Ladislav Skula

Dědičná m-separabilita uspořádaného prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 4, 451--454

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108655

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

DĚDIČNÁ m-SEPARABILITA USPOŘÁDANÉHO PROSTORU

LADISLAV SKULA, Brno

(Došlo dne 30. září 1964)

Názvy, označení a věty používám z knihy E. ČECH: *Topologické prostory* NČSAV Praha 1959. **T** bude značit odkaz na tuto knihu.

Definice 1. Nejmenší možnou mohutnost husté množiny v topologickém prostoru (P, u) budeme značit $\mathrm{h}(P, u)$ nebo jen stručně $\mathrm{h}(P)$.

Nechť $\mathbf{m}$ je kardinální číslo. Topologický prostor P se nazývá $\mathbf{m}$-*separabilní prostor*, jestliže obsahuje hustou podmnožinu mohutnosti $\leqq \mathbf{m}$. Topologický prostor P se nazývá *dědičně* $\mathbf{m}$-*separabilní prostor*, jestliže každý do P vnořený prostor je $\mathbf{m}$-separabilní.

Práce vznikla řešením problému E. Čecha z jeho topologického semináře v Brně: „*Když je uspořádaný prostor* $\mathbf{m}$-*separabilní, jest dědičně* $\mathbf{m}$-*separabilní?*“[1])

1. *Nechť u, v jsou topologie na P, u jemnější než v. Pak* $\mathrm{h}(P, u) \geqq \mathrm{h}(P, v)$.

Definice 2. Nechť R je uspořádaný prostor. Bod $x \in R$ se nazývá *l-bod* (*p-bod*), jestliže x není zleva (zprava) isolovaný a existuje $y \in R$ tak, že $y > x$ $(y < x)$, $J(x, y) = \emptyset$ a y není isolovaný bod.

2. *Nechť R je uspořádaný prostor, který neobsahuje l-body a p-body. Pak R je dědičně* $\mathrm{h}(R)$-*separabilní.*

Důkaz. Nechť Q je vnořen do prostoru R. Pak podle **T** 4.12.21 je $\mathrm{h}(Q) \leqq \chi^t(Q)$, podle **T** 4.12.18 je $\chi^t(Q) \leqq \chi^t(R)$ a podle **T** 6.1.14 je $\chi^t(R) = \max[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathrm{h}(R)]$, kde $\mathbf{m}_1(\mathbf{m}_2)$ je mohutnost množiny všech zleva (zprava) isolovaných bodů v R. Je-li x zleva isolovaný bod v R a není isolovaný, pak existuje isolovaný bod y, $x > y$ a $J(y, x) = \emptyset$. Položme $f(x) = y$. f je prosté zobrazení množiny zleva isolovaných bodů, které nejsou isolované, do množiny všech isolovaných bodů. Odtud plyne, že $\mathbf{m}_1 \leqq \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}$, kde $\boldsymbol{i}$ je mohutnost soustavy všech isolovaných bodů v R. Je-li R konečný, jest tvrzení 2 zřejmé. Je-li R nekonečný, pak, jelikož jest $\boldsymbol{i} \leqq \mathrm{h}(R)$, jest $\mathbf{m}_1 \leqq \mathrm{h}(R)$. Duálně platí $\mathbf{m}_2 \leqq \mathrm{h}(R)$. Tedy $\chi^t(R) = \mathrm{h}(R)$, odkud vyplývá $\mathrm{h}(Q) \leqq \mathrm{h}(R)$.

[1]) Ústní sdělení prof. K. Koutského.

Definice 3. Nechť R je uspořádaný prostor. Mezi dvěma body x, y prostoru R definujeme vztah $\sim$ takto:

1) $x \sim x$ pro každý $x \in R$,

2) pro $x \neq y$ je $x \sim y$ tehdy a jen tehdy, je-li $J(x, y) = \emptyset$ a x, y nejsou isolované.

Vztah $\sim$ je ekvivalence, jejíž třídy rozkladu jsou jednoprvkové nebo dvouprvkové množiny. Rozklad příslušný této ekvivalenci označme $\varrho(R)$ a přirozené zobrazení označme φ. Pro $\zeta \in \varrho(R)$, $\eta \in \varrho(R)$, $\xi \neq \eta$ definujme $\xi < \eta$ tehdy a jen tehdy, je-li $x < y$, kde $\varphi(x) = \xi$, $\varphi(y) = \eta$.

Takto uspořádaný prostor $\varrho(R)$ nazveme *redukce (uspořádaného) prostoru R*.

