Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

PŘEHLED VÝSLEDKŮ ČESKOSLOVENSKÉ DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE TENSOROVÉHO ZAMĚŘENÍ[1])

ALOIS URBAN, Praha

(Došlo dne 4. ledna 1962)

Článek přináší přehled výsledků spolu se stručným hodnocením přínosu našich diferenciálních geometrů, kteří za svoji hlavní pracovní metodu v diferenciální geometrii zvolili tensorový počet.

Úvod. Bylo by jistě velmi užitečné v jediném přehledném článku zachytit vývoj československé diferenciální geometrie a zhodnotit její celkový přínos; nezáleží přece na užitých metodách jako hlavně na dosažených výsledcích. Již zběžný pohled na historii československé diferenciální geometrie po 1. světové válce však ukazuje, že se rozvíjela v podstatě pod převládajícím vlivem dvou významných geometrů, kteří se zabývali zcela různými okruhy problematiky, přičemž užívali naprosto různých pracovních metod. K tomu přistoupila ještě řada dalších příčin a vlivů, které rozdíly pracovního zaměření nepomáhaly zmenšovat, ale spíše, ať již přímo nebo nepřímo, zvětšovat. Vytvořily se tak dva hlavní proudy, které teprve ve svém celku podávají přehledný obraz československé diferenciální geometrie.

Hlavní pracovní metodou prvé, početnější skupiny, jejíž zaměření v podstatě udal akademik E. ČECH, je Cartanova metoda pohyblivého reperu. Významné místo v této skupině zaujímají pracovníci brněnského semináře diferenciální geometrie, v němž však vznikly i mnohé práce, v nichž se výhradně používalo klasických metod nebo, jako např. v přímkové diferenciální geometrii, některých jiných speciálních metod diferenciální geometrie. Prvé souhrnné hodnocení této hlavní skupiny podal nedávno v obsažném referátu její čelný představitel prof. J. KLAPKA.[2]) Druhá skupina pracuje převážně tensorovými metodami; přehled jejích výsledků obsahuje tento článek.

Větší počet vědeckých pracovníků v diferenciální geometrii, živější a užší vědecký styk, zájem o problematiku ostatních pracovníků, vzájemné ovlivňování obou zá-

[1]) Zpracováno podle referátu autora, Vývoj naší diferenciální geometrie II, předneseného na první československé konferenci o diferenciální geometrii, která se konala ve dnech 10. až 15. IX. 1961 na Richtrových boudách v Krkonoších.

[2]) J. KLAPKA: Vývoj naší diferenciální geometrie I. Úvodní referát na 1. čsl. konferenci o dif. geometrii.

kladních metod a zejména vliv nových směrů postupně odstraňuje a za čas jistě setře dnešní hranici, i když ovšem i potom zůstanou takoví, kteří budou pracovat jen ve zcela určitém směru, který je nejvíce svojí problematikou i pracovní metodou přitahuje.

Tensorové metody u nás. Metodami tensorového počtu v diferenciální geometrii se zabývala skupina geometrů, kteří se pochopitelně zajímali i o jiná odvětví geometrie a v diferenciální geometrii užívali často i jiných pracovních metod. V přehledu budou tedy uvedeny a stručně zhodnoceny všechny jejich diferenciálně geometrické práce.

Prvý, který se u nás zabýval problematikou řešenou tensorovými metodami, byl L. BERWALD, profesor býv. něm. university v Praze, známý zejména svými pracemi z afinní diferenciální geometrie. Z jeho pražských žáků nejznámější je O. VARGA, nyní profesor techniky v Budapešti, který pracuje hlavně v teorii Finslerových prostorů. Ačkoliv L. Berwald měl dobré vědecké i přátelské styky s českými geometry, neovlivnil je svými pracemi.

