ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 90 * PRAHA 16. 10. 1965 * ČÍSLO 4

ÜBER DIE TRANSFORMATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG. I.

VALTER ŠEDA, Bratislava

(Eingegangen am 5. Juni 1963)

In der Arbeit sind die grundlegenden Beziehungen zwischen äquivalenten linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung angeführt.[1]) Es wird gezeigt, dass die Lösungen zweier äquivalenten Gleichungen die gleiche Struktur der Nullstellen haben. Weiter ist die Äquivalenz der zu zwei äquivalenten Gleichungen adjungierten Gleichungen bewiesen. Untersucht wurden auch die Beziehungen zwischen der Äquivalenz zweier Gleichungen und der Zerlegung der auf ihrer linken Seite auftretenden Differentialoperatoren.

Einleitung. Mit den Fragen der Transformationstheorie der Gleichungen befassten sich schon viele Mathematiker. Ihre heute schon klassischen Ergebnisse sind im Buch [1], S. 80 und weiter, und im Buch [2], S. 6–57, zusammengefasst. Sie betreffen Probleme, die sich um die Frage gruppieren, wann es möglich ist zwei Gleichungen n-ter Ordnung ineinander zu transformieren. Die Lösung dieser wichtigen Probleme ist oft formal, da hier die Existenz der die Transformation vermittelnden Funktionen nicht garantiert ist. Ausserdem wurden viele Ergebnisse nur teilweise und einige überhaupt nicht bewiesen. An der Beseitigung dieser Unzulänglichkeit wird erst in den letzten Jahren gearbeitet. O. BORŮVKA bewies in der sich mit den Fragen der Transformation der Gleichungen 2. Ordnung befassenden Arbeit [3] die Existenz und Eindeutigkeit der Transformationsfunktionen und untersuchte ihre Beziehung zu den Nullstellen der Lösungen der erwogenen Gleichungen 2. Ordnung. O. Borůvka zeigte den Weg, welchen die moderne Transformationstheorie gehen soll. In der Arbeit [4] wies er auf die Beziehung zwischen der Transformationstheorie und der in der Arbeit [5] geschaffenen Theorie der Dispersionen hin und auf die Anwendung der Transformationstheorie zur Auffindung aller Gleichungen 2. Ordnung, deren Lösungen Nullstellen mit vorgeschriebenen Eigenschaften haben. Weitere Anwendungen dieser Theorie sind in der Arbeit [6] zu finden. Die Arbeiten [7] und [8] behandeln die kompletten Transformationen, mittels welcher die Gleichungen 2.

[1]) Weiter werden wir anstatt „lineare Differentialgleichung" nur kurz „Gleichung" schreiben.

Ordnung im ganzen Definitionsintervall transformiert werden. Die angeführten Ergebnisse sind mit noch anderen im Buch [9] zusammengefasst. Ausserdem wurden diese Ergebnisse auch von anderen Autoren erweitert: von M. LAITOCH in der Arbeit [10] für Gleichungen 3. Ordnung mit Nullinvarianten, von J. MORAVČÍK in [11] für Gleichungen 4. Ordnung ebenfalls mit Nullinvarianten und vom Verfasser dieser Arbeit in [12] für Gleichungen 2. Ordnung im komplexen Gebiet. In der Arbeit [10] wird ebenfalls die Transformation der Gleichungen 1. Ordnung behandelt. Mit dieser Problematik befasst sich auch die Arbeit [13].

In der letzten Zeit erschien die umfangreiche Arbeit [14] von Z. HUSTÝ, in welcher die Beweise zu vielen in [1] ohne Beweise angeführten Behauptungen gebracht wurden, wodurch die klassische Transformationstheorie eine feste Grundlage erhielt. An diese Arbeit knüpft [15] an, wo die Transformation der adjungierten Gleichungen untersucht wird.

1. Ein grundlegender Begriff in der Transformationstheorie der Gleichungen ist der Begriff der Äquivalenz zweier Gleichungen. Zum Unterschied von der klassischen Theorie ([1], S. 188) führen wir ihn auf folgende Weise ein:

Definition 1. Es seien zwei Gleichungen derselben Ordnung $n \geqq 1$ gegeben

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(n-k)} = p_{n+1}(x)\,, \quad y^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l y}{\mathrm{d}x^l}\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \quad y^{(0)} = y\,,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n} q_k(\xi)\, v^{(n-k)} = q_{n+1}(\xi)\,, \quad v^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l v}{\mathrm{d}\xi^l}\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \quad v^{(0)} = v\,,$$

wo

$p_k(x) \in C_0(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_0(I_2)$, $k = 0, 1, \ldots, n + 1$ und $p_0(x) \neq 0$ in I_1, $q_0(\xi) \neq 0$ in I_2; I_1 und I_2 sind Intervalle. Wir werden sagen, dass die Gleichung (2) im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ der Gleichung (1) im Intervall $I_{1x} \subset I_1$ äquivalent ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existieren Funktionen $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$ derart, dass $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x) \,.\, t(x) \neq 0$ in I_{1x}.

2. Wenn $v(\xi)$ die Lösung der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ ist, dann ist die Funktion

$$(3) \qquad y(x) = t(x) \,.\, v[\xi(x)]$$

eine Lösung der Gleichung (1) im Intervall I_{1x}. Das geordnete Paar der Funktionen $\xi(x)$, $t(x)$ werden wir als Träger der Äquivalenz bezeichnen. Die Äquivalenz der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ zu der Gleichung (1) in I_{1x} mit dem Träger der Äquivalenz

$\xi(x)$, $t(x)$ werden wir symbolisch derart

$$(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$$

bezeichnen.[2])

Es ist ersichtlich, dass auch mehrere Träger der Äquivalenz existieren können. Je zwei von ihnen unterscheiden sich dann wenigstens durch eine Komponente. Wenn uns der Träger der Äquivalenz nicht wichtig erscheinen wird, werden wir das oben angeführte Symbol ohne Träger schreiben, also $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$.

Aus der Definition der Äquivalenz folgt: wenn die Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ zu der Gleichung (1) in I_{1x} äquivalent ist, dann sind in denselben Intervallen jede zwei Gleichungen äquivalent, welche wir aus den Gleichungen (1), resp. (2) durch das Multiplizieren mit den Funktionen $f(x)$, resp. $g(\xi)$ erhalten, für die gilt, dass $f(x) \in C_0(I_1)$, $f(x) \neq 0$, $x \in I_1$, $g(\xi) \in C_0(I_2)$, $g(\xi) \neq 0$ für $\xi \in I_2$. Wenn wir dies in Erwägung ziehen, erhalten wir aus den Ergebnissen der Arbeiten [10] und [3] die Behauptung, dass jede zwei Gleichungen 1., resp. 2. Ordnung ohne rechte Seite in irgendeinem Teilintervall der Definitionsintervalle dieser Gleichungen äquivalent sind, wenn in der Gleichung 2. Ordnung die Koeffizienten bei y' und y'' die 1. Ableitung haben.

Bemerkung. Wenn wir für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion die Formel (12) zusammen mit der Bezeichnung aus [16], 1. Teil, S. 82, verwenden, erhalten wir aus der Beziehung (3)

$$y^{(k)}(x) = t^{(k)}(x) \,.\, v(\xi) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} t^{(k-i)}(x) \sum_{l=1}^{i} \frac{A_{i,l}}{l!} v^{(l)}(\xi) =$$

$$= t^{(k)}(x) \,.\, v(\xi) + \sum_{l=1}^{k} \left[\sum_{i=l}^{k} \binom{k}{i} t^{(k-i)}(x) \frac{A_{i,l}}{l!} \right] v^{(l)}(\xi) \,,$$

so dass die Beziehung

$$y^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k} \left[\sum_{i=l}^{k} \binom{k}{i} \frac{A_{i,l}}{l!} t^{(k-i)}(x) \right] v^{(l)}(\xi) \,, \quad k = 0, 1, \ldots, n \,, \tag{4}$$

gilt, wo wir $A_{0,0} = 1$, $A_{1,0} = \ldots = A_{n,0} = 0$, $\binom{0}{0} = 1$ setzen. Die Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2) erfülle im Punkte $\xi_0 \in I_{2\xi}$ die Anfangsbedingungen

$$v^{(k)}(\xi_0) = v_0^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n - 1 \,.$$

Nach (3) bildet sich $v(\xi)$ auf die Lösung $y(x)$ der Gleichung (1) ab, welche im Punkte $x_0 = x(\xi_0)$ ($x(\xi)$ ist die inverse Funktion zu der Funktion $\xi(x)$) auf Grund von (4)

[2]) Es ist dem Verfasser eine liebe Pflicht an dieser Stelle dem Rezensenten Herrn Doz. Dr. Hustý für die vorgeschlagene Symbolik, sowie auch für seine, zur Verbesserung dieser Arbeit beitragenden Bemerkungen herzlich zu danken.

die Anfangsbedingungen

$$(5)\qquad y^{(k)}(x_0) = \sum_{l=0}^{k} \left[\sum_{i=l}^{k} \binom{k}{i} \frac{A_{i,l}}{l!} t^{(k-i)}(x_0) \right] v_0^{(l)}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

erfüllt.

Die Determinante des Systems (5) hat den Wert $t^n(x_0) \,.\, \xi'^{[n(n-1)]/2}(x_0) \neq 0$, deshalb bildet die Abbildung (3) ein-eindeutig die Menge der Lösungen der Gleichung (2) auf die Menge der Lösungen der Gleichung (1) ab. In Anbetracht dessen gilt der

Satz 1. $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\} \Rightarrow (1)\, I_{1x} \sim (2)\, I_{2\xi}\{x(\xi), t^{-1}[x(\xi)]\}$, *wo* $x(\xi)$ *die inverse Funktion zu der Funktion* $\xi(x)$ *ist.*

Gegeben sei die Gleichung

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{n} r_k(\eta)\, w^{(n-k)} = r_{n+1}(\eta), \quad w^{(l)} = \frac{d^l w}{d\eta^l}, \quad l = 1, \ldots, n, \quad w^{(0)} = w,$$

wo $r_k(\eta) \in C_0(I_3)$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$ und $r_0(\eta) \neq 0$ in I_3; I_3 ist ein Intervall. Es gilt der

Satz 2. $((6)\, I_{3\eta} \subset I_3 \sim (2)\, I_{2\xi}\{\eta(\xi), u(\xi)\}; (2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}) \Rightarrow (6)\, I_{3\eta} \sim$ $\sim (1)\, I_{1x}\{\eta[\xi(x)], u[\xi(x)]\, t(x)\}$.

Wenn wir zwei Gleichungen der n-ten Ordnung dann und nur dann als gleich betrachten, wenn sie auf demselbem Intervall definiert sind und dieselben Koeffizienten und dieselbe rechte Seite haben, erhalten wir aus der Reflexivität der Äquivalenz und den Sätzen 1 und 2 diese

Folgerung. *Auf der Menge der Gleichungen n-ter Ordnung existiert die Zerlegung auf Klassen der miteinander äquivalenten Gleichungen.*

Eine homogene Gleichung kann mit einer nichthomogenen Gleichung nicht äquivalent sein, und weiter, wenn zwei Gleichungen äquivalent sind, sind auch die entsprechenden homogenen Gleichungen äquivalent. Um dies genauer formulieren zu können, bezeichnen wir mit dem Symbol (1′), resp. (2′) die Gleichung (1), resp. (2) ohne rechte Seite. Also ist

$$(1')\qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(n-k)} = 0$$

$$(2')\qquad \sum_{k=0}^{n} q_k(\xi)\, v^{(n-k)} = 0\,.$$

Satz 3. *Es sei* $(2)\; I_{2\xi} \sim (1)\; I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Dann gelten diese Behauptungen*:

a. $q_{n+1}(\xi) \equiv 0$ in $I_{2\xi} \Leftrightarrow p_{n+1}(x) \equiv 0$ in I_{1x}.

b. $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$.