3. *Nechť Q je vnořený prostor do zobecněného uspořádaného prostoru R. Nechť I_Q je množina isolovaných bodů v Q, které nejsou isolované body v R. Pak* moh $I_Q \leqq \mathrm{h}(R)$.

Důkaz. Je-li R konečná množina, je tvrzení zřejmé. Nechť R je nekonečná množina. Označme $\mathfrak{J}$ systém všech intervalů $J(x, y)$ v R, kde $x \in Q$, $y \in Q$, $x < y$, moh $J(x, y) \geqq \aleph_0$, $J(x, y) \cap Q = \emptyset$. Jelikož každý $J \in \mathfrak{J}$ je otevřená množina v R a pro $J \in \mathfrak{J}$, $J' \in \mathfrak{J}$, $J \neq J'$ jest $J \cap J' = \emptyset$, jest moh $\mathfrak{J} \leqq \mathrm{h}(R)$. Je-li $x \in I_Q$ a x není koncovým bodem množiny Q, pak existuje aspoň jeden $J \in \mathfrak{J}$ tak, že x je koncovým bodem intervalu J. Označme pak $f(x) = J$. Množina $f^{-1}(J)$ pro každé $J \in \mathfrak{J}$ je nejvýš dvouprvková, tedy moh $I_Q \leqq$ moh $\mathfrak{J}$ + moh $\mathfrak{J} + 2 \leqq \mathrm{h}(R)$.

4. *Nechť R je uspořádaný prostor. Pak uspořádaný prostor $\varrho(R)$ neobsahuje l-body a p-body.*

Důkaz. Nechť $\xi \in \varrho(R)$ je l-bod prostoru $\varrho(R)$. Pak existuje $\eta \in \varrho(R)$ tak, že $\xi < \eta$, $J(\xi, \eta) = \emptyset$ a η není isolovaný bod. Množina $\varphi^{-1}(\xi) \cup \varphi^{-1}(\eta)$ je dvouprvková; existují tedy $x \in R$, $y \in R$ tak, že $\varphi^{-1}(\xi) = (x)$, $\varphi^{-1}(\eta) = (y)$. Jest $x < y$, $J(x, y) = \emptyset$; x, y nejsou isolované v R, tedy $x \sim y$ a tudíž $\varphi(x) = \varphi(y)$, což je spor. Protože $\varrho(R)$ neobsahuje l-body, neobsahuje ani p-body. Tím je důkaz ukončen.

5. *Nechť Q je vnořený prostor do uspořádaného prostoru R. Pak* $\mathrm{h}(Q) \leqq \mathrm{h}(\varrho(R))$.

Důkaz. Předpokládejme, že R je nekonečný prostor, jinak je tvrzení zřejmé. Podle 2 a 4 existuje hustá množina M^* ve vnořeném prostoru $\varphi^1(Q)$ tak, že moh $M^* \leqq \mathrm{h}(\varrho(R))$. Položme $M = \varphi^{-1}(M^*) \cup I_Q$, kde I_Q je množina isolovaných bodů v Q, které nejsou isolované v R.

Ukážeme, že M je hustá v Q. Nechť $x \in Q$ není zleva isolovaný bod v Q. Nechť U je relativní okolí bodu x ve vnořeném prostoru Q. Pak existuje $y \in Q$, $y < x$ tak, že $J(y, x) \cap Q = U$, moh $J(y, x) \cap Q \geqq \aleph_0$. Pak $\varphi(y) < \varphi(x)$ a $J(\varphi(y), \varphi(x)) \cap \varphi^1(Q) \neq \emptyset$. Existuje tedy bod $\xi \in J(\varphi(y), \varphi(x)) \cap M^*$. Nechť $z \in \varphi^{-1}(\xi)$. Pak $y < z < x$ a $z \in M$. Tedy $U \cap M \neq \emptyset$.

Platí též duální tvrzení: *není-li $x \in Q$ zprava isolovaný bod v Q, pak pro každé rel. okolí U bodu x ve vnořeném prostoru Q je $U \cap M \neq \emptyset$.*

Nechť x je isolovaný bod prostoru Q. Je-li $x \in I_Q$, pak $x \in M$. Není-li $x \in I_Q$, pak x je isolovaný v R, tedy $\varphi(x)$ je isolovaný v $\varrho(R)$ a tudíž $\varphi(x) \in M^*$. Odtud plyne $x \in M$.

Tedy M je hustá v Q.