Z našich geometrů první práci z problematiky, v níž se užívá metod a symboliky tensorového počtu, měl prof. V. HLAVATÝ v roce 1924.[3]) Od té doby pracoval neobyčejně intenzívně téměř ve všech směrech, kterými se ubírala moderní diferenciální geometrie užívající metod tensorového počtu. V rozmezí zhruba 25 let vydal na 80 prací, které ve svém celku znamenají velmi závažný přínos zejména v teorii zakřivených prostorů. Jeho první práce užívají ještě tzv. přímé symboliky tensorového počtu známé učebnice D. J. STRUIKA.[4]) Brzy však přešel na přehlednější symboliku a vhodnější pracovní metody Schoutenova Ricci-Kalkülu,[5]) který v dalších letech svými pracemi pomáhal rozvíjet v rozsahu dobře patrném ze základní dvojdílné Schoutenovy-Struikovy učebnice moderní diferenciální geometrie.[6])

Hlavatého učebnice diferenciální geometrie [1] zpracovává klasickou látku diferenciální geometrie křivek a ploch eukleidovského prostoru tensorovou metodou, která dává snadno vniknout v obecné metody studia diferenciální geometrie jiných prostorů. Tato učebnice spolu s rozsáhlou dvojdílnou učebnicí diferenciální přímkové geometrie [2] a serií několika prací z Lieovy kulové geometrie ([3] až [6]) znamenají zhruba základ, z něhož vyšly mnohé práce skupiny diferenciálních geometrů, sestávající většinou z přímých či nepřímých žáků V. Hlavatého. Někteří z nich byli ovšem dříve či později ovlivněni i pracemi jiných geometrů nejen českých, ale i zahraničních. Nejvýznamnější z této skupiny je FR. VYČICHLO.

Řešenou problematiku je možno rozvrhnout do šesti celků: 1. metrická diferenciální geometrie, 2. projektivní diferenciální geometrie, 3. speciální geometrie (přímková,

---

[3]) V. HLAVATÝ: Sur le déplacement linéaire du point. Věstník Král. české spol. nauk, *13* (1924).

[4]) D. J. STRUIK: Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Berlín (1922).

[5]) J. A. SCHOUTEN: Der Ricci-Kalkül. Berlín (1924).

[6]) J. A. SCHOUTEN, D. J. STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I (1935), II (1938).

Möbiusova, kulová), 4. prostory s lineární konexí (Riemannovy, afinní, projektivní); 5. anholonomní variety, 6. geometrické objekty a tensory.

1. Metrická diferenciální geometrie. V diferenciální geometrii křivek a ploch obyčejného trojrozměrného eukleidovského prostoru R_3 (E_3 s reálným positivně definitním fundamentálním tensorem) pracovalo více našich geometrů. Některé práce, které by bylo možno sem zařadit, svým zaměřením však současně náleží do geometrií, v nichž vytvořujícím elementem je obecnější geometrický útvar než bod. O těchto pracích, jež se zabývají speciálními třídami ploch (přímkovými a kanálovými), bude proto referováno v souvislosti s pracemi z přímkové a kulové geometrie.

Do vlastní klasické diferenciální geometrie křivek a ploch především patří práce [8] Fr. Vyčichla, v níž se zobecňuje známá Beltramiho věta týkající se geodetické křivosti k_a asymptotické křivky plochy a křivosti k rovinného řezu plochy její tečnou rovinou, $k_a = \frac{3}{2}k$. V podstatě se vyšetřují geometrické důsledky věty, která říká, že všechny křivky na ploše o společné tečně mají společný tzv. vektor druhé křivosti. Užitím vhodného rozkladu vektoru druhé křivosti studují se jednak jeho geometrické vlastnosti, jednak se ho užívá k důkazu věty, která rozšiřuje Beltramiho větu i na parabolické body plochy.

K problematice Vyčichlovy práce vrací se později A. Urban v práci [8], která se rovněž zabývá rozšířením platnosti Beltramiho věty na parabolické body plochy. Výsledky získané Vyčichlem jednak se upřesňují, jednak doplňují zejména případem Bonnetova vzorce, který je zobecněním Beltramiho věty a udává vztah mezi geodetickou křivostí asymptotické křivky a křivostmi křivky, jež se jí dotýká a jejíž oskulační rovina splývá s tečnou rovinou plochy. Je ukázáno, že modifikovaný Bonnetův vzorec a Beltramiho věta platí i pro obyčejný parabolický bod plochy. Zvláště se dokazuje, že v takovém bodě pro jednu větev průsečné křivky tečné roviny s plochou a pro jednu asymptotickou křivku platí Beltramiho podmínka $k_a = \frac{3}{2}k$ právě tehdy, když obě větve průsečné křivky mají v tomto bodě touž geodetickou křivost.

