Časopis pro pěstování matematiky

Josef Štěpán
O konvexních množinách pravděpodobnostních měr

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 73--79

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108659`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

O KONVEXNÍCH MNOŽINÁCH PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH MĚR

JOSEF ŠTĚPÁN, Praha

(Došlo dne 17. října 1966)

Nechť je $\mathscr{P}$ systém pravděpodobnostních měr definovaných na jistém měřitelném prostoru a P_0 pravděpodobnostní míra příbuzná systému $\mathscr{P}$ v následujícím smyslu: je-li f ohraničená měřitelná funkce a α reálné číslo, takové, že $\int f \,\mathrm{d}P \leqq \alpha$ pro všechny $P \in \mathscr{P}$, pak i $\int f \,\mathrm{d}P_0 \leqq \alpha$.

Naskýtá se otázka, do jaké míry vyjadřuje tato příbuznost míry P_0 k systému $\mathscr{P}$ možnost aproximovat míru P_0 pomocí prvků množiny $\mathscr{P}$. Velmi jednoduchou odpověď na tuto otázku obdržíme tehdy, je-li systém $\mathscr{P}$ konečný. Dokážeme, že P_0 jest konvexní kombinací prvků systému $\mathscr{P}$. Má-li $\mathscr{P}$ nekonečně mnoho prvků, ukážeme, že příbuznou míru P_0 můžeme aproximovat konečnými konvexními kombinacemi prvků $\mathscr{P}$, a to buď ve smyslu konvergence na každé měřitelné množině, respektive ve smyslu slabé konvergence pravděpodobnostních měr. Ukazuje se, že způsob aproximace závisí na systému měřitelných funkcí, který se vyskytuje v definici příbuznosti míry P_0 k systému $\mathscr{P}$.

Při řešení těchto otázek je využito některých vlastností konvexních množin v obecných lineárních topologických prostorech. Uvedeme nyní základní definice a značení. Mějme základní prostor S a jakousi σ-algebru jeho podmnožin $\mathscr{A}$. Písmenem X budeme v průběhu celé práce značit množinu všech konečných měr definovaných na $\mathscr{A}$. Pod pojmem míra rozumíme σ-aditivní množinovou funkci definovanou na $\mathscr{A}$, která může nabývat i záporných hodnot. Jest zřejmé, že X je lineární prostor.

Definice 1. Pod konvexním obalem množiny $\mathscr{P}$ lineárního prostoru X rozumíme průnik všech konvexních množin prostoru X takových, že obsahují $\mathscr{P}$ jako svou podmnožinu. Tento konvexní obal množiny $\mathscr{P}$ budeme značit jako $co(\mathscr{P})$. Je-li X topologický lineární prostor s topologií Γ, pak budeme říkat, že průnik všech uzavřených konvexních množin, které obsahují $\mathscr{P}$, jest uzavřeným konvexním obalem množiny $\mathscr{P}$ a budeme ho značit jako $\overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$.

Je snadno vidět, že $co(\mathscr{P})$, $\overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$ jsou konvexní množiny, z nichž $co(\mathscr{P})$ se skládá právě ze všech prvků $x \in X$, které je možno vyjádřit následujícím způsobem:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\,, \quad \text{kde} \quad p_i \in \mathscr{P},\ 0 \leqq \alpha_i \leqq 1\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Poměrně snadno se ukáže (viz např. [1]), že $\overline{co(\mathscr{P})} = \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$, kde operace uzávěru je vzata vzhledem k topologii Γ. Jest tudíž $\overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$ uzavřená konvexní množina v topologickém prostoru (X, Γ). Je velmi jednoduché dokázat, že $co(\mathscr{P}) = \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$, je-li množina $\mathscr{P}$ konečná.

Obraťme se opět k prostorům, jejichž prvky jsou konečné míry definované na měřitelném prostoru $[S, \mathscr{A}]$. Nechť od této chvíle je $\mathscr{P}$ konečný nebo nekonečný systém pravděpodobnostních měr definovaných na $\mathscr{A}$.