Beweis. Der Punkt a. folgt daraus, dass das Bild (Urbild) der trivialen Lösung bei der Transformation (3) die triviale Lösung ist und dass die Gleichungen (1) und (2) eine solche Lösung gerade dann haben, wenn sie ohne rechte Seite sind. Weiter seien $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ zwei Lösungen der Gleichung (2) und $y_1(x)$, $y_2(x)$ seien ihre Bilder bei der Abbildung (3). Für ihre Differenz gilt die Beziehung

$$(3') \qquad y_1(x) - y_2(x) = t(x) \{v_1[\xi(x)] - v_2[\xi(x)]\} ,$$

woraus der Punkt b. folgt.

Wir erwägen jetzt die Eigenschaften des Trägers der Äquivalenz. Wenn die Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ der Gleichung (1) in I_{1x} äquivalent ist, existiert wenigstens ein Träger dieser Äquivalenz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass genau ein Träger existiert, gibt uns der

Satz 4. *Es sei* $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Dann sind die drei folgenden Behauptungen äquivalent:*

a. $\{\xi(x), t(x)\}$ *ist der einzige Träger der Äquivalenz* $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$.

b. $\{x, 1\}$ *ist der einzige Träger der Äquivalenz* $(1)\, I_{1x} \sim (1)\, I_{1x}$.

c. $\{\xi, 1\}$ *ist der einzige Träger der Äquivalenz* $(2)\, I_{2\xi} \sim (2)\, I_{2\xi}$.

Beweis. Das geordnete Paar $\{\xi_1(x), t(x)\} \neq \{\xi(x), t(x)\}$ sei ein weiterer Träger der Äquivalenz $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$. Wenn $x_1(\xi)$ die inverse Funktion zu $\xi_1(x)$ ist, ist nach Satz 1 $(1)\, I_{1x} \sim (2)\, I_{2\xi}\{x_1(\xi), 1/t_1[x_1(\xi)]\}$.

Daraus ist auf Grund des Satzes 2 das Paar

$$(7a) \qquad \left\{x_1[\xi(x)], \frac{1}{t_1(x_1[\xi(x)])} \cdot t(x)\right\},$$

resp. das Paar

$$(7b) \qquad \left\{\xi[x_1(\xi)], t[x_1(\xi)] \cdot \frac{1}{t_1[x_1(\xi)]}\right\}$$

der Träger der Äquivalenz $(1)\, I_{1x} \sim (1)\, I_{1x}$, resp. der Äquivalenz $(2)\, I_{2\xi} \sim (2)\, I_{2\xi}$ verschieden von dem Paar $\{x, 1\}$, resp. $\{\xi, 1\}$.

Umgekehrt sei $\{x_2(x), t_2(x)\} \neq \{x, 1\}$ der Träger der Äquivalenz $(1)\, I_{1x} \sim (1)\, I_{1x}$. Dann ist das Paar $\{\xi[x_2(x)], t[x_2(x)] \cdot t_2(x)\} \neq \{\xi(x), t(x)\}$ der Träger der Äquivalenz $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$. Ein ähnliches Ergebniss folgt aus der Existenz des Trägers der Äquivalenz $(2)\, I_{2\xi} \sim (2)\, I_{2\xi}$, welcher von dem Paar $\{\xi, 1\}$ verschieden ist.

Wir erwägen jetzt die Beziehung der zweiten Komponente des Trägers der Äquivalenz zu der ersten und setzen zuerst voraus, dass $(1')\, I_{1x} \sim (1')\, I_{1x}\{x, t(x)\}$. Wenn die Lösung $v(x)$ der Gleichung (1') in irgendeinem Punkt $x_0 \in I_{1x}$ die Anfangsbedingungen $v(x_0) = v'(x_0) = \ldots = v^{(n-2)}(x_0) = 0$, $v^{(n-1)}(x_0) \neq 0$ erfüllt, gelten für die Lösung $y(x) = t(x) \cdot v(x)$ derselben Gleichung die Beziehungen

$$(8) \qquad y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-2)}(x_0) = 0\,, \quad y^{(n-1)}(x_0) = t(x_0) \cdot v^{(n-1)}(x_0)\,.$$

Dieselben Anfangsbedingungen erfüllt auch die Lösung $t(x_0)\,v(x)$ der Gleichung (1'). Deshalb ist $t(x)\,v(x) \equiv t(x_0)\,v(x)$, woraus $t(x) \equiv t(x_0)$ in I_{1x} mit Rücksicht auf die Stetigkeit dieser Funktion.

Wenn $(1)\,I_{1x} \sim (1)\,I_{1x}\{x, t(x)\}$, ist nach dem bereits Bewiesenen und durch Verwendung des Satzes 3 $t(x) = c$. Wenn die Funktionen $v(x)$, $c\,v(x)$ Lösungen der Gleichung (1) in I_{1x} sind, ist $c\,p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x)$ in I_{1x}, woraus im Falle $p_{n+1}(x) \not\equiv 0$ in I_{1x} folgt, dass $c = 1$ ist.

$\{\xi(x), t(x)\} \neq \{\xi(x), t_1(x)\}$ seien jetzt zwei Träger der Äquivalenz $(2)\,I_{2\xi} \sim$ $\sim (1)\,J_{1x}$. Aus der Beziehung (7a), in welcher wir $\xi_1(x) = \xi(x)$ setzen, erhalten wir, dass dann $(1)\,I_{1x} \sim (1)\,I_{1x}\{x, t(x)/t_1(x)\}$. Daraus folgt auf Grund der vorhergegangenen Erwägungen der

Satz 5. *Wenn die Paare $\{\xi(x), t(x)\}$, $\{\xi(x), t_1(x)\}$ zwei verschiedene Träger der Äquivalenz $(2)\,I_{2\xi} \sim (1)\,I_{1x}$ sind, dann ist in den entsprechenden Intervallen $q_{n+1}(\xi) \equiv 0 \equiv p_{n+1}(x)$ und $t_1(x) \equiv c\,t(x)$, c ist eine Konstante. Mit anderen Worten, die zweite Komponente $t(x)$ des Trägers der Äquivalenz $\{\xi(x), t(x)\}$ ist im Falle von Gleichungen mit rechten Seiten eindeutig durch die erste Komponente $\xi(x)$ bestimmt. Im Falle von Gleichungen ohne rechte Seiten ist sie eindeutig bestimmt bis auf die Multiplikationskonstante.*

Die Äquivalenz zweier Gleichungen definiert eine gewisse Abbildung zwischen den Mengen ihrer Lösungen. Bevor wir uns mit dieser Abbildung befassen, vollziehen wir folgende Erwägung. Wir setzen voraus, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) unhomogen sind; M_v, resp. M_y bedeute die Menge der Lösungen der Gleichung (2), resp. der Gleichung (1), M'_v, resp. M'_y die Menge der Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichung (2'), resp. (1'). Diese Bezeichnung werden wir auch weiterhin benützen. Es existiere ferner eine schlichte Abbildung Z der Menge M_v auf die Menge M_y. Die Abbildung Z und die beliebige Lösung $v_0 \in M_v$ definieren die schlichte Abbildung Z'_{v0} der Menge M'_v auf M'_y folgenderweise:

(9) Wenn $V \in M'_v$, ist $Z'_{v0}(V) = Z(V + v_0) - Z(v_0)$. Die Abbildung Z'_{v0} werden wir als durch die Abbildung Z und die Lösung v_0 induzierte Abbildung bezeichnen. Wenn Z'_{v0} isomorph ist, dann ist an der Wahl von v_0 nicht gelegen, d.h. $Z'_{v0}(V) =$ $= Z'_{\bar{v}0}(V)$ für ein beliebiges Element $V \in M'_v$, wo $v_0, \bar{v}_0 \in M_v$. Setzen wir $\bar{v}_0 =$ $= \bar{V} + v_0$, wo $\bar{V} \in M'_v$, dann ist

$$Z'_{\bar{v}0}(V) = Z(V + \bar{v}_0) - Z(\bar{v}_0) = Z(V + \bar{V} + v_0) - Z(\bar{V} + v_0) =$$
$$= Z'_{v0}(V + \bar{V}) + Z(v_0) - Z'_{v0}(\bar{V}) - Z(v_0) = Z'_{v0}(V)\,.$$

Es sei $(2)\,I_{2\xi} \sim (1)\,I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. Durch die Beziehung (3) ist dann dem Teil jeder Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ der Teil der Lösung $y(x)$ der Gleichung (1) in J_{1x} zugeordnet. Wenn wir dann der Lösung $v(\xi)$ die angeführte Lösung $y(x)$ zuordnen, ist damit die schlichte Abbildung Z der Menge M_v auf die Menge M_y definiert. Nach dem Satz 3 sind in den entsprechenden Intervallen I_{1x}, $I_{2\xi}$ die Gleichungen (1), (2) entweder beide homogen oder beide unhomogen. Im ersten Falle folgt aus der Beziehung (3), dass Z isomorph ist, im zweiten hingegen erhalten wir aus (3'), dass die induzierte Abbildung Z' der Menge M'_v auf die Menge M'_y isomorph ist.

Aus dem Isomorphismus der durch die Beziehung (3) gegebenen Abbildung Z, resp. aus der durch Z induzierten Abbildung Z' folgt, dass für die Äquivalenz (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$ genügt, wenn sich das Fundamentalsystem von Lösungen $v_1(\xi), \ldots, v_n(\xi)$ der homogenen Gleichung (2') durch die Beziehung (3) in die Lösungen der homogenen Gleichung (1') transformiert und im Falle von unhomogenen Gleichungen (1), (2) noch eine Lösung $v_0(\xi)$ der Gleichung (2) in die Lösung der Gleichung (1). Diese Bemerkung zeigt den Weg zur Verallgemeinerung des Begriffes der Äquivalenz zweier Differentialgleichungen.

Definition 2. Wir werden sagen, dass die Gleichung (2) im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ der Gleichung (1) im Intervall $I_{1x} \subset I_1$ k-äquivalent ist ($1 \leqq k \leqq n$), wenn in den entsprechenden Intervallen beide homogen oder beide unhomogen sind, wenn ein solches Funktionenpaar $\xi(x)$, $t(x)$ mit den im Begriff der Äquivalenz auftretenden Eigenschaften 1. und 2. und ein System k linear unabhängiger Lösungen $v_1(\xi), \ldots, v_k(\xi)$ der Gleichung (2') in $J_{2\xi}$ existiert, dass die Funktionen

$$(3'') \qquad y_l(x) = t(x)\, v_l[\xi(x)]\,, \quad l = 1, \ldots, k$$

im Intervall I_{1x} Lösungen der Gleichung (1') sind. Wenn (1) unhomogen ist, existiert noch die Lösung $v_0(\xi)$ der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$, für welche die Funktion

$$(3''') \qquad y_0(x) = t(x) \,.\, v_0[\xi(x)]$$

in I_{1x} die Lösung der Gleichung (1) ist.

Es ist ersichtlich, dass der Begriff der n-Äquivalenz mit dem Begriff der Äquivalenz identisch ist. Weiter transformiert sich bei der k-Äquivalenz der k-dimensionale Unterraum der Teile der Lösungen der Gleichung (2') in $J_{2\xi}$, dessen Basis das System $v_1(\xi), \ldots, v_k(\xi)$ ist, auf den k-dimensionalen Unterraum der Teile der Lösungen der Gleichung (1') in J_{1x}, welcher das System der Bilder der Lösungen $v_1(\xi), \ldots, v_k(\xi)$ als Basis hat. Im Falle unhomogener Gleichungen (1), (2) transformiert sich auch ein „verschobener" k-dimensionaler Unterraum der Teile der Lösungen der Gleichung (2) in $J_{2\xi}$ auf den „verschobenen" k-dimensionalen Unterraum der Teile der Lösungen der Gleichung (1) in I_{1x}. Wir werden uns weiter nicht mit dem Begriff der k-Äquivalenz befassen, aber es wäre interessant zu untersuchen, wie sich die Eigenschaften der Äquivalenz auf den Begriff der k-Äquivalenz übertragen.