Podrobným studiem vlastností druhého vektoru křivosti a jeho geometrickou interpretací a konstrukcí se zabývá práce [9] téhož autora, v níž se mimo jiné ukazuje, že ke každému tečnému vektoru plochy lze pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ sestrojit jediný vektor, tzv. n-tý vektor křivosti; pro $n > 2$ nebyly jeho vlastnosti dosud podrobněji studovány.

Plochami v R_3 zabýval se rovněž B. Kepr. Ve svém příspěvku [3] o rovnoběžném osvětlení ploch dokázal, že pouze pro kulovou plochu a pro rozvinutelné plochy mez vlastního stínu při každém rovnoběžném osvětlení je geodetickou křivkou. V dalším příspěvku [4] sledoval pak souvislost paralelního přenosu vektoru plochy po uzavřené křivce plochy s její Gaussovou křivostí.

Do diferenciální geometrie speciálních ploch v R_3 náleží především práce [1] M. Mikana, v níž se velmi podrobně studuje speciální přenos na kulové ploše, jehož autoparalelními křivkami jsou loxodromy; byla zde nalezena celá řada pěkných geometrických výsledků. Minimálními plochami v R_3 se zabýval Zd. Horák v práci [2];

z parametrického vyjádření minimálních ploch užitím minimálních křivek odvodil jednak několik známých vzorců jiným způsobem než dosud, jednak řešil některé úlohy o minimálních plochách.

Konstruktivní zřetele vedly B. Kepra ke studiu dvojice ploch. V příspěvku [1] odvozuje diferenciálně geometrickými metodami konstrukci tečen v dvojnásobném bodě průniku dvou ploch. Zajímavou a dosud neuzavřenou tématikou týkající se dvojice ploch v R_3 zabýval se Fr. Vyčichlo v pracích [11] a [12]. Obě jsou zaměřeny na studium dvojice ploch, jež si odpovídají v bodové korespondenci. Z tečných vektorů parametrických křivek obou ploch v odpovídajících si bodech je možno sestrojit jisté diferenciální invarianty. Při studiu základní otázky, jak dalece tyto invarianty charakterisují danou dvojici ploch, se podstatnou měrou užívá tečné kolineace dané korespondence mezi oběma plochami.

Speciální křivky v R_3 studoval B. Kepr. V příspěvku [2] nalezl diferenciální rovnici spádových křivek ve tvaru $[\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{\mathrm{IV}}] = 0$. Přitom $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ je radiusvektor bodu křivky a s její oblouk.

Velmi podrobnému studiu styku křivek s nadkoulemi v R_n se věnoval K. Havlíček v práci [3]. Z četných pěkných výsledků je třeba zvláště vyzvednout nalezení důležité rekurentní relace mezi křivostmi sférických křivek.

2. Projektivní diferenciální geometrie. Zvláště významné a velmi cenné jsou výsledky Fr. Vyčichla v projektivní teorii rovinných křivek, jimž věnoval práce [3], [4] a [7]; nalezl dvě různé geometrické interpretace projektivní normály křivky a její projektivní křivosti. Užil přitom kubiky, která má v daném bodě křivky dvojnásobný bod a v něm styk 7. řádu s danou křivkou. Druhá tečna v dvojnásobném bodě je projektivní normála. Projektivní křivost křivky v jedné z jeho interpretací je až na numerický faktor rovna dvojpoměru (t, n, h, i), kde t je tečna dané křivky, n projektivní normála, h spojnice daného bodu s Halphenovým bodem svazku kubik majících s danou křivkou styk 7. řádu a i spojnice daného bodu s reálným inflexním bodem uvažované kubiky.

Jeho práce [10] z teorie ploch důsledně rozvíjí myšlenku nahradit plochu ve vyšetřovaném bodě vhodnou algebraickou plochou 3. stupně, případně vhodnou algebraickou křivkou. Projektivní vlastnosti plochy v bodě jsou pak důsledkem známých vlastností těchto aproximujících algebraických ploch nebo křivek.