Označme písmenem $\overline{\mathscr{P}}$ množinu pravděpodobnostních měr definovaných na $\mathscr{A}$, takových, že $P \in \overline{\mathscr{P}}$ právě tehdy, existuje-li posloupnost $\{P_n\}$, $P_n \in co(\mathscr{P})$ taková, že $P_n(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(A)$ pro každou $A \in \mathscr{A}$. Je opět velmi snadné ukázat, že $\overline{\mathscr{P}} = co(\mathscr{P})$, je-li $\mathscr{P}$ konečným systémem.

Precizujme nyní pojem příbuznosti míry P_0 systému $\mathscr{P}$.

Definice 2. Budeme říkat, že pravděpodobnostní míra P_0 je příbuzná systému $\mathscr{P}$ vzhledem k množině $\mathscr{A}$-měřitelných funkcí Γ, platí-li následující implikace: jsou-li $f \in \Gamma$ a α reálné číslo takové, že $\int_S f \, dP \leqq \alpha$ pro všechny $P \in \mathscr{P}$, pak i $\int_S f \, dP_0 \leqq \alpha$.

Množinu všech pravděpodobnostních měr příbuzných systému $\mathscr{P}$ vzhledem k množině funkcí Γ budeme značit $\widehat{\mathscr{P}(\Gamma)}$.

Označme písmenem K_1 množinu měřitelných funkcí g (vzhledem k $\mathscr{A}$) definovaných na S takových, že $0 \leqq g(x) \leqq 1$ pro $x \in S$ a písmenem K vůbec všechny ohraničené měřitelné funkce.

Dokážeme toto jednoduché tvrzení.

Lemma 1.

$$\overline{\mathscr{P}} \subseteq \widehat{\mathscr{P}(K_1)} \equiv \widehat{\mathscr{P}(K)}$$

Důkaz. Nechť $P_0 \in \overline{\mathscr{P}}$, pak existuje posloupnost $\{P_n\}$, $P_n \in co(\mathscr{P})$ taková, že $P_n(A) \to P_0(A)$ pro všechny $A \in \mathscr{A}$. Budiž $\int g \, dP \leqq \alpha$ pro $P \in \mathscr{P}$, kde $g \in K_1$ a α je reálné číslo. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$, pak je známo (viz např. [2]), že existuje prostá funkce $f_\varepsilon(x)$[1]) taková, že $\sup_{x \in S} |f_\varepsilon(x) - g(x)| \leqq \varepsilon$ a $0 \leqq f_\varepsilon(x) \leqq g(x)$ pro $x \in S$.

V důsledku zřejmých nerovností

$$\int f_\varepsilon \, dP_n \leqq \int g \, dP_n \leqq \alpha \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots ;$$

$$\int g \, dP_0 = \int f_\varepsilon \, dP_0 + \varepsilon \leqq \alpha + \varepsilon$$

dostáváme, že $\int g \, dP_0 \leqq \alpha$ a tedy $P_0 \in \widehat{\mathscr{P}(K_1)}$.

[1]) Prostou funkcí rozumím $\mathscr{A}$-měřitelnou funkci, která nabývá pouze konečně mnoha hodnot.

Snadno vidíme, že $\widehat{\mathscr{P}(K)} \subseteq \mathscr{P}(K_1)$. Nechť $P_0 \in \widehat{\mathscr{P}(K_1)}$. Mějme $f \in K$ a α reálné číslo takové, že $\int f \, dP \leqq \alpha$ pro $P \in \mathscr{P}$. Víme, že existuje $N > 0$ přirozené tak, že $|f(x)| \leqq N$ pro $x \in S$. Definujme funkci $g(x) = (N + f(x))/2N$ pro $x \in S$. Je zřejmé, že $g \in K_1$ a $\int g \, dP \leqq \frac{1}{2} + \alpha/2N$ pro $P \in \mathscr{P}$ a tudíž $\frac{1}{2} + (1/2N) \int f \, dP_0 = \int g \, dP_0 \leqq \leqq \frac{1}{2} + (1/2N)\, \alpha$, tedy $\int f \, dP_0 \leqq \alpha$, čímž je důkaz proveden.