2. Ausser der Äquivalenz der Gleichungen (1), (2) werden wir eine weitere wichtige Beziehung zwischen diesen Gleichungen erwägen, und zwar die Beziehung zwischen der Verteilung der Nullstellen ihrer Lösungen. Unsere Erwägungen beginnen wir mit folgender Bemerkung. Wir setzen voraus, dass eine schlichte Abbildung Z der

Menge M_v auf die Menge M_y vorhanden ist (M_v, M_y wie auch M'_v, M'_y haben dieselbe Bedeutung wie früher) und eine schlichte Abbildung $\xi(x)$ des Intervalls $I_{1x} \subset \subset I_1$ auf das Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ von folgender Eigenschaft: wenn $v(\xi)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (2) und $y(x)$ deren Bild bei der Abbildung Z ist, bildet $\xi(x)$ die Menge der Nullstellen der Lösung $y(x)$ in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Funktion $v(\xi)$ in $I_{2\xi}$ ab. Es ist selbstverständlich, dass bei der Abbildung Z das Bild, resp. das Urbild der trivialen Lösung wieder die triviale Lösung ist. Deshalb ist unter der angeführten Voraussetzung die Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ genau dann homogen, wenn die Gleichung (1) in I_{1x} ohne rechte Seite ist.

Und jetzt definieren wir:

Definition 3. Wir werden sagen, dass die Lösungen der Gleichung (2) im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ die gleiche Struktur der Nullstellen haben wie die Lösungen der Gleichung (1) im Intervall $I_{1x} \subset I_1$, wenn eine schlichte Abbildung Z der Menge M_v auf die Menge M_y existiert und eine derartige schlichte Abbildung $\xi(x)$ der Intervalls I_{1x} auf $I_{2\xi}$, welche in jedem Punkte $x \in I_{1x}$ die Ableitung $\xi'(x) \neq 0$ besitzt, dass für beliebige $v(\xi) \in M_v$ und $y(x) = Z[v(\xi)]$ $\xi(x)$ die Menge der Nullstellen der Lösung $y(x)$ in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Funktion $v(\xi)$ in $I_{2\xi}$ abbildet, mit der Erhaltung der Vielfachheit jeder Nullstelle. Die Abbildung Z hat auch noch diese Eigenschaft: wenn die Gleichungen (1) und (2) in den entsprechenden Intervallen I_{1x} und $I_{2\xi}$ homogen sind, ist Z isomorph, und wenn beide Gleichungen (1) und (2) in den angeführten Intervallen unhomogen sind, ist auch die durch die Abbildung Z induzierte Abbildung Z' der Menge M'_v auf die Menge M'_y isomorph.

Nach der oben angeführten Bemerkung, ohne Rücksicht darauf, ob Z isomorph ist oder nicht, kann der Fall, dass eine der Gleichungen (1), (2) in den entsprechenden Intervallen homogen und die andere unhomogen sei, nicht eintreten. Weiter ist uns bekannt, dass die isomorphe Abbildung Z' durch die Abbildung Z eindeutig bestimmt ist. Endlich erinnern wir daran, dass die Behauptung: *die Funktion $y(x)$ hat im Punkte x_0 eine k-fache Nullstelle*, für $k = 1, \ldots, n$ die übliche Bedeutung hat, d.h. $y(x_0) = \ldots = y^{(k-1)}(x_0) = 0$, $y^{(k)}(x_0) \neq 0$. Für $k = n + 1$ werden wir damit den Fall $y(x_0) = \ldots = y^{(n)}(x_0) = 0$ verstehen.

Die gleiche Struktur der Nullstellen der Lösungen (1) und (2) bedeutet, dass vom topologischen Standpunkt aus die Nullstellen der entsprechenden Lösungen dieser Gleichungen voneinander nicht zu unterscheiden sind. Ihre Anzahl, Vielfachheit und Anordnung bleibt erhalten (die Anordnung nur im Falle sgn $\xi'(x) = 1$; sie ändert sich in die umgekehrte, wenn sgn $\xi'(x) = -1$ ist). Ändern kann sich nur die Entfernung und die Lage der Nullstellen.

Mit der wichtigsten Eigenschaft der äquivalenten Differentialgleichungen befasst sich der

Satz 6. $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$ *genau dann, wenn die Lösungen der Gleichung* (2) *in* $I_{2\xi}$ *dieselbe Struktur der Nullstellen haben wie die Lösungen der Gleichung* (1) *in* I_{1x}.

Beweis. Es sei (2) $I_{2\xi} \sim (1) I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. Dann ist durch die Beziehung (3) die schlichte Abbildung Z der Menge M_v auf die Menge M_y definiert, die isomorph ist oder deren induzierte Abbildung isomorph ist. Wir erwägen eine beliebige Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2) und die ihr zugeordnete Lösung $y(x)$ der Gleichung (1). Da $t(x) \neq 0$ für $x \in I_{1x}$ ist, bildet $\xi(x)$ die Menge der Nullstellen der Lösung $y(x)$ in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Lösung $v(\xi)$ in $I_{2\xi}$ ab, wobei aus der Gleichheit (5) folgt, dass die entsprechenden Nullstellen die gleiche Vielfachheit haben. Wenn wir noch die Eigenschaften der Funktion $\xi(x)$ in Erwägung ziehen, ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass die Lösungen der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ dieselbe Struktur der Nullstellen haben wie die Lösungen der Gleichung (1) in I_{1x}. Es existiert also die Abbildung Z der Menge M_v auf die Menge M_y und die Abbildung $\xi(x)$ des Intervals I_{1x} auf $I_{2\xi}$ mit den in der Definition 3 angeführten Eigenschaften. Wir erwägen zuerst den Fall, dass beide Gleichungen (1) und (2) in den entsprechenden Intervallen I_{1x} und $I_{2\xi}$ homogen sind.

$v(\xi)$ sei eine nichttriviale Lösung der Gleichung (2) und $y(x) = Z[v(\xi)]$. Die Funktion

$$t_v(x) = \frac{y(x)}{v[\xi(x)]} \tag{10}$$

ist definiert und verschieden von Null in allen Punkten $x \in I_{1x}$, in welchen $y(x) \neq 0$. Wenn der Punkt $x_0 \in I_{1x}$ eine k-fache Nullstelle der Funktion $y(x)$ ist, und also $\xi_0 = \xi(x_0)$ eine k-fache Nullstelle der Funktion $v(\xi)$ ist, ist $k \leqq n - 1$ und in der Umgebung dieser Punkte kann $y(x) = (x - x_0)^k \,.\, \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \neq 0$, $v(\xi) = (\xi - \xi_0)^k \,.\, \psi(\xi)$, $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} \psi(\xi) = \psi(\xi_0) \neq 0$ geschrieben werden. Deshalb existiert

$$\lim_{x \to x_0} t_v(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi[\xi(x)]} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{\xi(x) - \xi(x_0)}{x - x_0}\right)^k} = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(\xi_0)} \frac{1}{[\xi'(x_0)]^k} \neq 0\,,$$

woraus (nachdem wir $t_v(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} t_v(x)$ definierten) folgt, dass die Funktion $t_v(x)$ stetig und verschieden von Null im ganzen Intervall I_{1x} ist.

Weiter zeigen wir, dass $t_v(x)$ für alle nichttrivialen Lösungen $v(\xi)$ der Gleichung (2) dasselbe ist. $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (2) und $y_1(x)$, $y_2(x)$ seien ihre Bilder.

Aus dem Isomorphismus der Abbildung Z folgt, dass die Funktion $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ das Bild der Funktion $c_1\, v_1(\xi) + c_2\, v_2(\xi)$ ist und zufolge der Definition 3 hat sie dieselben Nullstellen wie die Funktion $c_1\, v_1[\xi(x)] + c_2\, v_2[\xi(x)]$; c_1 und c_2 sind beliebige Konstanten. I^* sei die Menge von Punkten $x \in I_{1x}$, in welchen $y_2(x) \neq 0$. Auf dieser Menge gilt, dass die Nullstellen der Funktion $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ mit den $-c_2/c_1$-Stellen der Funktion $y_1(x)/y_2(x)$ identisch sind.

Eine ähnliche Behauptung gilt auch für die Nullstellen der Funktion $c_1 v_1[\xi(x)] + c_2 v_2[\xi(x)]$. Deshalb gilt in I^* die Gleichheit.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{v_1[\xi(x)]}{v_2[\xi(x)]}. \tag{11}$$

Andererseits haben wir auf Grund von (10) $y_1(x) = t_{v_1}(x) \,.\, v_1[\xi(x)]$, $y_2(x) = t_{v_2}(x) \,.\, v_2[\xi(x)]$. Nach dem Einsetzen in (11) erhalten wir in I^* mit Ausnahme der Nullstellen der Funktion $y_1(x)$ die Gleichheit $t_{v_1}(x) = t_{v_2}(x)$. Da die Nullstellen der Funktion $y_1(x)$, $y_2(x)$ isoliert sind, ist es mit Hilfe der Stetigkeit $t_{v_1}(x)$, $t_{v_2}(x)$ in I_{1x} möglich die vorhergegebene Gleichheit auf das ganze Intervall I_{1x} zu erstrekken. Diese Gleichheit gilt auch dann, wenn $v_2(\xi) = c\, v_1(\xi)$ ist. Dies folgt daraus, dass das Bild $t_{cv_1}(x) \,.\, c\, v_1[\xi(x)]$ der Lösung $c\, v_1(\xi)$ auf Grund des Isomorphismus von Z dem Ausdruck $c\, t_{v_1}(x) \,.\, v_1[\xi(x)]$ gleich ist.

Wir können also schreiben $t_v(x) = t(x)$ und nach (10) ist die zusammengesetzte Funktion (3) für jede nichttriviale Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ eine Lösung der Gleichung (1) im Intervall I_{1x}. Dasselbe gilt auf für die triviale Lösung. Wir beweisen noch, dass $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$. $x_1 \in I_{1x}$ sei ein beliebiger Punkt und $\xi_1 = \xi(x_1)$. Es existiert ein Paar unabhängiger Lösungen $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ der Gleichung (2) derart, dass in irgendeiner Umgebung O des Punktes ξ_1 ist $v_2(\xi) \neq 0$, $v_1'(\xi)\, v_2(\xi) - v_1(\xi)\, v_2'(\xi) \neq 0$. Dann kann man in der Umgebung des Punktes x_1 aus der Gleichung (11) $\xi(x)$ als zusammengesetzte Funktion $\xi(x) = F[G(x)]$ eindeutig bestimmen, wobei $F(u) \in C_n$ die inverse Funktion zur Funktion $v_1(\xi)/v_2(\xi)$ in O ist und $G(x) = y_1(x)/y_2(x) \in C_n$. Also $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$. Auf Grund der Gleichheit

$$t(x) = \frac{y_2(x)}{v_2[\xi(x)]}$$

ist in der Umgebung des Punktes x_1 die Funktion $t(x) \in C_n$ und also $t(x) \in C_n(I_{1x})$. Die Gleichung (2) ist in $I_{2\xi}$ der Gleichung (1) in I_{1x} äquivalent.