Do projektivní geometrie křivek náleží skupina prací [10] až [14] A. Urbana o zvyšování styku křivek promítáním. Zobecnila se v nich věta dokázaná E. Čechem, která vyjadřuje nutnou a postačující podmínku pro to, aby dvě křivky, které ve společném bodě mají styk řádu $s - 1$, měly v něm skutečný styk řádu $s + \sigma - 1$. Zobecnění je provedeno v tom smyslu, že omezující předpoklad $1 \leqq \sigma \leqq s$ byl vypuštěn. Analytické výsledky umožnily podat geometrické konstrukce hlavních rovin, přímek a bodů, z nichž lze dané křivky promítnout do křivek majících vyšší styk než dané křivky, i pro dvojici protínajících se křivek. Ukázalo se, že pro zvýšení styku křivek promítáním má fundamentální význam kongruence určená danými křivkami a netriviální rozvinutelná plocha ležící v této kongruenci. Užitím těchto přímkových útvarů byly nalezeny nové konstrukce hlavních přímek a bodů. Výsledků bylo rovněž užito k nové geometrické konstrukci Greenovy hrany dané plochy.

3. Speciální geometrie. a) Přímkové geometrii bylo věnováno několik prací, jež vesměs vznikly buď na přímý popud V. Hlavatého nebo z problematiky řešené v jeho učebnici [2] o přímkové geometrii.

Doslova průkopnická je práce [1] Fr. Vyčichla, o níž bylo referováno na 2. Sjezdu matematiků zemí slovanských, v jehož zprávách vyšel rovněž její stručný výtah [2]. Ve čtyřrozměrné nadkvadrice V_4 v pětirozměrném projektivním prostoru P_5, do níž se zobrazí přímkový prostor ve známém Kleinově zobrazení, byl vhodně definován metrický tensor určený až na libovolný nenulový faktor, takže V_4 se jevila jako Riemannova konformně eukleidovská varieta. Ukázalo se pak, že obecný lineární komplex se zobrazí na V_4 do variety V_3, která nikdy není na V_4 geodetická. Tyto první výsledky prokázaly vhodnost a užitečnost nového přístupu ke studiu přímkového prostoru a jeho útvarů, jenž byl později systematicky v poněkud odlišné formě široce rozvinut v Hlavatého základní učebnici [2].

Otázce rozvinutelných ploch věnoval pozornost K. Havlíček v pracích [1], [2] a [7]. Ukazuje se, že v Kleinově zobrazení obrazy rozvinutelných ploch jsou K-minimální křivky, a to dvojího druhu, a odvozují se některé věty týkající se derivovaných ploch, jež těsně souvisí s rozvinutelnými plochami. Zejména se dokazuje, že plocha tečen asymptotické křivky plochy je rozvinutelná plocha, jejíž derivovaná plocha je daná plocha.

Práce [2] A. Urbana doplňuje výsledky uvedené v Hlavatého učebnici [2] tím, že upouští od zjednodušujícího předpokladu a odvozuje základní Frenetovy formule pro nerozvinutelné přímkové plochy, jež jsou uvažované jako K-křivky na K-kvadrice, pouze za předpokladu, že oskulační lineární kongruence podél přímky plochy není parabolická. Ke konstrukci šesti lineárně nezávislých komplexů, s jejichž pomocí lze odvodit Frenetovy formule, je s výhodou užito Lieovy kvadriky, oskulační kongruence a oskulačního komplexu plochy podél přímky plochy.

b) Möbiusovou geometrií se zabýval zvláště Fr. Vyčichlo v práci [9]. V Möbiusově rovině s jedním nevlastním bodem v normovaných tetracyklických souřadnicích se definuje Levi-Civitův ekvipolentní přenos nejen vlastního M-kruhu, tj. orientovaného kruhu, ale také bodu. Výsledku se užívá k zavedení absolutní konformní derivace jednoparametrického kruhového systému. V Möbiusově geometrii pracoval také M. Mikan, který v dosud nepublikované práci [3] studuje jak Möbiusovu tak neeuklidovskou geometrii jednoparametrických útvarů.

c) Lieovou kulovou geometrií pěstují u nás především K. Havlíček a Zd. Vančura, kteří oba v podstatě navázali na práci [3] až [6] V. Hlavatého o kulové geometrii.

