František Zítek

Poznámka k teorii vstupních proudů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 209--210

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108733

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

POZNÁMKA K TEORII VSTUPNÍCH PROUDŮ

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Došlo dne 10. ledna 1962)

Je formulována podmínka silné regularity proudu vyjádřená pomocí pravděpodobností $\mathbf{P}\{x(t_2) > x(t_1)\}$.

Vstupním proudem rozumíme (srv. [1]) stochastický proces $x(t)$, $0 \leqq t < T < \infty$, jehož všechny výběrové funkce jsou neklesající a nabývají jen celých nezáporných hodnot. Omezíme se zde jen na takové proudy, pro něž x je proces s nezávislými přírůstky a $\mathbf{E}[x(T)] < \infty$, tedy v terminologii Chinčinově [2] na финитные потоки без последействия. Vždy předpokládáme $\mathbf{P}\{x(0) = 0\} = 1$. Je-li $I = \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$, pak klademe $x(I) = x(t_2) - x(t_1)$, $\lambda(I) = \mathbf{P}\{x(I) > 0\}$, $M(I) = \mathbf{E}[x(I)]$; symbolem Λ značíme Burkillův integrál funkce $\lambda : \Lambda(J) = \int_J \lambda(I)$.

V práci [2] definoval Chinčin dvě základní kategorie vstupních proudů: regulární — charakterisované spojitostí funkce M — a singulární. Současně ukázal (srv. [2], lemma 3), že proud x je regulární právě tehdy, je-li funkce λ spojitá v $\langle 0, T \rangle$. Z teorie Burkillova integrálu (srv. [4], věta 8.2) pak plyne obdobné tvrzení i pro funkci Λ. V článku [3] byl zaveden pojem proudů silně regulárních, charakterisovaných absolutní spojitostí funkce M. Cílem této poznámky je dokázat, že platí tato věta:

Věta. *Proud x je silně regulární právě tehdy, je-li funkce λ, resp. Λ, absolutně spojitá v $\langle 0, T \rangle$.*

D ů k a z je snadný. Z věty 9.6 z [4] plyne ekvivalence absolutní spojitosti funkcí λ a Λ. Je-li však proud silně regulární, pak absolutní spojitost funkce λ vyplývá bezprostředně z absolutní spojitosti funkce M a ze známé nerovnosti $0 \leqq \lambda(I) \leqq M(I)$ (viz [1]).

Předpokládejme nyní naopak, že funkce Λ je absolutně spojitá. Proud x je tedy nutně regulární, takže (srv. [3], lemma 4 a [2], lemma 10) existují Burkillovy integrály $B_k(J) = \int_J v_k(I)$ pravděpodobností $v_k(I) = \mathbf{P}\{x(I) = k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, a charakteristickou funkci proudu $\varphi(I, s) = \mathbf{E}[\exp\{is\, x(I)\}]$ lze psát ve tvaru (srv. [2], § 4)

$$(*) \qquad \varphi(I, s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k(I)\,(e^{isk} - 1)\right\}.$$

Z nerovností $0 \leqq v_k(I) \leqq \lambda(I) \leqq \Lambda(I)$, $k = 1, 2, \ldots$, pak vyplývá, že také $0 \leqq B_k(I) \leqq \Lambda(I)$ pro všechna $k \geqq 1$, takže také všechny funkce B_k jsou absolutně spojité. Ježto však, jak si snadno ověříme pomocí (*), jest $M(I) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, B_k(I)$, je podle věty Beppo Leviovy také funkce M absolutně spojitá, c. b. d.

Porovnáme-li podmínku silné regularity proudu vyjádřenou naší větou s definicemi práce [5], vidíme, že platí následující tvrzení:

Vstupní proud x je silně regulární (regulární) právě tehdy, je-li — jakožto náhodná funkce intervalu ve smyslu [5] *— absolutně spojitý (spojitý v $\emptyset$) v intervalu $\langle 0, T)$.*

Literatura

[1] *А. Я. Хинчин:* Математические методы теории массового обслуживания. Труды Мат. Инст. им. Стеклова, *49* (1955), 1—122.

[2] *А. Я. Хинчин:* Потоки случайных событий без последействия. Теория вероятностей, *1* (1956), 3—18.

[3] *Ф. Зитэк:* К теории ординарных потоков. Чехословацкий Матем. Журнал, *8* (1958), 448—459.

[4] *L. A. Ringenberg*: The theory of the Burkill integral. Duke Math. Journal, *15* (1948), 239—270.

[5] *F. Zítek*: Fonctions aléatoires d'intervalle. Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 583—609.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ ВХОДЯЩИХ ПОТОКОВ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

Доказывается, что финитный поток без последействия $x(t)$ является строго регулярным (см. [3]) тогда и только тогда, когда функция интервала $\lambda : \lambda(I) = \mathbf{P}\{x(t_1) < x(t_2)\}$ для $I = \langle t_1, t_2)$, абсолютно непрерывна.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUR THEORIE DER NACHWIRKUNGSFREIEN FOLGEN

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

Es wird gezeigt, dass jede nachwirkungsfreie Folge $x(t)$ mit endlichem Mittelwert dann und nur dann streng regulär (s. [3]) ist, wenn die Intervallfunktion $\lambda : \lambda(I) = \mathbf{P}\{x(t_1) < x(t_2)\}$ für $I = \langle t_1, t_2)$, absolut stetig ist.