Wenn die Gleichung (1) in I_{1x} und die Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ unhomogen ist, erwägen wir eine beliebige Lösung $v_0(\xi)$ der Gleichung (2) und eine beliebige nichttriviale Lösung $v_1(\xi)$ der entsprechenden homogenen Gleichung (2'). Wir bezeichnen $y_0(x)$, resp. $y_0(x) + y_1(x)$, das Bild der Lösung $v_0(\xi)$, resp. $v_0(\xi) + v_1(\xi)$ bei der Abbildung Z. $y_1(x)$ ist als Differenz zweier Lösungen der Gleichung (1) die Lösung der Gleichung (1'). Aus dem durch die Abbildung Z induzierten Isomorphismus der Abbildung Z' folgt, dass das Bild der Lösung $v_0(\xi) + c\, v_1(\xi)$ der Gleichung (2) die Lösung $y_0(x) + c\, y_1(x)$ der Gleichung (1) ist, c ist eine beliebige Konstante. Das heisst, dass die Nullstellen der Funktionen $y_0(x) + c\, y_1(x)$ und $v_0[\xi(x)] + c\, v_1[\xi(x)]$ im Intervall I_{1x} dieselben sind. Diese sind jedoch identisch mit den $-c$-Stellen der Funktion $y_0(x)/y_1(x)$, resp. mit den $-c$-Stellen der Funktion $v_0[\xi(x)]/v_1[\xi(x)]$. Deshalb gilt auf der Menge I^{**} der Punkte $x \in I_{1x}$, in welchen $y_1(x) \neq 0$, $v_1[\xi(x)] \neq 0$, die Gleichheit

$$\frac{y_0(x)}{y_1(x)} = \frac{v_0[\xi(x)]}{v_1[\xi(x)]}.$$

Aus dieser Gleichheit folgt die Beziehung

$$(12) \qquad y_0(x)\, v_1[\xi(x)] - y_1(x)\, v_0[\xi(x)] = 0\,.$$

Da die Nullstellen der Funktionen $y_1(x)$, $v_1(\xi)$ isoliert sind, folgt aus der Stetigkeit der linken Seite der Gleichheit (12) die Gültigkeit dieser Gleichheit im ganzen Intervall I_{1x}.

Es sei eine der Funktionen $y_1(x)$, $v_1[\xi(x)]$ im Punkte x_0 gleich Null, die andere verschieden von Null, z.B. $y_1(x_0) = 0$, $v_1[\xi(x_0)] \neq 0$. Nach (12) ist $y_0(x_0) = 0$. Also ist $y_0(x_0) + c\, y_1(x_0) = 0$ für jedes c. Gleichzeitig ist $v_0[\xi(x_0)] = 0$, aber für $c \neq 0$ ist $v_0[\xi(x_0)] + c\, v_1[\xi(x_0)] \neq 0$. Der erhaltene Widerspruch besagt, dass die Funktion $\xi(x)$ die Menge der Nullstellen der Lösung $y_1(x)$ der Gleichung (1′) in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Lösung $v_1(\xi)$ der Gleichung (2′) in $I_{2\xi}$ abbildet.

Wir werden zeigen, dass die entsprechenden Nullstellen der Funktionen $v_1(\xi)$ und $y_1(x)$ dieselbe Vielfachheit haben. Es sei $v_1(\xi) = (\xi - \xi_0)^k \,.\, \psi(\xi)$, $y_1(x) = (x - x_0)^l \,.\, \varphi(x)$, $\xi(x_0) = \xi_0$, $\psi(\xi_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) \neq 0$. Weiter sei $y_0(x)$ eine solche Lösung der Gleichung (1), für welche $y_0(x_0) \neq 0$ und also auch $v_0(\xi_0) \neq 0$ ist. Aus (12) haben wir $y_0(x)\,[\xi(x) - \xi(x_0)]^k \,.\, \psi[\xi(x)] - (x - x_0)^l \,.\, \varphi(x)\, v_0[\xi(x)] = 0$ und weiter

$$(x - x_0)^{l-k} = \left[\frac{\xi(x) - \xi(x_0)}{x - x_0}\right]^k . \frac{y_0(x)\, \psi[\xi(x)]}{v_0[\xi(x)] \,.\, \varphi(x)}\,.$$

Daraus

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{l-k} = \frac{\xi'^k(x_0)\, y_0(x_0)\, \psi(\xi_0)}{v_0(\xi_0)\, \varphi(\xi_0)} \neq 0$$

und diese ist endlich, deshalb ist $k = l$.

Wenn wir noch den Isomorphismus der induzierten Abbildung Z' in Erwägung nehmen, erhalten wir, dass auch die Lösungen der homogenen Gleichung (2′) in $I_{2\xi}$ die gleiche Struktur der Nullstellen haben wie die Lösungen der homogenen Gleichung (1′) in I_{1x}. Wie wir bereits bewiesen haben, existiert eine solche Funktion $t(x)$ dass $y_1(x) = t(x)\, v_1[\xi(x)]$ ist. Nach Einsetzen in (12) erhalten wir, dass $y_0(x) = t(x) \,.\, v_0[\xi(x)]$ ist, zuerst in den Punkten $x \in I_{1x}$, in welchen $v_1[\xi(x)] \neq 0$ ist, und dann durch Benutzung der Stetigkeit der auftretenden Funktionen auch in den übrigen Punkten des Intervalls I_{1x}. Gleichzeitig erhalten wir, dass $\xi(x)$ und auch $t(x)$ aus der Klasse $C_n(I_{1x})$ sind. Also auch in diesem Falle ist $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}$, womit der Satz in seinem ganzen Umfange bewiesen ist.

Folgerung. *Wenn* $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, *bildet* $\xi(x)$ *die Nullstellen der rechten Seite* $p_{n+1}(x)$ *der Gleichung* (1) *in* I_{1x} *auf die Menge der Nullstellen der rechten Seite* $q_{n+1}(\xi)$ *der Gleichung* (2) *in* $I_{2\xi}$ *ab.*

Beweis. Die Behauptung folgt daraus, dass $p_{n+1}(x_0) = 0$ gerade dann, wenn eine Lösung $y(x)$ der Gleichung (1) existiert, welche die Bedingungen $y(x_0) = \ldots = y^{(n)}(x_0) = 0$ erfüllt. Diese Lösung ist jedoch das Bild der Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2), welche ähnliche Bedingungen im Punkte $\xi_0 = \xi(x_0)$ erfüllt.

3. In diesem Teil der Arbeit werden wir uns mit der Transformation der Wronskischen Determinante der Lösungen der linearen homogenen Gleichungen und den daraus hervorgehenden Folgerungen befassen. Die Wronskische Determinante der Funktionen $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ werden wir $W(y_1, \ldots, y_k)$ bezeichnen und ihren Wert in der Zahl x $W(y_1, \ldots, y_k)(x)$. Analogisch wird $W(v_1, \ldots, v_k)(\xi(x))$ den Wert der Wronskischen Determinante der Funktionen $v_1(\xi), \ldots, v_k(\xi)$ im Punkte $\xi(x)$ bedeuten. Dabei sei $W(y_1)(x) = y_1(x)$, $W(v_1)(\xi(x)) = v_1[\xi(x)]$. Unsere Erwägungen werden wir mit dem Hilfssatz 1 unterstützen.

Hilfssatz 1. $v_1(\xi), \ldots, v_k(\xi)$ *seien Funktionen der Klasse* $C_{k-1}(I_{2\xi})$, $\xi(x)$, $t(x)$ *Funktionen der Klasse* $C_{k-1}(I_{1x})$ *und* $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$. *Dann gilt:*

Falls $y_i(x) = t(x)\, v_i[\xi(x)]$, $x \in I_{1x}$, $i = 1, \ldots, k$, *ist*

$$W(y_1, \ldots, y_k)(x) = [t(x)]^k\, [\xi'(x)]^{k(k-1)/2} \,.\, W(v_1, \ldots, v_k)(\xi(x)) \,, \quad x \in I_{1x} \,. \tag{13}$$

Beweis. Wir bezeichnen $v_i[\xi(x)] = u_i(x)$, $x \in I_{1x}$, $i = 1, \ldots, k$, sodass $y_i(x) = t(x) \,.\, u_i(x)$. In [17], S. 41, sind (ohne Beweis) die Beziehungen

$$W(y_1, \ldots, y_k)(x) = [t(x)]^k \,.\, W(u_1, \ldots, u_k)(x) \tag{14}$$

und

$$W(u_1, \ldots, u_k)(x) = [\xi'(x)]^{k(k-1)/2} \,.\, W(v_1, \ldots, v_k)(\xi(x)) \tag{15}$$

angegeben.

Durch ihre Verbindung erhalten wir die Gleichheit (13). Da ihre Beweise ähnlich sind, wollen wir nur (15) beweisen und verwenden dabei die vollständige Induktion. Ersichtlich gilt die Beziehung (15) für $k = 1$. Sei sie richtig für $k = n - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&W(u_1, \ldots, u_n)(x) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l}\, [u_l(x)]^{(n-1)} \,.\, W(u_1 \ldots, u_{l-1}, u_{l+1}, \ldots, u_n)(x) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l}\, \{v_l[\xi(x)]\}^{(n-1)} \,.\, [\xi'(x)]^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]}\, W(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n)(\xi(x)) = \\
&= [\xi'(x)]^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{n-1,m}}{m!}\, v_l^{(m)}[\xi(x)] \,. \\
&\qquad\qquad \,.\, W(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n)(\xi(x)) = \\
&= [\xi'(x)]^{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l}\, v_l^{(n-1)}[\xi(x)] \,.\, W(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n)(\xi(x)) + \\
&\quad + [\xi'(x)]^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]} \sum_{m=1}^{n-2} \frac{A_{n-1,m}}{m!} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l}\, v_l^{(m)}[\xi(x)] \,. \\
&\qquad\qquad \,.\, W(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n)(\xi(x)) = \\
&= [\xi'(x)]^{\frac{1}{2}n(n-1)} \,.\, W(v_1, \ldots, v_n)(\xi(x)) \,,
\end{aligned}$$

weil

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{n+l}\, v_l^{(m)}[\xi(x)] \,.\, W(v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n)\,(\xi(x)) = 0$$

für $1 \leqq m \leqq n - 2$.

Satz 7. *Für $k = 0, 1, \ldots, n$ seien $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$. Die Gleichung $(\bar{2}')$ $[(\bar{1}')]$ sei adjungiert zu der homogenen Gleichung $(2')$ $[(1')]$. Dann gilt:*

$$(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\} \Leftrightarrow (\bar{2}')\, I_{2\xi} \sim (\bar{1}')\, I_{1x}\{\xi(x), t_1(x)\}\,,$$

wo $t_1(x) = q_0[\xi(x)]/(p_0(x) \,.\, t(x)\, [\xi'(x)]^{n-1})$ ist.

Beweis. Es sei $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. Dann gilt für das Fundamentalsystem von Lösungen $v_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, n$ der Gleichung $(2')$ in $I_{2\xi}$, dass die Funktionen $y_i(x) = t(x)\, v_i[\xi(x)]$, $i = 1, \ldots, n$, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $(1')$ in I_{1x} bilden. Es ist bekannt ([16], 1. Teil, S. 93), dass die Menge der Funktionen

$$w_i(\xi) = \frac{1}{q_0(\xi)} \frac{\partial \ln |W(v_1, \ldots, v_n)\,(\xi)|}{\partial v_i^{(n-1)}} = \frac{1}{q_0(\xi)} \cdot \frac{1}{W(v_1, \ldots, v_n)\,(\xi)} \,.$$
$$.\,(-1)^{n+i} \,.\, W(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)\,(\xi)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $(\bar{2}')$ ist.

Analogisch bilden die Funktionen

$$z_i(x) = \frac{1}{p_0(x)} \cdot \frac{1}{W(y_1, \ldots, y_n)\,(x)} \,.\, (-1)^{n+i} \,.\, W(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,(x)\,,$$
$$i = 1, \ldots, n\,,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $(\bar{1}')$. Aus dem Hilfssatz 1 erhalten wir, dass

$$(16) \qquad \frac{W(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,(x)}{W(y_1, \ldots, y_n)\,(x)} =$$
$$= \frac{1}{t(x)\, [\xi'(x)]^{n-1}} \frac{W(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)\,(\xi(x))}{W(v_1, \ldots, v_n)\,(\xi(x))}\,, x \in I_1\,.$$

Daraus folgt zwischen $w_i(x)$ und $z_i(x)$ die Beziehung $z_i(x) = q_0[\xi(x)]/(p_0(x)\,.$ $.\, t(x)\, [\xi'(x)]^{n-1}) \,.\, w_i[\xi(x)]$, $x \in I_{1x}$, $i = 1, \ldots, n$, aus welcher wir schon leicht die Behauptung erhalten.

Der zweite Teil des Satzes folgt daraus, dass die gegebene Gleichung zu ihrer adjungierten Gleichung adjungiert ist.