K. Havlíček obrátil svou pozornost ke kanálovým plochám, tj. k obalovým plochám jednoparametrické soustavy kulových ploch nebo rovin. Ve své habilitační práci [4] odvozuje základní větu, která udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby plocha V_2 v R_3 byla kanálová. Tato podmínka je dána anulováním skaláru $u_{\nu\lambda\mu}u_{\alpha\beta\gamma}P^{\nu\alpha}P^{\lambda\beta}P^{\mu\gamma}$, kde $u_{\nu\lambda\mu}$ je symetrický kubický tensor a $P^{\alpha\beta}$ je kvadratický tensor, které jsou apolární. Přitom

$$u_{\nu\lambda\mu} = v_{\nu\lambda\mu} - \tfrac{1}{4}[Q_\nu Q_{\lambda\mu} + Q_\lambda Q_{\mu\nu} + Q_\mu Q_{\nu\lambda}]\,,$$

$$Q_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(k_{\lambda\mu} + k_{\mu\lambda})\,,\quad Q_{\lambda\nu}P^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\nu\,,\quad Q_\nu = v_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu}\,;$$

$v_{\nu\lambda\mu}$ je tensor vhodně sestrojený z derivací souřadnic bodu dané plochy a její normály. Anulování kubického tensoru $u_{\nu\lambda\mu}$ charakterisuje Dupinovy cyklidy. Užitím Lieovy transformace v Kleinově K-prostoru, která převádí Plückerovy přímkové souřadnice v hexasférické souřadnice koule, je nalezena souvislost uvedeného skaláru a kubického tensoru se známým skalárem a kubickým tensorem, jejichž anulování charakterisuje přímkové plochy resp. kvadratické přímkové plochy.

Ukazuje se, že kovariantní vektory Q_ν, jichž se užívá ke konstrukci kubických tensorů, nejsou v kulové a přímkové geometrii téhož druhu. V přímkové geometrii je vždy gradientem. M. Profant nedávno dokázal [1], že uvedený kovariantní vektor v kulové geometrii je gradientem právě tehdy, když plocha je rozvinutelná.

V pracích [5] a [6] našel K. Havlíček všechny kanálové plochy, které jsou současně přímkovými a všechny kanálové Weingartenovy plochy.

Zd. Vančura se věnoval studiu kongruencí, tj. dvojparametrických soustav Lieových koulí, a kanálových ploch, které v nich leží. V pracích [1] až [3] systematicky užitím Kleinova K-prostoru vyšetřuje poměrně obtížné otázky týkající se jednak oskulačních K-prostorů, jednak plášťů kongruencí koulí, tj. geometrických míst ohnisek koulí ležících v kongruenci. Přes komplikované výpočty dochází k pěkným jednoduchým a názorným geometrickým vlastnostem plášťů, jako je např. tvrzení: Je-li plášť kongruence koulí plocha, pak její tečná rovina v ohnisku je ohnisková rovina. Kromě těchto základních otázek všímá si některých speciálních kongruencí, např. W-kongruencí a kongruencí, jejichž pláště jsou křivky.

4. Prostory s lineární konexí. a) *Riemannovy prostory.* Práce [5] Fr. Nožičky zabývají se hledáním nutných podmínek pro existenci totálně geodetických nadploch, tj. variet s nulovým druhým metrickým tensorem, v obyčejném n-rozměrném Riemannově prostoru, vnořitelném do eukleidovského prostoru dimense $n + 1$.

Do teorie Riemannových prostorů náleží rovněž práce [1] a [3] až [5] A. Urbana. V disertační práci [1] je užitím komplexu normál variety V_2 vnořené do V_4 podána geometrická interpretace některých skalárů, vektorů a tensorů spjatých s V_2. Další práce [3] je věnována problému určení diferenciální rovnice všech křivek dané variety. Problém je rozřešen pro případ nadploch, jejichž druhá fundamentální forma je úměrná prvé. Je-li daný prostor V_n n-rozměrným eukleidovským prostorem R_n, dostáváme diferenciální rovnici křivek nadkoule. V habilitační práci [4] je podána konstrukce a geometrická interpretace některých skalárních a vektorových hustot, které jsou invariantní při geodetických transformacích, tj. při transformacích, jež reprodukují geodetiky v celku. V poznámce [5] je pro případ dvojrozměrných Riemannových prostorů ukázána souvislost jisté význačné vektorové hustoty zavedené pro Riemannovy prostory T. Y. THOMASEM s projektivním tensorem křivosti.

b) *Prostory s afinní konexí.* Teorií nadploch v zakřivených i rovných afinních prostorech se zabýval Fr. Nožička v sérii na sebe navazujících článků [1] až [4], [6] a [7]. Základní problém je formulován v prvém z nich. Jde o sestrojení afinní normály nadplochy vnořené do zakřiveného n-rozměrného afinního prostoru; normála je sestrojena za jistého omezujícího předpokladu. Zároveň je diskutována otázka tzv. afinní indukce, tj. konexe indukované touto normálou. Jsou nalezeny dvě třídy invariantních konexí vnořené nadplochy. Další články v podstatě doplňují základní v několika směrech. Především se ukazuje, že metrická indukce je speciálním případem afinní indukce (pro Riemannův prostor), dále se konstruuje afinní normála i bez původních omezujících předpokladů a konečně se studuje případ plochy v obyčejném afinním prostoru, pro níž se najdou tzv. Frenetovy vzorce.