Jest $\mathrm{h}(Q) \leqq \operatorname{moh} M \leqq \operatorname{moh} M^* + \operatorname{moh} M^* + \operatorname{moh} I_Q \leqq \mathrm{h}(\varrho(R)) + \operatorname{moh} I_Q$. Položíme-li $Q = R$, jest $I_Q = \emptyset$, tedy $\mathrm{h}(R) \leqq \mathrm{h}(\varrho(R))$ a z 3 dostáváme pro lib. vnořený prostor Q do R $\mathrm{h}(Q) \leqq \mathrm{h}(\varrho(R))$.

6. *Nechť R je uspořádaný prostor. Pak* $\mathrm{h}(\varrho(R)) \leqq \mathrm{h}(R)$.

Důkaz. Tvrzení plyne z toho, že zobrazení φ je spojité.

7. Věta. *Nechť R je uspořádaný prostor. Pak R je dědičně* $\mathrm{h}(R)$*-separabilní.*

Důkaz. Věta plyne z 5 a 6.

8. Věta. *Nechť R je zobecněný uspořádaný prostor. Pak je R dědičně* $\mathrm{h}(R)$*-separabilní.*

Důkaz. Předpokládejme, že R je nekonečný, jinak je tvrzení zřejmé. Označme u danou topologii na prostoru R a v topologii na příslušném uspořádaném prostoru R.

Nechť (Q, u) je vnořený prostor do (R, u). Označme I množinu všech isolovaných bodů vnořeného prostoru (Q, u) a $I_Q(I^*)$ množinu všech isolovaných bodů tohoto prostoru, které nejsou (jsou) isolované body prostoru (R, u).

Nechť M je hustá v (Q, v), $\operatorname{moh} M = \mathrm{h}(Q, v)$. Pak $M \cup I$ je hustá v (Q, u), tedy jest

$$\mathrm{h}(Q, u) \leqq \mathrm{h}(Q, v) + \operatorname{moh} I . \tag{1}$$

Podle 7 a 1 je

$$\mathrm{h}(Q, v) \leqq \mathrm{h}(R, u) . \tag{2}$$

Z 3 a z toho, že $\operatorname{moh} I = \operatorname{moh} I^* + \operatorname{moh} I_Q$, vyplývá

$$\operatorname{moh} I \leqq \mathrm{h}(R, u) . \tag{3}$$

Z (1), (2) a (3) plyne $\mathrm{h}(Q, u) \leqq \mathrm{h}(R, u)$, c.b.d.

9. Problém: *Nechť $P \neq \emptyset$ je částečně uspořádaná množina. Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby topologický prostor (P, t) byl dědičně* $\mathrm{h}(P, t)$*-separabilní, kde t znamená intervalovou topologii na P?*

Резюме

НАСЛЕДСТВЕННАЯ m-СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

ЛАДИСЛАВ СКУЛА (Ladislav Skula), Брно

Пусть $\mathfrak{m}$ — кардинальное число. Топологическое пространство называется $\mathfrak{m}$-*сепарабельным*, если в нем имеется плотное подмножество мощности $\leqq \mathfrak{m}$. Топологическое пространство называется *наследственно* $\mathfrak{m}$-*сепарабельным*, если всякое ее подпространство $\mathfrak{m}$-сепарабельным.

В статье решается одна проблема Е. Чеха: „*Если упорядоченное пространство* $\mathfrak{m}$-*сепарабельным, есть оно и наследственно* $\mathfrak{m}$-*сепарабельным?*"

Пусть $\mathrm{h}(P)$ обозначает наименьшую мощность плотного подмножества в топологическом пространстве P. Доказывается теорема: *Пусть* R — *обобщенное упорядоченное пространство* (см. E. Čech: Topologické prostory, NČSAV, Praha 1959, стр. 114). *Потом* R *является наследственно* $\mathrm{h}(R)$ — *сепарабельным.*

Summary

HEREDITARY m-SEPARABILITY OF AN ORDERED SPACE

LADISLAV SKULA, Brno

Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal number. A topological space will be said to be $\mathfrak{m}$-*separable*, if it contains a dense subset of cardinality $\leqq \mathfrak{m}$. A topological space is *hereditarily* $\mathfrak{m}$-*separable*, if every subspace in it is $\mathfrak{m}$-separable.

In this paper following problem E. Čech is solved: "*Is ordered* $\mathfrak{m}$-*separable space hereditarily* $\mathfrak{m}$-*separable?*"

The main result is the following theorem: *A generalized ordered space* R (see E. Čech: Topologické prostory NČSAV, Praha 1959, p. 114) *is hereditarily* $\mathrm{h}(R)$-*separable.* $\mathrm{h}(P)$ means the least cardinality of a dense subset in the topological space P.