Der Satz 3 zeigte, dass wenn zwei unhomogene Gleichungen äquivalent sind, gilt dasselbe auch von den ihnen entsprechenden homogenen Gleichungen. Umgekehrt folgt aus der Äquivalenz zweier homogener Gleichungen die Äquivalenz gewisser unhomogener Gleichungen. Mit der Form dieser Gleichungen befasst sich der folgende

Satz 8. *Es sei* $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Dann gilt die Beziehung*

$$(17) \qquad \frac{p_{n+1}(x)}{p_0(x)} = [\xi'(x)]^n \,.\, t(x) \,.\, \frac{q_{n+1}[\xi(x)]}{q_0[\xi(x)]}\,, \quad x \in I_{1x}$$

genau dann, wenn

$$(18) \qquad (2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}\,.$$

Beweis. Die Gleichung (2) dividieren wir durch $q_0(\xi)$, die Gleichung (1) durch $p_0(x)$. Damit ändern sich die Lösungen dieser Gleichungen nicht. Dann können wir die beliebige Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (2) in der Form

$$(19) \qquad v(\xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i(\xi) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\, v_i(\xi) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{W_i(v_1, \ldots, v_n)(\tau)}{W(v_1, \ldots, v_n)(\tau)} \,.\, \frac{q_{n+1}(\tau)}{q_0(\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

schreiben, wo $v_1(\xi), \ldots, v_n(\xi)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $(2')$ ist, $W_i(v_1, \ldots, v_n) = W(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, $\xi_0 \in I_{2\xi}$ ist ein fester, $\xi \in I_{2\xi}$ ein beliebiger Punkt. Im Falle $n = 1$ legen wir $W_1(v_1) \equiv 1$. Aus (19) folgt für $x \in I_{1x}$

$$t(x)\, v[\xi(x)] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\, y_i(x) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{W_i(v_1, \ldots, v_n)(\tau)}{W(v_1, \ldots, v_n)(\tau)}\, \frac{q_{n+1}(\tau)}{q_0(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

wo die Funktionen $y_i(x) = t(x)\, v_i[\xi(x)]$ in I_{1x} ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $(1')$ bilden. Wenn wir die Substitution $\tau = \xi(\sigma)$ und die Beziehung (16) benützen, erhalten wir

$$(20) \qquad t(x)\, v[\xi(x)] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\, y_i(x) \,.$$

$$.\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{W_i(y_1, \ldots, y_n)(\sigma)}{W(y_1, \ldots, y_n)(\sigma)} \,.\, [\xi'(\sigma)]^n \,.\, t(\sigma) \,.\, \frac{q_{n+1}[\xi(\sigma)]}{q_0[\xi(\sigma)]}\, \mathrm{d}\sigma\,, \quad x \in I_{1x}\,.$$

Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form $L_n[y(x)] = p_{n+1}(x)$, dann besagt (20), dass $t(x)\, v[\xi(x)]$ in I_{1x} die Lösung der Gleichung $1/p_0(x) \,.\, L_n[y(x)] = [\xi'(x)]^n \,.\, t(x) \,.$ $.\, q_{n+1}[\xi(x)]/q_0[\xi(x)]$ ist. Daraus erhalten wir die Äquivalenz (17), (18).

Folgerung 1. $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\} \Leftrightarrow (2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, $p_{n+1}(x)/p_0(x) = [\xi'(x)]^n \,.\, t(x) \,.\, q_{n+1}[\xi(x)]/q_0[\xi(x)]$, $x \in I_{1x}$.

L_n sei der auf der linken Seite der Gleichung (1) stehende Differentialoperator, d.h. für eine beliebige Funktion $y(x) \in C_n(I_1)$ ist

$$L_n(y(x)) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(n-k)}(x)\,,$$

und L_n^* sei der auf der linken Seite der Gleichung (2) stehende Differentialoperator. Wenn die homogenen Gleichungen (1'), (2') äquivalent sind, besteht zwischen den Operatoren L_n und L_n^* ein gewisser Zusammenhang. Davon spricht die

Folgerung 2. $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$ *dann und nur dann, wenn die Funktionen* $\xi(x)$, $t(x)$ *die Eigenschaften der Äquivalenzträger besitzen und wenn für jede Funktion* $v(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$ *die Gleichheit*

$$\frac{L_n\{t(x) \,.\, v[\xi(x)]\}}{p_0(x)} = [\xi'(x)]^n \,.\, t(x)\, \frac{[L_n^*(v(\xi))]_{\xi=\xi(x)}}{q_0[\xi(x)]}\,, \quad x \in I_{1x}\,, \tag{21}$$

gilt.

Aus der Folgerung 2 ergibt sich die die äquivalenten differentiellen Ungleichungen betreffende

Folgerung 3. *Es sei* $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$ und $\varepsilon = \operatorname{sgn}\{[\xi'(x)]^n \,.\, t(x) \,.\, p_0(x)/q_0[\xi(x)]\}$. *Dann ist die differentielle Ungleichung*

$$L_n^*(v(\xi)) \geqq 0 \tag{22}$$

in $I_{2\xi}$ *der differentiellen Ungleichung*

$$L_n(y(x)) \geqq 0 \tag{23}$$

oder der differentiellen Ungleichung

$$L_n(y(x)) \leqq 0 \tag{23'}$$

in I_{1x} *äquivalent je nachdem, ob* $\varepsilon = 1$ *oder* $\varepsilon = -1$ *ist, mit dem gleichen Äquivalenzträger.*

Dabei bedeutet die letzte Behauptung, dass *für eine beliebige Funktion* $v(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$, *welche in* $I_{2\xi}$ *die Ungleichung* (22) *erfüllt,* $y(x) = t(x) \,.\, v[\xi(x)]$ *die Lösung der Ungleichung* (23), *resp.* (23') *in* I_{1x} *ist.*

Weiter werden wir die Beziehungen zwischen der Äquivalenz der Differentialgleichungen und der Zerlegung der auf der linken Seite dieser Gleichungen auftretenden Operatoren erwägen. Es wird von Nutzen sein hierbei folgenden Begriff einzuführen. Gegeben sei die Menge M_1 von m Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n_i} p_{i,k}(x)\, y^{(n_i-k)} = p_{i,n_i+1}(x)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

in welchen die Funktionen $p_{i,k}(x) \in C_0(I_1)$ und $p_{i,0}(x) \neq 0$, $x \in I_1$. Weiter sei M_2 die Menge von m Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n_i} q_{i,k}(\xi)\, v^{(n_i-k)} = q_{i,n_i+1}(\xi)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Über die Funktionen $q_{i,k}(\xi)$ nehmen wir an, dass sie aus der Klasse $C_0(I_2)$ sind und $q_{i,0}(\xi) \neq 0$ für $\xi \in I_2$ ist.

Definition 4. Wir werden sagen, dass die Menge M_2 im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ der Menge M_1 im Intervall $I_{1x} \subset I_1$ gleich äquivalent ist, wenn solche Funktionen $\xi(x)$, $t(x)$ mit den Eigenschaften der Äquivalenzträger für $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$ existieren, dass folgendes gilt: Wenn $v(\xi)$ eine beliebige Lösung der i-ten ($i = 1, \ldots, m$) Gleichung der Menge M_2 in $I_{2\xi}$ ist, ist die zusammengesetzte Funktion $y(x) = t(x)\, v[\xi(x)]$ in I_{1x} die Lösung der i-ten Gleichung der Menge M_1 für $i = 1, \ldots, m$. Das geordnete Paar $\{\xi(x), t(x)\}$ nennen wir den Träger dieser gleichen Äquivalenz.

Die Beziehung der gleichen Äquivalenz kann abgeschwächt werden. Es existieren $m + 1$ Funktionen $\xi(x)$, $t_1(x), \ldots, t_m(x)$ mit den Eigenschaften: $t_i(x) \in C_{n_i}(I_{1x})$, $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$, $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x) \,.\, t_1(x) \ldots t_m(x) \neq 0$ für $x \in I_{1x}$, wobei $I_{1x} \subset I_1$, $I_{2\xi} \subset I_2$ Intervalle sind. Für diese Funktionen gelte:

Wenn $v(\xi)$ eine beliebige Lösung der i-ten Gleichung der Menge M_2 im Intervall $I_{2\xi}$ ist, ist die zusammengesetzte Funktion

$$y(x) = t_i(x) \,.\, v[\xi(x)]$$

die Lösung der i-ten Gleichung der Menge M_1 im Intervall I_{1x} für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann sagen wir, *dass die Menge M_2 im Intervall $I_{2\xi}$ der Menge M_1 im Intervall I_{1x} fast gleich äquivalent ist.* Es ist ersichtlich, dass wenn M_2 in $I_{2\xi}$ der Menge M_1 in I_{1x} gleich äquivalent ist, ist sie auch fast gleich äquivalent. Weiter sehen wir, dass die Beziehung der gleichen Äquivalenz und der fast gleichen Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Aus der fast gleichen Äquivalenz zweier Mengen von Differentialgleichungen folgt die Äquivalenz jeder Gleichung der ersten Menge mit der entsprechenden Gleichung der zweiten Menge.

Den linearen homogenen Differentialoperator, welcher im Intervall I regulär ist, d.h. dessen Koeffizienten im Intervall I definiert und stetig sind und dessen Koeffizient bei der höchsten Ableitung dort verschieden von Null ist, werden wir im folgenden der Einfachheit halber als *Operator im Intervall I* bezeichnen. Wenn wir die Zerlegung des Operators L_n n-ter Ordnung im Intervall I in ein symbolisches Produkt $L_{m,n_m} \ldots L_{2,n_2}, L_{1,n_1}$ der Operatoren $L_{1,n_1}, L_{2,n_2}, \ldots, L_{m,n_m}$ (regulärer) in I erwägen werden, wird im Operator L_{i,n_i} der erste Index die Reihenfolge (von rechts nach links) dieses Operators im Produkt bedeuten, der zweite aber die Ordnung dieses Operators (in unserem Falle ist er der Ordnung n_i). Dabei ist $n_1 + \ldots + n_m = n$. Ein einziger Index wird die Ordnung des Operators bezeichnen. Den Operator L in I, welcher sich nicht in ein Produkt wenigstens zweier Operatoren in I zerlegen lässt, werden wir als *einfachen Operator in I* bezeichnen. Der Operator L erster Ordnung ist einfach. Über die Zerlegung von Operatoren höherer als erster Ordnung spricht der Hilfssatz 2, welcher eine Verallgemeinerung eines Lemma von MAMMANA ist ([18], S. 198).

Hilfssatz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass es möglich ist den Operator L_n, $n \geqq 2$, im Intervall I in das Produkt $L_n = L_{m,n_m} \dots L_{2,n_2} L_{1,n_1}$ zu zerlegen, ist die Existenz eines Fundamentalsystems von Lösungen $y_1(x), \dots, \dots, y_n(x)$ in I der Gleichung*

$$(24) \qquad L_n(y(x)) = 0$$

derart, dass die Mengen der Funktionen

$$(25) \qquad y_1(x), \dots, y_{n_1+\dots+n_i}(x)\,, \quad i = 1, \dots, m\,,$$

der Reihe nach Fundamentalsysteme von Lösungen in I der Gleichungen

$$(26) \qquad L_{i,n_i} \dots L_{1,n_1}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1, \dots, m$$

sind und dass das Produkt der bei den höchsten Ableitungen in den Operatoren L_{i,n_i}, $i = 1, \dots, m$, stehenden Koeffizienten dem Koeffizient bei der höchsten Ableitung im Operator L_n gleich ist.

Beweis. In I existiere die Zerlegung $L_n = L_{m,n_m} \dots L_{2,n_2} L_{1,n_1}$. Da die Gleichungen (26) die Eigenschaft haben, dass die Lösungen der i-ten von ihnen zugleich die Lösungen der $(i + 1)$-ten, ..., der m-ten Gleichung $(i = 1, \dots, m - 1)$ sind, können wir das Fundamentalsystem von Lösungen in I $y_1(x), \dots, y_{n_1}(x)$ der ersten von ihnen fortschreitend bis auf das Fundamentalsystem von Lösungen in I $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der letzten Gleichung derart ergänzen, dass die Funktionen $y_1(x), \dots, y_{n_1+\dots+n_i}(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen in I der i-ten Gleichung aus dem System (26) bilden.