Zavedu nyní jednu velmi důležitou definici.

Definice 3. Nechť Z je lineární množina v prostoru konečných měr definovaných na měřitelném prostoru $(S, \mathscr{A})$. Nechť Γ je systém $\mathscr{A}$-měřitelných funkcí definovaných na S takový, že splňuje následující tři podmínky.

1. Existují konečné integrály $\int g \, d\nu$ pro všechny $g \in \Gamma$ a všechny $\nu \in Z$.
2. Γ je lineární množina.
3. Je-li $\int g \, d\nu = 0$ pro všechny $g \in \Gamma$, pak $\nu = 0$.

Pak budeme říkat, že Γ je totální systém měřitelných funkcí vzhledem k prostoru Z (snad nedojde k omylu, budu-li dále používat zkráceného termínu totální systém).

Je zřejmé, že K je totálním systémem měřitelných funkcí vzhledem k prostoru X. Mějme nyní náš prostor X a totální systém funkcí Γ (vzhledem k X); pak systém lineárních funkcionálů definovaných na X typu $x(\nu) = \int f \, d\nu$, kde $g \in \Gamma$, jest lineární množinou, která bývá obvykle nazývána totální množinou funkcionálů.[2]) Jest známo (viz [1]), že totální množiny funkcionálů vytvářejí v základním prostoru (v našem případě je to prostor X) topologii, vzhledem ke které je onen základní prostor lokálně konvexním lineárním topologickým prostorem.

Ukážeme, jak je tato topologie definována na prostoru X. Nechť Γ je totální systém funkcí vzhledem k X. Pak zmíněná topologie (budeme ji též značit písmenem Γ) má za basi tyto množiny $A(\nu_0, \varepsilon, \Gamma') = \{\nu \in X : |\int f \, d\nu_0 - \int f \, d\nu| < \varepsilon, f \in \Gamma'\}$, kde ν_0 je libovolný prvek prostoru X, $\varepsilon > 0$, reálné číslo, Γ' libovolná konečná podmnožina v Γ. $[X, \Gamma]$ jest nyní lokálně konvexním lineárním topologickým prostorem, který má navíc tuto velmi důležitou vlastnost: Označíme-li množinu všech spojitých lineárních funkcionálů definovaných na X (spojitost se chápe vzhledem k topologii Γ) jako X^*, pak $X^* = \Gamma$. Tedy funkcionály typu $x^*(\nu) = \int g \, d\nu$, $g \in \Gamma$ jsou právě všechny spojité funkcionály definované na $[X, \Gamma]$.

Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této práce.

Věta. *Nechť Γ je totální systém měřitelných funkcí vzhledem k X a nechť $\mathscr{P} \subset X$ je systém pravděpodobnostních měr. Pak $\widehat{\mathscr{P}(\Gamma)} = \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$.*

---

[2]) Je-li X lineární prostor a označíme-li X^+ množinu všech lineárních funkcionálů definovaných na X, pak $\Gamma \subseteq X^+$ se nazývá totální množinou právě tehdy, je-li Γ lineární množina a platí-li toto: $y(x) = 0$ pro všechny $y \in \Gamma$, pak $x = 0$ (viz [1]). Důkaz toho, že $x(\nu) = \int g \, d\nu$ je lineární funkcí na X, je velice snadný a přenechávám ho čtenáři.

Důkaz. a) Nechť $P_0 \in \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$ a $\int f \, dP \leqq \alpha$ pro všechny $P \in \mathscr{P}$, kde $f \in \Gamma$ a α je reálné číslo. Pak existuje posloupnost $\{P_n\}$, $P_n \in co(\mathscr{P})$ taková, že $\left|\int f \, dP_0 - \int f \, dP_n\right| \leqq 1/n$, tudíž $\int f \, dP_0 \leqq \int f \, dP_n + 1/n \leqq \alpha + 1/n$. Jest tedy $\int f \, dP_0 \leqq \alpha$, a proto $P_0 \in \widehat{\mathscr{P}(\Gamma)}$.

b) Nechť $P_0 \in \widehat{\mathscr{P}(\Gamma)}$ a $P_0 \notin \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$. Pak podle věty 5.2.10 v [1] platí, že: existuje spojitý (vzhledem k Γ) lineární funkcionál x^* definovaný na X, čísla c a $\varepsilon > 0$ takové, že $x^*(\overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})) \leqq c < c + \varepsilon \leqq x^*(P_0)$.

