_0$ *и* τ *достаточно малом существует константа* C *независящая от* f, τ, h, *что для решения* u *задачи* (1″), (2″) *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\tau \sum_{p=1}^{p} \langle (\Delta_0 \Delta_{-0} u)^2 \rangle_s + \langle \sum_{\nu,\mu=1}^{n} (\Delta_\nu \Delta_\mu u)^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (\Delta_{-0}\Delta_\nu u)^2 \rangle_p \leqq \\ \leqq C[f^2 + \Delta_l f\,\Delta_l f + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\Delta_\nu \Delta_\mu f)^2]_p\,.\end{aligned}$$

Доказательство. Для оценки $\Delta_\nu\Delta_\mu u$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ применяем $\Delta_\nu\Delta_\mu$ к (1″), умножаем на $\tau h^n E\, \Delta_\nu\Delta_\mu w$ и суммируем. Обозначив для краткости $\Delta = \Delta_\nu\Delta_\mu$, получим

$$[\Delta L_\Delta u EJ\,\Delta w] \geqq [L_\Delta\,\Delta u EJ\,\Delta w] + [(\Delta_\mu b_0\,\Delta_\nu\Delta_0\,{}^{+\mu}u + \Delta_\nu b_0\,\Delta_\mu\Delta_0\,{}^{+\nu}u)\,EJ\,\Delta w] -$$
$$- [\Delta_{-j}(\Delta_\mu a_{ij}\,\Delta_\nu\Delta_i\,{}^{+\mu}u + \Delta_\nu a_{ij}\,\Delta_\mu\Delta_i\,{}^{+\nu}u)\,EJ\,\Delta w] -$$
$$- C\tau \sum_{s=1}^{p} \langle u^2 + (\Delta_{-0}u)^2 + \Delta_l u\,\Delta_l u + \sum_{r,l=1}^{n} (\Delta_r\Delta_l u)^2\rangle_s\,.$$

Аналогично как раньше получаем, что второе слагаемое правой части оценивается по модулю величиной

$$C_1\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \Delta_l u\,\Delta_l u + \sum_{l,r=1}^{n} (\Delta_l\Delta_r u)^2\rangle_s$$

где C зависит также от констант Липшица $\partial b_0/\partial x_0$. Третье оцениваем аналогично как в (12) (роль u и w играют $\Delta_\nu u$, $\Delta_\nu w$ или $\Delta_\mu u$, $\Delta_\mu w$) и получим, что оно по модулю меньше чем

$$C[a_{ij}\,\Delta_i\Delta_l\Delta_r\,{}^{+0}w\,\Delta_j\Delta_l\Delta_r\,{}^{+0}w] + C(\theta)\sum_{s=1}^{p} \langle \sum_{l,r=1}^{n} (\Delta_r\Delta_l u)^2\rangle_s\,.$$

Отсюда, используя (10), суммируя по $\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n$, получим с помощью лемм 4, 5, 6

$$\langle \sum_{\nu,\mu=1}^{n} (\Delta_\nu\Delta_\mu u)^2\rangle_p - \tfrac{1}{2}\langle \sum_{\nu,\mu=1}^{n} (\Delta_\nu\Delta_\mu u)^2\rangle_{p-1} \leqq C\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \sum_{\nu,\mu=1}^{n} (\Delta_\nu\Delta_\mu u)^2\rangle_s +$$
$$+ C_1[f^2 + \Delta_l f\,\Delta_l f + \sum_{l,r=1}^{n} (\Delta_l\Delta_r f)^2]\,,$$

откуда по лемме 2 вытекает часть леммы 7.

Для оценки $\Delta_{-0}\Delta_\nu u$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ следует применить Δ_ν к (1″), умножить на $\tau h^n J\,\Delta_{-0}\Delta_\nu u$, просуммировать, использовать предыдущие оценки (в частности (16) для $\Delta_\nu u$ вместо u) и применить лемму 1.

$\Delta_{-0}\Delta_0 u$ оцениваем из уравнения (1″) с помощью лемм 5, 6 и доказанной уже части леммы 7.