Umgekehrt, es existiere ein Fundamentalsystem von Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ in I der Gleichung (24) derart, dass die Mengen der Funktionen (25) der Reihe nach Fundamentalmengen von Lösungen in I der Gleichungen (26) sind. Dann haben die Gleichungen $L_n(y(x)) = 0$, $L_{m,n_m} \dots L_{2,n_2} L_{1,n_1}\ (y(x)) = 0$ das gleiche Fundamentalsystem von Lösungen und der Veraussetzung gemäss auch gleiche Koeffizienten bei der höchsten Ableitung, deshalb gilt die Gleichheit $L_n = L_{m,n_m} \dots L_{2,n_2} L_{1,n_1}$.

Bemerkung. Wenn es sich nicht um die Form der Zerlegung des Operators L_n handelt, sondern nur darum, ob es möglich ist diesen Operator zu zerlegen, ist der folgende mit dem Hilfssatz 2 verwandte Satz von Nutzen.

Hilfssatz 2'. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass es möglich ist den Operator L_n, $n \geqq 2$, im Intervall I in das Produkt von m Operatoren zu zerlegen, wobei der erste, von rechts nach links gelesen, der Ordnung n_1 ist, der* *zweite der Ordnung n_2 usw. und der m-te der Ordnung n_m ist, ist die Existenz eines solchen Fundamentalsystems von Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ in I der Gleichung* (24) *dass*

$$(26') \qquad W(y_1, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_i})(x) \neq 0$$

für alle $x \in I$, $i = 1, \ldots, m$.

Beweis. Die notwendige Bedingung folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 2.

Die hinreichende Bedingung: Mit Hinsicht auf (26') sind die Mengen der Funktionen (25) der Reihe nach fundamentale Mengen von Lösungen in I irgendwelcher Gleichungen, z.B. der Gleichungen

$$(26'') \qquad L_{n_1+\ldots+n_i}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Da die Lösungen jeder Gleichung aus der Menge (26") gleichzeitig Lösungen aller nachfolgenden Gleichungen dieser Menge sind, existieren solche Operatoren L_{2,n_2}, $L_{3,n_3}, \ldots, L_{m,n_m}$, dass $L_{n_1+n_2} = L_{2,n_2}L_{n_1}$, $L_{n_1+n_2+n_3} = L_{3,n_3}L_{n_1+n_2}, \ldots$, $L_n = L_{m,n_m}L_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}}$ ([16], 2. Teil, S. 176). Aus dieser Gleichheit folgt $L_n = L_{m,n_m} \ldots L_{2,n_2}L_{1,n_1}$ wo $L_{1,n_1} = L_{n_1}$ ist, was zu beweisen war.

Wir belassen die Bezeichnung L_n, resp. L_n^*, des auf der linken Seite der Gleichung (1'), resp. der Gleichung (2'), auftretenden Operators. Wir erinnern daran, dass $p_0(x)$, resp. $q_0(\xi)$ Koeffizienten bei der höchsten Ableitung im Operator L_n, resp. L_n^* sind.

Unter der Voraussetzung der Äquivalenz der Gleichungen (1'), (2') gilt von der Zerlegung der Operatoren L_n, L_n^* der

Satz 9. *Es sei* $(2')\,I_{2\xi} \sim (1')\,I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Dann gilt:*

1. *Wenn der Operator L_n^* in $I_{2\xi}$ einfach ist, ist der Operator L_n einfach in I_{1x}.*
2. *Wenn eine Zerlegung des Operators L_n^* in $I_{2\xi}$ in ein symbolisches Produkt*

$$(27) \qquad L_n^* = L_{m,n_m}^* \ldots L_{2,n_2}^* L_{1,n_1}^*$$

existiert, kann der Operator

$$\frac{q_0[\xi(x)]}{p_0(x)\,[\xi'(x)]^n}\,L_n$$

in das Produkt

$$(28) \qquad \frac{q_0[\xi(x)]}{p_0(x)\,[\xi'(x)]^n}\,L_n = L_{m,n_m} \ldots L_{2,n_2}L_{1,n_1}$$

derart zerlegt werden, dass in $I_{2\xi}$ die Menge der Gleichungen

$$(29) \qquad L_{i,n_i}^*(v(\xi)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

der Menge der Gleichungen

$$(30) \qquad L_{i,n_i}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1\,, \ldots, m\,,$$

in I_{1x} gleich äquivalent ist mit dem Äquivalenzträger $\{\xi(x), t(x)\}$. Zwischen den Koeffizienten $p_{i,0}(x)$ und $q_{i,0}(\xi)$ bei der höchsten Ableitung in den Operatoren L_{i,n_i} und L^*_{i,n_i} gilt dabei die Beziehung

$$(31) \qquad p_{i,0}(x) = \frac{q_{i,0}[\xi(x)]}{[\xi'(x)]^{n_i}}\,, \quad x \in I_{1x}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Beweis. Nach dem Hilfssatz 2′ ist der Operator L^*_n einfach in $I_{2\xi}$ dann und nur dann, wenn die Wronskische Determinante aller k linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (2′), $1 \leqq k \leqq n - 1$, in $I_{2\xi}$ wenigstens eine Nullstelle hat. Eine analoge Behauptung gilt für den Operator L_n in I_{1x}. Da die Funktion $\xi(x)$ auf Grund des Hilfssatzes 1 die Nullstellen der Wronskischen Determinante der k linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (1′) in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen in $I_{2\xi}$ der Wronskischen Determinante der entsprechenden linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (2′) abbildet, ist der Operator L^*_n einfach in $I_{2\xi}$ dann und nur dann, wenn L_n in I_{1x} einfach ist.

Wenn sich der Operator L^*_n in $I_{2\xi}$ in das Produkt (27) zerlegen lässt, folgt aus dem Hilfsatz 2 die Existenz eines solchen Fundamentalsystems von Lösungen $v_1(\xi)$, $v_2(\xi), \ldots, v_n(\xi)$ der Gleichung (2′), dass die Mengen der Funktionen

$$v_1(\xi), \ldots, v_{n_1+\ldots+n_i}(\xi)\,,$$

fundamentale Mengen der Lösungen in $I_{2\xi}$ der Gleichungen

$$(32) \qquad L^*_{i,n_i} \ldots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m$$

sind und dass

$$(33) \qquad q_0(\xi) = q_{1,0}(\xi) \cdot q_{2,0}(\xi) \ldots q_{m,0}(\xi)\,.$$

Dann gilt für die durch die Beziehung

$$y_i(x) = t(x)\, v_i[\xi(x)]\,, \quad x \in I_{1x}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gegebenen Lösungen $y_i(x)$ der Gleichung (1′) in I_{1x}, dass die Wronskischen Determinanten der Funktionen

$$(34) \qquad y_1(x), \ldots, y_{n_1+\ldots+n_i}(x)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

in I_{1x} verschieden von Null sind, und die Funktionen (34) bilden also ein Fundamentalsystem von Lösungen in I_{1x} der Gleichungen

$$(35) \qquad L_{i,n_i} \ldots L_{1,n_1}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

welche bis auf multiplikative von Null verschiedene Funktionen eindeutig bestimmt sind. Dieselben werden durch die Wahl $p_{i,0}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, bestimmt.

Wenn wir (31) setzen, folgt mit Rücksicht auf die Gleichheit (33), dass beide Operatoren $q_0[\xi(x)]/p_0(x)\,[\xi'(x)]^n \,.\, L_n$, $L_{m,n_m} \ldots L_{2,n_2} L_{1,n_1}$ bei der höchsten Ableitung denselben Koeffizienten haben, und auf Grund des Hilfssatzes 2 gilt die Gleichheit (28).

Durch Induktion im Endlichen beweisen wir noch die gleiche Äquivalenz der Menge der Gleichungen (29) in $I_{2\xi}$ und der Menge der Gleichungen (30) in I_{1x}, deren Äquivalenzträger $\{\xi(x), t(x)\}$ ist. Dieses Paar tritt während des ganzen Beweises des Satzes in der Rolle des Äquivalenzträgers auf. Vor allem ist die Menge der Gleichungen (32) in $I_{2\xi}$ der Menge der Gleichungen (35) in I_{1x} gleich äquivalent. Setzen wir voraus, dass die Untermenge der Menge der Gleichungen (29) für $i = 1, \ldots, k$ $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ der entsprechenden Untermenge der Menge der Gleichungen (30) gleich äquivalent ist, dann ist für eine beliebige Lösung $z(\xi)$ in $I_{2\xi}$ der Gleichung

$$L^*_{k+1,n_{k+1}}(v(\xi)) = 0 \tag{36}$$

die Gleichung

$$L^*_{k,n_k} \ldots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = z(\xi) \tag{37}$$

in $I_{2\xi}$ gemäss Satz 8 mit Rücksicht auf die Gleichheiten (31) für $i = 1, \ldots, k$ der Gleichung

$$L_{k,n_k} \ldots L_{1,n_1}(y(x)) = t(x)\, z[\xi(x)] \tag{38}$$

äquivalent.

Wir benützen jetzt den

Hilfssatz 3. *Wenn $z(\xi)$ eine beliebige Lösung in $I_{2\xi}$ der Gleichung (36) ist, erfüllt jede Lösung der Gleichung (37) in $I_{2\xi}$ die Gleichung*

$$L^*_{k+1,n_{k+1}} L^*_{k,n_k} \ldots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = 0 \tag{39}$$

und umgekehrt, zu jeder Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (39) in $I_{2\xi}$ existiert die Lösung $z_1(\xi)$ der Gleichung (36) in $I_{2\xi}$ derart, dass $v(\xi)$ die Lösung der Gleichung (37) mit der rechten Seite $z_1(\xi)$ ist.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist offensichtlich. Jetzt sei $\xi_0 \in I_{2\xi}$ ein beliebiger Punkt. Die Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (39) erfüllt im Punkte ξ_0 irgendwelche Anfangsbedingungen, z.B.

$$v^{(i)}(\xi_0) = v_0^i\,, \quad i = 0, \ldots, n_1 + \ldots + n_{k+1} - 1\,. \tag{40}$$

Wenn wir die Beziehungen (40) in die Gleichungen

$$z_1^{(i)}(\xi_0) = \left(\frac{d^i}{d\xi^i}\{L^*_{k,n_k} \dots L^*_{1,n_1}(v(\xi))\}\right)_{\xi=\xi_0}, \quad i = 0, \dots, n_{k+1} - 1,$$

einsetzen, können wir daraus die Werte $z_1^{(i)}(\xi_0)$, $i = 0, \dots, n_{k+1} - 1$, bestimmen. Die durch sie bestimmte Lösung $z_1(\xi)$ der Gleichung (36) in $I_{2\xi}$ hat die Eigenschaft, dass die durch die Anfangsbedingungen

$$v^{(i)}(\xi_0) = v_0^i, \quad i = 0, \dots, n_1 + \dots + n_k - 1,$$

bestimmte Lösung $v(\xi)$ der Gleichung (37) mit der rechten Seite $z_1(\xi)$ auch die übrigen Bedingungen (40) erfüllt. Daraus folgt der zweite Teil des Satzes.