My ovšem víme, že existuje funkce $g \in \Gamma$ taková, že $x^*(v) = \int g \, dv$ pro všechny $v \in X$. Dokázali jsme tedy existenci funkce $g \in \Gamma$ a čísla c takových, že $\int g \, dP \leqq c$ pro $P \in \mathscr{P}$. Zároveň však víme, že $\int g \, dP_0 > c$, což odporuje předpokladu, že P_0 je příbuzná míra systému $\mathscr{P}$ vzhledem k Γ. Jest tudíž $P_0 \in \overline{co}_\Gamma(\mathscr{P})$, čímž je důkaz proveden.

Obraťme se nyní k našemu konkrétnímu systému funkcí K, o kterém víme, že je systémem totálním. Uvedeme několik jednoduchých důsledků právě dokázané věty.

Důsledek 1.

$$\mathscr{P} \subseteq co(\mathscr{P}) \subseteq \overline{\mathscr{P}} \subseteq \widehat{\mathscr{P}(K_1)} = \widehat{\mathscr{P}(K)} = \overline{co}_K(\mathscr{P})$$

Důsledek 2. *Je-li pravděpodobnostní míra P_0 příbuzná konečnému systému pravděpodobnostních měr $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ vzhledem ke K_1, pak existují čísla α_i $(0 \leqq \alpha_i \leqq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1)$ taková, že $P_0(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(A)$ pro všechny množiny $A \in \mathscr{A}$, tedy jinak vyjádřeno platí:*

$$\mathscr{P} \subseteq co(\mathscr{P}) = \overline{\mathscr{P}} = \widehat{\mathscr{P}(K_1)} = \widehat{\mathscr{P}(K)} = \overline{co}_K(\mathscr{P}).$$

Důkaz. Je-li $P_0 \in \mathscr{P}(K_1)$, pak $P_0 \in \overline{co}_K(\mathscr{P})$. To znamená, že existuje zobecněná posloupnost $\{P_t\}_{t \in T}$, $P_t \in co(\mathscr{P})$ taková, že $P_t \xrightarrow[t]{} P_0$ vzhledem k topologii indukované systémem funkcí K, z čehož vyplývá, že $\int g \, dP_t \xrightarrow[t]{} \int g \, dP_0$ pro každou funkci $g \in K$, speciálně tedy i $P_t(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^t P_i(A) \xrightarrow[t]{} P_0(A)$ pro všechny množiny $A \in \mathscr{A}$, kde $0 \leqq \alpha_i^t \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^t = 1$ pro všechna $t \in T$. Posloupnost $\{\alpha_1^t, \alpha_2^t, \ldots, \alpha_n^t\}_{t \in T}$ je omezená, a proto existuje její hromadný bod $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, kde $0 \leqq \beta_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ a tudíž $P_0(A) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i P_i(A)$, kde $A \in \mathscr{A}$ je libovolná množina. Tím je důkaz proveden.

Důsledek 3. *Je-li $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}$ libovolný spočetný systém množin a $P_0 \in \mathscr{P}(K_1)$, pak existuje posloupnost $\{P_n\}$, $P_n \in co(\mathscr{P})$ taková, že $P_n(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0(A)$ pro všechny $A \in \mathscr{D}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathscr{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$, $A_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ Jelikož je $P_0 \in \overline{co}_K(\mathscr{P})$, pak ke každému n přirozenému existují míry $P_n \in co(\mathscr{P})$ tak, že $|P_0(A_i) - P_n(A_i)| < 1/n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a tudíž $P_n(A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_0(A_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots$