Теперь уже легко получить существование решения задачи (1), (2) в $W_2^2(V_T)$, если $f, fx_i, fx_ix_j \in C(V_T)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, f имеет компактный в V_T носитель. Для этого достаточно продолжить все оцененные разностные отношения на V_T кусочно постоянно (вместо функции u определенной в точках сетки рассмотреть $u_\Delta = u(k_0\tau, kh)$ для $x_0 \in \langle k_0\tau, (k_0 + 1)\,\tau)$, $x_i \in \langle k_i h, (k_i + 1)\,h)$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$. Такие продолжения будут равномерно по τ, h ограничены в $L_2(V_T)$. Если устремить τ, h к нулю по некоторой последовательности, то соответствующие последовательности продолжений разностных отношений будут слабо компактны в $L_2(V_T)$. Как в [4] можно показать, что пределы выбранных слабо сходящихся подпоследовательностей дают решение в $W_2^2(V_T)$ задачи (1), (2) вместе с производными до второго порядка включительно. Из теоремы единственности, доказанной в [1] вытекает сходимость самих последовательностей (а не только выбранных подпоследовательностей). Мы доказали теорему:

Теорема. *Пусть* $f, \partial f/\partial x_i, \partial^2 f/(\partial x_i \partial x_j) \in C(V_T)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, f *имеет компактный носитель в* V_T. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (3) *и коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют следующим требованиям: все они ограничены,* $a_{ij} \in C^1(V_T)$, $\partial a_{ij}/\partial x_k$, $\partial b_i/\partial x_k$, $\partial C/\partial x_k$, $\partial b_0/\partial x_0$, $\partial b_0/\partial x_k$ *ограничены и удовлетворяют условию Липшица по* x_l, b_i *удовлетворяют условию Липшица по* x_0 $(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда существует единственное в* $W_2^2(V_T)$ *решение* (1), (2) *и может быть получено (вместе с производными до второго порядка включительно) как слабый предел в* $L_2(V_T)$ *продолжений решений разностной задачи* (1″), (2″) *(и их разностных отношений* $\Delta_{-0}u$, $\Delta_i u$, $\Delta_i\Delta_j u$, $\Delta_{-0}\Delta_i u$, $\Delta_{-0}\Delta_0 u$).

Замечание 1. Теорему можно обобщить на случай $f, \partial f/\partial x_i, \partial^2 f/(\partial x_i \partial x_j) \in L_2(V_T)$, приближая ее достаточно гладкими функциями с компактным носителем (см. [4]).

Замечание 2. Если предположить большую гладкость коэффициентов и правой части, то можно оценить разностные отношения более высоких порядков и получить более гладкое решение (1), (2) (в частности классическое).

Замечание 3. С помощью указанной схемы можно получить слабое решение $\in L_2(V_T)$ смешанной задачи (1′), (2′), (3′). Для этого достаточно естественным образом учесть граничные условия (3) (см. [5]), и применить лемму 5, которая, как легко видеть, остается справедливой для решений соответствующей разностной задачи.

Литература

[1] *О. А. Олейник*: Задача Коши и смешанная задача для гиперболических уравнений второго порядка вырождающихся в области и на ее границе. ДАН СССР, т. *165*, № 3 (1966), 525—528.

[2] *О. А. Ладыженская*: Смешанная задача жля гиперболического уравнения. Носква, 1953.

[3] *О. А. Олейник*: О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений, ДАН СССР, т. *163*, № 3 (1965), 577—580.

[4] *И. Копачек:* Решение задачи Коши для линейных гиперболических уравнений методом конечных разностей. Чехосл. мат. журн., т. *14* (*89*) (1966), № 1, 52—78.

[5] *И. Копачек:* Явная разностная схема для решения смешанной задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка. ЖВММФ, *т.* 4 (1964), № 5, 826—834.

Адресс автора: Sokolovská 83, Praha 8 - Karlín (Matematicko-fyzikální fakulta UK).