Nach dem Hilfssatz 3 bilden die Lösungen der Gleichungen (37) für alle $z(\xi)$ die Menge von Lösungen der Gleichung (39). Diese Gleichung jedoch ist in $I_{2\xi}$ der Gleichung

$$L_{k+1,n_{k+1}} L_{k,n_k} \dots L_{1,n_1}(y(x)) = 0 \tag{41}$$

in I_{1x} äquivalent. Wenn wir noch die Äquivalenz der Gleichungen (37) und (38) berücksichtigen, erhalten wir daraus, dass die Menge der Lösungen der Gleichungen (38) für alle $z(\xi)$ in I_{1x} mit der Menge der Gleichungen (41) identisch ist. Der Hilfssatz 3 ergibt daraus, dass der Ausdruck $t(x) \, . \, z[\xi(x)]$ in I_{1x} eine Lösung der Gleichung

$$L_{k+1,n_{k+1}}(y(x)) = 0 \tag{42}$$

sein muss, und daher ist $(36)\, I_{2\xi} \sim (42)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. Wir haben bewiesen: wenn die ersten k Gleichungen der Menge (29) den entsprechenden Gleichungen der Menge (30) gleich äquivalent sind, so gilt dasselbe auch von den ersten $k + 1$ Gleichungen. Da $L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = 0$, $I_{2\xi} \sim L_{1,n_1}(y(x)) = 0$, $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, ist damit der Satz 9 bewiesen. Wir wollen noch bemerken, dass wir die Beziehung (31) für $i = m$ im Beweis nicht benutzen. Wir schreiben sie nur der Symmetrie halber, welche infolge dieses Satzes hervorragt.

Folgerung. *Es sei* $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Dann gilt:*

Existiert die Zerlegung des Operators L^*_n *in* $I_{2\xi}$ *in das symbolische Produkt*

$$L^*_n = L^*_{n_1} \dots L^*_{n_1} L^*_{n_1}$$

m gleicher Operatoren $(m \, . \, n_1 = n)$, *dann lässt sich der Operator*

$$\frac{q_0[\xi(x)]}{p_0(x)\,[\xi'(x)]^n} L_n$$

in I_{1x} *in das Produkt*

$$\frac{q_0[\xi(x)]}{p_0(x)\,[\xi'(x)]^n} L_n = L_{n_1} \dots L_{n_1} L_{n_1}$$

m gleicher Operatoren derart zerlegen, dass $L^*_{n_1}(v(\xi)) = 0$, $I_{2\xi} \sim L_{n_1}(y(x)) = 0$, $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. *Zwischen den Koeffizienten* $p_{1,0}(x)$ *und* $q_{1,0}(\xi)$ *bei der höchsten Ableitung in den Operatoren* L_{n_1} *und* $L^*_{n_1}$ *gilt dann die Beziehung*

$$p_{1,0}(x) = \frac{q_{1,0}[\xi(x)]}{[\xi'(x)]^{n_1}}. \tag{43}$$

Der Satz 9 behauptete, dass sich zwei äquivalente Gleichungen in das Produkt äquivalenter Gleichungen zerlegen lassen. Der folgende Satz spricht davon, dass umgekehrt das Produkt äquivalenter Gleichungen mit passenden Koeffizienten bei der höchsten Ableitung zwei äquivalente Gleichungen gibt.

Satz 10. *Die Menge der Gleichungen*

$$L^*_{i,n_i}(v(\xi)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{44}$$

im Intervall $I_{2\xi}$ *sei der Menge der Gleichungen*

$$L_{i,n_i}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

im Intervall I_{1x} *gleich äquivalent, wobei der Träger der Äquivalenz* $\{\xi(x), t(x)\}$ *die Eigenschaft hat, dass* $\xi(x), t(x) \in C_n(I_{1x})$, $n = n_1 + \ldots + n_m$. $p_{i,0}(x)$, *resp.* $q_{i,0}(\xi)$, *seien Koeffizienten bei der höchsten Ableitung im Operator* L_{i,n_i}, *resp.* L^*_{i,n_i}. *Es sei weiter* $\bar{L}_{i,n_i}$ *der in* I_{1x} *durch die Beziehung*

$$\bar{L}_{i,n_i} = \frac{q_{i,0}[\xi(x)]}{p_{i,0}(x)\,[\xi'(x)]^{n_i}}\, L_{i,n_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{45}$$

definierte Operator. Dann gilt:

Wenn sich das Produkt $L^*_{m,n_m} \ldots L^*_{2,n_2} L^*_{1,n_1} = L^*_n$ *in* $I_{2\xi}$ *bilden lässt, ist es möglich das Produkt* $\bar{L}_{m,n_m} \ldots \bar{L}_{2,n_2} \bar{L}_{1,n_1} = \bar{L}_n$ *in* I_{1x} *zu bilden und die Gleichung*

$$L^*_n(v(\xi)) = 0 \tag{46}$$

ist in $I_{2\xi}$ *der Gleichung*

$$\bar{L}_n(y(x)) = 0 \tag{47}$$

in I_{1x} *äquivalent mit dem Träger der Äquivalenz* $\{\xi(x), t(x)\}$.

Beweis. Aus der Definition der Operatoren $\bar{L}_{i,n_i}$ folgt, dass die Menge der Gleichungen (44) in $I_{2\xi}$ auch der Menge der Gleichungen

$$\bar{L}_{1,n_i}(y(x)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{48}$$

in I_{1x} gleich äquivalent ist mit dem Träger der Äquivalenz $\{\xi(x), t(x)\}$. Wenn man in $I_{2\xi}$ das Produkt $L^*_{m,n_m} \ldots L^*_{2,n_2} L^*_{1,n_1} = L^*_n$ bilden kann, existiert nach dem Hilfssatz 2 ein Fundamentalsystem von Lösungen $v_1(\xi)$, $v_2(\xi), \ldots, v_n(\xi)$ der Gleichung (46) in $I_{2\xi}$, deren Untermengen

$$v_1(\xi), \ldots, v_{n_1+\ldots+n_i}(\xi)\,, \quad i = 1, \ldots, m$$

fundamentale Mengen von Lösungen der Gleichungen

$$L^*_{i,n_i} \ldots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{49}$$

sind.

Es sei

$$y_i(x) = t(x)\,.\,v_i[\xi(x)]\,, \quad x \in I_{1x}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Mit Rücksicht darauf, dass für $x \in I_{1x}$, $i = 1, \ldots, m$, $W(y_1, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_i})(x) \neq 0$ ist, sind die Mengen

$$y_1(x), \ldots, y_{n_1+\ldots+n_i}(x)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

fundamentale Mengen von Lösungen in I_{1x} der Gleichungen

$$\tilde{L}_{i,n_i} \ldots \tilde{L}_{2,n_2}\bar{L}_{1,n_1}(y(x)) = 0\,. \tag{50}$$

Die erste dieser Gleichungen ist $\bar{L}_{1,n_1}(y(x)) = 0$. Den Koeffizient bei der höchsten Ableitung im Operator $\tilde{L}_{i,n_i}$ setzen wir gleich dem Koeffizienten bei der höchsten Ableitung in $\bar{L}_{i,n_i}$, $i = 2, \ldots, m$. Um zu beweisen, dass $\tilde{L}_{2,n_2} = \bar{L}_{2,n_2}, \ldots, \tilde{L}_{m,n_m} = \bar{L}_{m,n_m}$ ist, genügt es noch zu zeigen, dass die Gleichung

$$\tilde{L}_{i,n_i}(y(x)) = 0$$

in I_{1x} dieselben Lösungen wie die Gleichung $\bar{L}_{i,n_i}(y(x)) = 0$, $i = 2, \ldots, m$, hat. Wir werden uns dabei an die gleiche Äquivalenz der Mengen der Gleichungen (44), (48) und (49), (50) mit dem Träger der Äquivalenz $\{\xi(x), t(x)\}$ stützen. Den Beweis führen wir mit der Induktion im Endlichen durch.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir $\bar{L}_{1,n_1}$ mit dem Zeichen $\tilde{L}_{1,n_1}$. Wir setzen jetzt voraus, dass für $i = 1, \ldots, k$ $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ die Gleichheit $\tilde{L}_{i,n_i} = \bar{L}_{i,n_i}$ gilt. $z(\xi)$ sei eine beliebige Lösung in $I_{2\xi}$ der Gleichung $L^*_{k+1,n_{k+1}}(v(\xi)) = 0$. Dann ist die Gleichung

$$L^*_{k,n_k} \ldots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = z(\xi) \tag{51}$$

gemäss Satz 8 mit Rücksicht auf die Beziehungen (45) für $i = 1, \ldots, k$ in $I_{2\xi}$ der Gleichung

$$\bar{L}_{k,n_k} \ldots \bar{L}_{1,n_1}(y(x)) = t(x)\,.\,z[\xi(x)] \tag{52}$$

in I_{1x} äquivalent. $t(x)\,z[\xi(x)]$ ist die Lösung in I_{1x} der Gleichung

$$\bar{L}_{k+1,n_{k+1}}(y(x)) = 0\,. \tag{53}$$

Wenn also $v(\xi)$ die Lösung der Gleichung (51) in $I_{2\xi}$ ist, ist $t(x)\, v[\xi(x)]$ die Lösung in I_{1x} der Gleichung (52). $v(\xi)$ ist jedoch in $I_{2\xi}$ auch die Lösung der Gleichung

$$L^*_{k+1,n_{k+1}} L^*_{k,n_k} \dots L^*_{1,n_1}(v(\xi)) = 0$$

und deshalb erfüllt $t(x)\, v[\xi(x)]$ in I_{1x} die Gleichung

$$\tilde{L}_{k+1,n_{k+1}} \bar{L}_{k,n_k} \dots \bar{L}_{1,n_1}(y(x)) = 0$$

und gemäss dem Hilssatz 3 auch die Gleichung

$$\bar{L}_{k,n_k} \dots \bar{L}_{1,n_1}(y(x)) = u(x) \tag{54}$$

wo $u(x)$ die Lösung in I_{1x} der Gleichung

$$\tilde{L}_{k+1,n_{k+1}}(y(x)) = 0 \tag{55}$$

ist. $t(x)\, v[\xi(x)]$ ist die Lösung der Gleichung (52) und zugleich auch der Gleichung (54), deshalb ist $t(x)\, z[\xi(x)] = u(x)$. Jede Lösung der Gleichung (53) ist die Lösung der Gleichung (55). Daraus folgt die Gleichheit $\tilde{L}_{k+1,n_{k+1}} = \bar{L}_{k+1,n_{k+1}}$ und damit ist der Beweis des Satzes 10 beendet. Wir erinnern daran, dass wir im Beweis die Gleichheit (45) für $i = m$ nicht benötigen und diese nur der Symmetrie halber haben.

Folgerung. *Es sei* $L^*_{n_1}(v(\xi)) = 0$, $I_{2\xi} \sim L_{n_1}(y(x)) = 0$, $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, *wobei der Träger der Äquivalenz die Eigenschaft hat, dass* $\xi(x)$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$, $n = m \,.\, n_1$, *m ist eine natürliche Zahl.* $p_{1,0}(x)$, *resp.* $q_{1,0}(\xi)$ *seien Koeffizienten bei der höchsten Ableitung im Operator* L_{n_1}, *resp. im Operator* $L^*_{n_1}$. *Weiter sei* $\bar{L}_{n_1}$ *in* I_{1x} *ein durch die Beziehung*

$$\bar{L}_{n_1} = \frac{q_{1,0}[\xi(x)]}{p_{1,0}(x)\, [\xi'(x)]^{n_1}}\, L_{n_1}$$

definierter Operator.

Dann gilt:

Wenn ein Produkt $L^*_{n_1} \dots L^*_{n_1} = L^*_n$ *m gleicher Faktoren in* $I_{2\xi}$ *existiert, existiert auch das Produkt* $\bar{L}_{n_1} \dots \bar{L}_{n_1} = \bar{L}_n$ *m gleicher Faktoren in* I_{1x} *und* $L^*_n(v(\xi)) = 0$, $I_{2\xi} \sim L_n(y(x)) = 0$, $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$.

Literatur

[1] *L. Schlesinger:* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II 1, Leipzig 1897.

[2] *E. I. Wilczynski:* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig 1906.

[3] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., *41*, 1956, 325–342.

[4] *O. Borůvka:* Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., T. *1* (*49*), 1957, 125–130.