Nechť nyní S je libovolný normální topologický prostor, $\mathscr{B}$ σ-algebra jeho borelovských množin a Y systém všech konečných regulárních měr definovaných na $\mathscr{B}$. Y jest zřejmě lineární prostor. Řeknu-li v následujícím slovo míra, myslím tím konečnou regulární míru definovanou na $\mathscr{B}$.[3]) Označím písmenem C prostor všech ohraničených spojitých funkcí definovaných na S, písmenem C_1 množinu všech spojitých funkcí ohraničených zdola nulou a shora jedničkou. Je-li nyní $\mathscr{P} \subset Y$ systém pravděpodobnostních měr, pak $\tilde{\mathscr{P}}$ bude označovat množinu všech pravděpodobnostních měr $Q \in Y$ takových, že existuje posloupnost $\{P_n\}$, $P_n \in co(\mathscr{P})$, že $P_n \to Q$ slabě.[4]) Symbolem $\widehat{\mathscr{P}(\Gamma)}$ označíme opět systém pravděpodobnostních měr příbuzných $\mathscr{P}$ vzhledem k systému funkcí Γ.

Snadno se dokáže následující vztah: $\tilde{\mathscr{P}} \subseteq \widehat{\mathscr{P}(C_1)} = \widehat{P(C)}$. Abychom mohli využít základní větu této práce, musíme nejdříve dokázat toto lemma.

Lemma 2. *Systém C je totální množinou měřitelných funkcí vzhledem k prostoru Y.*

Důkaz. Mějme $\nu \in Y$ takovou, že $\int f \, d\nu = 0$ pro všechny $f \in C$. Vezměme $A \in \mathscr{B}$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje uzavřená množina F a otevřená množina U tak, že $F \subseteq A \subseteq U$ a $|\nu| (U - F) \leqq \varepsilon/2$. Protože prostor S je normální topologický prostor, existuje spojitá funkce f_ε, která má tyto vlastnosti:

$$f_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{pro} \quad x \in F\,, \quad f_\varepsilon(x) = 0\,; \quad x \in S - U \quad \text{a} \quad \sup_{x \in S} |f(x)| \leqq 1\,.$$

Jest tedy $\int f_\varepsilon \, d\nu = 0$ a označíme-li symbolem I_A charakteristickou funkci množiny A pak zřejmě platí:

$$\left| \int f_\varepsilon \, d\nu - \nu(A) \right| \leqq \int |f_\varepsilon - I_A| \, d|\nu| \leqq 2|\nu| (U - F) \leqq \varepsilon$$

a tudíž $\nu(A) = 0$.

Vzhledem k tomu, že množina $A \in \mathscr{B}$ byla volena libovolně, jest důkaz proveden.

Protože při důkazu hlavní věty této práce není podstatný konkrétní tvar lineárního prostoru měr, platí následující tvrzení.

Důsledek 4. *Nechť $\mathscr{P}$ je systém regulárních pravděpodobnostních měr na borelovských množinách normálního topologického prostoru.* Pak platí: $\widehat{\mathscr{P}(C_1)} = \widehat{\mathscr{P}(C)} = co_C(\mathscr{P})$.

---

[3]) Říkáme, že míra ν je regulární, jestliže pro každou množinu $A \in \mathscr{B}$ a $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená množina F a otevřená množina U takové, že $F \subset A \subset U$ a $|\nu| (U - F) < \varepsilon$. $|\nu|$ označuje totální variaci míry ν (viz např. [1]).

[4]) Říkáme, že $P_n \to P$ slabě, jestliže $\int f \, dP_n \to \int f \, dP$ pro každou funkci $f \in C$.

Obraťme se nyní k jednomu speciálnímu případu. Nechť základní prostor S je úplným separabilním metrickým prostorem. Jest známo (viz např. [3]), že slabá konvergence pravděpodobnostních měr definovaných na $\mathscr{B}$ je ekvivalentní s konvergencí v metrickém prostoru pravděpodobnostních měr, který bývá obvykle nazýván Lévyho prostorem. Toto nám umožní dokázat následující tvrzení:

Důsledek 5. *Nechť S je úplný separabilní metrický prostor, $\mathscr{P}$ systém regulárních pravděpodobnostních měr definovaných na borelovských množinách prostoru S a P_0 regulární pravděpodobnostní míra příbuzná systému $\mathscr{P}$ vzhledem k množině funkcí C_1. Pak existuje posloupnost $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny $co(\mathscr{P})$ taková, že $P_n \to P_0$ slabě.*

Důsledek 6. *Jsou-li splněny předpoklady důsledku 5, pak platí: $\mathscr{P} \subseteq co(\mathscr{P}) \subseteq$ $\subseteq \tilde{\mathscr{P}} = \widehat{\mathscr{P}(C_1)} = \widehat{\mathscr{P}(C)} = \overline{co}_C(\mathscr{P})$.*

Dokážeme důsledek 5.

Nechť $P_0 \in \widehat{\mathscr{P}(C_1)}$, pak $P_0 \in \overline{co}(\mathscr{P})$. Existuje tedy zobecněná posloupnost $\{P_t\}_{t \in T}$, $P_t \in co(\mathscr{P})$ taková, že $P_t \xrightarrow[t]{} P_0$ vzhledem k topologii indukované systémem funkcí C. To ale znamená $\int f \, dP_t \xrightarrow[t]{} \int f \, dP_0$ pro všechny $f \in C$, tudíž $P_t \xrightarrow[t]{} P_0$ slabě. Tato konvergence je vlastně konvergencí v Lévyho metrickém prostoru, a proto platí $d(P_t, P_0) \xrightarrow[t]{} 0$[5]). Nyní již snadno najdeme spočetnou množinu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{P_t\}_{t \in T}$ takovou, že $d(P_n, P_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, a tudíž $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P_0$ slabě. Tímto je důkaz důsledku 5. proveden.

Připomínám, že důsledek 5. jest speciálním případem tvrzení, které říká, že topologie C indukovaná do prostoru všech pravděpodobnostních měr je totožná s metrickou topologií v Lévyho prostoru. (O S musíme ovšem zase předpokládat, že je úplným separabilním metrickým prostorem.) Důkaz tohoto tvrzení ponechávám čtenáři.

Literatura

[1] *N. Dunford* and *J. T. Schwartz:* Linear Operators I, ruský překlad, Линейные операторы, Москва 1962 (kapitola V.).

[2] *M. Loéve:* Probability Theory, ruský překlad, Теория вероятностей, Москва 1962 (kapitola II.).

[3] *Ю. В. Прохоров:* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применения 1 (1956).

Adresa autora: Sokolovská 83, Praha 8 - Karlín (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

---

[5]) $d(P, Q)$ označuje metriku v Lévyho prostoru (viz např. [3]).

Summary

ON THE CONVEX SETS OF PROBABILITY MEASURES

JOSEF ŠTĚPÁN, Praha

Let $\mathscr{P}$ be a family of probability measures defined on measurable space $(S, \mathscr{A})$. A probability measure P_0 will be called the related measure to a family $\mathscr{P}$, if the next condition is satisfied.

Let f be a bounded measurable function and α a real number such that $\int f \, dP \leqq \alpha$ for every $P \in \mathscr{P}$. Then $\int f \, dP_0 \leqq \alpha$. Let $\widehat{\mathscr{P}(K)}$ be the set of all such measures. This paper contains an investigation of the set $\widehat{\mathscr{P}(K)}$. The principal result is the next relation: $\widehat{\mathscr{P}(K)} = \overline{co}_K(\mathscr{P})$, where $\overline{co}_K(\mathscr{P})$ is the closed convex hull of the family $\mathscr{P}$. The vector space X of finite measures defined on $\mathscr{A}$ is topologized by means of the base

$$\{A(\nu, \varepsilon, K')\} = \left\{\nu \in X : \left|\int f \, d\nu_0 - \int f \, d\nu\right| < \varepsilon, \; f \in K'\right\}$$

where $\nu_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ and K' is a finite set of bounded measurable functions.

If $\mathscr{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ is a finite family of the probability measures, then P_0 is the related measure to the family $\mathscr{P}$ if and only if $P_0(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(A)$ for every $A \in \mathscr{A}$, where $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$, and $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.