[5] *О. Борувка:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка. Czech. Math. Journ., *3* (78), 1953, 199—255.
[6] *F. Neuman:* Sur les équations différentielles linéaires du second ordre dont les solutions ont des racines formant une suite convexe. Acta math. Acad. Sci. Hung. T *13*, 1962, 281—287.
[7] *O. Borůvka:* Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app. *49*, 1960, 229—252.
[8] *O, Borůvka:* Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app. *58*, 1962, 317—334.
[9] *O. Borůvka:* Transformationstheorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (im Druck).
[10] *М. Даитох:* О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений. Czech. Math. Journ. *10* (85), 1960, 258—270.
[11] *J. Moravčík:* Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc. Acta F.R.N. Univ. Comen. VI-6., Mathematica 1961, 327—334.
[12] *V. Šeda:* Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu v komplexnom obore. Acta F.R.N. Univ. Comen. II-5-6, Mathematica 1957, 229—254.
[13] *K. Dudašková:* Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu. Acta F.R.N. Univ. Comen. IX., 2 — Mathematica 1964, 99—101.
[14] *Z. Hustý:* Über die Transformation and Äquivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Czech. Math. J. (im Druck).
[15] *Z. Hustý:* Adjungierte und selbstadjungierte lineare Differentialgleichungen. Archivum mathematicum (Brno), T. 1 (1965), 21—34.
[16] *Дж. Сансоне:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, 2, перевод с итальянского. Москва 1953.
[17] *E. G. C. Poole:* Introduction to the theory of linear differential equations. Oxford 1936.
[18] *G. Mammana:* Decompositione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Zeitsch. *33*, 1931, 186—231.

Výťah

O TRANSFORMÁCII LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC n-TÉHO RÁDU I.

VALTER ŠEDA, Bratislava

V práci sa pojednáva o transformácii lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu. Základný pojem teórie transformácie je *pojem ekvivalencie*, zavedený nasledujúcim spôsobom: *Nech sú dané dve lineárne rovnice* (1), (2), *v ktorých* $p_k(x) \in C_0(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_0(I_2)$, $p_0(x) \neq 0$, $q_0(\xi) \neq 0$. *Rovnica* (2) *je v intervale* $I_{2\xi} \subset I_2$ *ekvivalentná s rovnicou* (1) *v intervale* $I_{1x} \subset I_1$, *ak sú splnené tieto dve podmienky:* 1. *Jestvujú funkcie* $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$ *také, že* $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x) \,.\, t(x) \neq 0$ *v* I_{1x}. 2. *Ak* $v(\xi)$ *je ľubovoľné riešenie rovnice* (2) *v* $I_{2\xi}$, *potom funkcia* (3) *je riešením rovnice* (1) *v* I_{1x}. *Usporiadaná dvojica* $\{\xi(x), t(x)\}$ *sa nazýva nositeľom tejto ekvivalencie. Symbolicky sa ekvivalencia rovnice* (2) *v* $I_{2\xi}$ *s rovnicou* (1) *v* I_{1x} *s nositeľom ekvivalencie* $\{\xi(x), t(x)\}$ *označuje* $(2)\, I_{2\xi} \sim (1)\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$.

V prvej časti práce sú odvodené základné vlastnosti ekvivalencie diferenciálnych rovníc. Vzťah ekvivalencie je reflexívny, symetrický (veta 1) a tranzitívny (veta 2), preto *na množine lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu jestvuje rozklad na triedy navzájom ekvivalentných rovníc. Homogénna rovnica nemôže byť ekvivalentná s nehomogénnou a ak sú dve nehomogénne rovnice ekvivalentné, sú aj zodpovedajúce homogénne rovnice ekvivalentné, a to s tým istým nositeľom ekvivalencie* (veta 3). Veta 4 hovorí o tom, kedy jestvuje práve jeden nositeľ ekvivalencie. *Pri ekvivalencii dvoch nehomogénnych (homogénnych) rovníc je druhá zložka $t(x)$ nositeľa ekvivalencie jednoznačne určená (až na multiplikatívnu konštantu) prvou zložkou $\xi(x)$* (veta 5).

V druhej časti je uvedená najdôležitejšia vlastnosť ekvivalentných rovníc. (2) $I_{2\xi} \sim$ $\sim$ (1) I_{1x} *práve vtedy, ak riešenia* (2) *majú v* $I_{2\xi}$ *tú istú štruktúru nulových bodov ako riešenia rovnice* (1) *v* I_{1x} (*veta 6*). Toto tvrdenie znamená, že *jestvuje prosté zobrazenie Z množiny riešení rovnice* (2) *na množinu riešení rovnice* (1), *pričom, ak sú rovnice* (1), (2) *homogénne* (*nehomogénne*), *je Z izomorfné* (*Z má vlastnosť* $Z(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n + v_0) = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n + y_0$, *ak* $Z(v_0) = y_0$, $Z(v_i + v_0) = y_i + y_0$, $i = 1, \ldots, n$, $v_1, \ldots, v_n$ *je fundamentálny systém riešení rovnice* (2')) *a zobrazenie* $\xi(x)$ *intervalu* I_{1x} *na intervalu* $I_{2\xi}$ *majúce v každom bode* $x \in I_{1x}$ *deriváciu* $\xi'(x) \neq 0$ *tak, že, ak* $v(\xi)$ *je ľubovoľné riešenie rovnice* (2) *a* $y(x)$ *je jeho obraz pri zobrazení Z, zobrazí* $\xi(x)$ *množinu nulových bodov* $y(x)$ *v* I_{1x} *na množinu nulových bodov* $v(\xi)$ *v* $I_{2\xi}$ *so zachovaním násobnosti každého nulového bodu.*

Tretia časť pojednáva o transformácii wronskiánov riešení lineárnych homogénnych rovníc (vzťah (13)) a dôsledkami z nej plynúcimi. Predovšetkým platí, že *adjungované rovnice dvoch ekvivalentných rovníc sú tiež ekvivalentné* (veta 7). Ďalej platí, že *ak dve homogénne rovnice* (1'), (2') *sú ekvivalentné s nositeľom ekvivalencie* $\{\xi(x), t(x)\}$, *nehomogénna rovnica* (2) *je ekvivalentná s nehomogénnou rovnicou* (1), *ktorej pravá strana je daná* (18), *v tých istých intervaloch* (veta 8). Z tohto tvrdenia plynie aj tvrdenie o ekvivalencii diferenciálnych nerovností (dôsledok 3). Medzi ekvivalenciou rovníc (1'), (2') a rozkladom diferenciálnych operátorov platia vzťahy, dané vetami 9 a 10. Prvá z nich tvrdí, že *operátory vystupujúce na ľavých stranách dvoch ekvivalentných rovníc sa buď nedajú rozložiť na symbolický súčin operátorov, alebo oba sa dajú rozložiť na súčin faktorov, ktoré sú navzájom ekvivalentné s tým istým nositeľom ekvivalencie* (množiny diferenciálnych rovníc s týmito operátormi sú rovnako ekvivalentné). Veta 10 udáva obrátené tvrdenie: *Ak dve množiny diferenciálnych rovníc sú rovnako ekvivalentné, aj súčiny operátorov vystupujúcich na ich ľavých stranách sú ekvivalentné, ak majú vhodne* (*vzťahom 45*) *zvolené koeficienty pri najvyššej derivácii.*

Резюме

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ОГО ПОРЯДКА I.

ВАЛЬТЕР ШЕДА (Valter Šeda), Братислава

В работе рассматривается вопрос о преобразовании линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка. Основное понятие теории трансформации — это *понятие эквивалетности*, введеное следующим образом: *Пусть даны два линейных уравнения* (1), (2), *в которых* $p_k(x) \in C_0(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_0(I_2)$, $p_0(x) \neq 0$, $q_0(\xi) \neq 0$. *Уравнение* (2) *в интервале* $I_{2\xi} \subset I_2$ *эквивалентно уравнению* (1) *в интервале* $I_{1x} \subset I_1$, *если выполнены следующих два условия*: 1. *Существуют функции* $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$ *такие, что* $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x)\, t(x) \neq 0$ *в* I_{1x}. 2. *Если* $v(\xi)$ — *произвольное решение уравнения* (2) *в* $I_{2\xi}$, *то функция* (3) *является решением уравнения* (1) *в* I_{1x}. *Упорядоченная пара* $\{\xi(x), t(x)\}$ *называется носителем этой эквивалентности. Символически эквивалентность уравнения* (2) *в* $I_{2\xi}$ *с уравнением* (1) *в* I_{1x} *с носителем эквивалентности* $\{\xi(x), t(x)\}$ *обозначим* (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$.

В первой части работы приведены основные свойства эквивалентности дифференциальных уравнений. Соотношение эквивалентности рефлексивно, симметрично (теорема 1) и транзитивно (теорема 2), поэтому *на множестве линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка существует разложение на классы взаимно эквивалентных уравнений. Однородное уравнение не может быть эквивалентно неоднородному, и если два неоднородных уравнения эквивалентны, то и соответствующие однородные уравнения эквивалентны, с тем же носителем эквивалентности* (теорема 3). Теорема 4 говорит о том, когда существует один и только один носитель эквивалентности. *Если эквивалентны два неоднородных* (*однородных*) *уравнения, то вторая компонента* $t(x)$ *носителя эквивалентности однозначно определена* (*однозначно определена до мультипликативной постоянной*) *первой компонентой* (теорема 5).

Во второй части приведено самое важное свойство эквивалентных уравнений. (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) I_{1x} *тогда и только тогда, если решения* (2) *имеют в* $I_{2\xi}$ *такую же структуру нулевых точек, как и решения уравнения* (1) *в* I_{1x} (теорема 6). Это утверждение значит, что *существует одно-однозначное отображение* Z *множества решений уравнения* (2) *на множество решений уравнения* (1), *причем, если уравнения* (1), (2) *однородны* (*неоднородны*), *то* Z *изоморфно* (Z *имеет свойство* $Z(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n + v_0) = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_0$, *если* $Z(v_0) = y_0$, $Z(v_i + v_0) = y_i + y_0$, $i = 1, \ldots, n$, $v_1, \ldots, v_n$ — *фундаментальная система решений уравнения* (2′)), *и существует отображение* $\xi(x)$ *интервала* I_{1x} *на интервал* $I_{2\xi}$, *имеющее во всякой точке* $x \in I_{1x}$ *производную* $\xi'(x) \neq 0$, *так что*: *если* $v(\xi)$ — *произ-*

вольное решение уравнения (2) *и* $y(x)$ — *его образ при отображении* Z, *то* $\xi(x)$ *отобразит множество нулевых точек* $y(x)$ *в* I_{1x} *на множество нулей* $v(\xi)$ *в* $I_{2\xi}$ *со сохранением кратности всякой нулевой точки.*

В третьей части рассматривается вопрос о преобразовании определителей Вронского решений линейных однородных уравнений (соотношение (13)) и его следствиях. Прежде всего имеет место утверждение: *присоединенные уравнения двух эквивалентных уравнений также эквивалентны* (теорема 7). Далее верно, что *если два однородных уравнения* (1′), (2′) *эквивалентны с носителем эквивалентности* $\{\xi(x), t(x)\}$, *то неоднородное уравнение* (2) *эквивалентно неоднородному уравнению* (1), *правая часть которого дана соотношением* (17), *в тех же интервалах* (теорема 8). Из этого утверждения следует тоже утверждение об эквивалентности дифференциальных неравенств (следствие 3). Между эквивалентностью уравнений (1′), (2′) и разложением дифференциальных операторов имеют место соотношения, высказанные теоремами 9 и 10. Первая из них утверждает, что *операторы, действующие в левых частях двух эквивалентных уравнений или неразложимы в символическое произведение операторов, или что их можно разложить в произведение факторов, которые взаимно эквивалентны с тем же носителем эквивалентности* (множества дифференциальных уравнений с этими операторами одинаково эквивалентны). Теорема 10 содержит обратное утверждение: *Если два множества дифференциальных уравнений одинаково эквивалентны, то произведения операторов, действующих в их левых частях, тоже эквивалентны, если подходящим способом выбраны* (*соотношением* (45)) *коэффициенты при их старшей производной.*