B. BUDÍNSKÝ ve svých dosud nepublikovaných pracích [1], [2] navazuje na výsledky Fr. Nožičky. Zejména podává jednoduchou geometrickou interpretaci paralelního přenosu na nadploše vnořené do obyčejného n-rozměrného afinního prostoru a podrobněji studuje vlastnosti ploch v A_3.

Otázkou styku variet v afinním prostoru zabývá se Fr. Nožička v práci [8].

Příspěvkem k teorii obecných prostorů s afinní konexí je práce [15] A. Urbana, v níž se ukazuje, že tzv. U-prostor zavedený S. I. HUSEINEM v jeho teorii jednotného pole gravitace a elektromagnetismu je semimetrický a semi-symetrický. Současně se odvozují některé bližší vlastnosti konexí tohoto typu.

Do diferenciální geometrie prostorů s afinní konexí v podstatě patří i práce [6] Zd. Horáka, v níž se definuje absolutní integrál vektoru podél křivky jako vektor, jehož absolutní derivace je rovna danému vektoru v každém bodě dané křivky.

c) *Prostory s projektivní konexí.* Habilitační práce [5] Fr. Vyčichla je velmi hodnotným příspěvkem ke studiu zakřivených projektivních prostorů. V podstatě se v ní zobecňuje problém řešený V. Hlavatým, který našel úplný systém invariantů křivky zakřiveného projektivního prostoru. Problém řešený Fr. Vyčichlem lze formulovat takto: Podél libovolné regulární křivky v zakřiveném projektivním prostoru je dáno tensorové pole, které je známé až na multiplikativní faktor. Jest určit diferenciální invarianty pole a takové veličiny, které spolu se svými absolutními derivacemi splňují rovnice odpovídající Frenetovým formulím pro křivky. V poměrně rozsáhlé práci je podáno úplné řešení problému, a to dvěma metodami; užilo se při něm s výhodou pojmu Königových prostorů.

A. Urban v pracích [6] a [7] přiřazuje systému parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu $\partial^2_{\mu\lambda} z = \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, \partial_{\kappa} z + \Gamma_{\mu\lambda} z$ užitím jeho koeficientů $(n + 1)$-rozměrný prostor s projektivní konexí. V něm pak každé řešení daného systému je možno interpretovat jako geodetickou nadplochu. Užitím geometrických metod lze pak k danému systému sestrojit Bianchiho konjugovaný systém.

5. Anholonomní variety. Jak známo, anholonomní varietu X_n^m v X_n definuje soustava $n - m$ nezávislých Pfaffových rovnic, pro kterou nejsou splněny podmínky integrability. Geometricky lze ji definovat takto: Každému bodu v X_n je přiřazena m-rovina E_m, přičemž neexistuje varieta X_m, pro níž by E_m byly tečnými rovinami.

Pojem anholonomní variety snad vůbec poprvé, i když ne přímo explicitně, tedy alespoň implicitně, se vyskytl v práci [1] Zd. Horáka, kde je odvozen vzorec pro zrychlení na anholonomní varietě. V práci [3] je již definována obecná anholomní varieta; Horák ji nazývá kvasivarietou. Dosti obsažná práce přináší i základy absolutního počtu a teorii obecného lineárního přenosu v anholonomních varietách. Je škoda, že tato práce, která vznikla již dříve a byla dlouho diskutována s V. Hlavatým, vyšla až v r. 1927. Mezitím totiž vyšly na stejné téma v r. 1926 v *Comptes rendus* dvě práce známého rumunského geometra G. VRANCEANU, jemuž tak připadla priorita v zavedení tak významného pojmu v diferenciální geometrii. Ke geometrickým pracím Horákovým o anholonomních varietách patří rovněž [4], kde byl zaveden tensorový počet v neholonomních souřadnicích pro nejobecnější lineární konexi, a [5], v níž byl definován tensor křivosti na anholonomní varietě.

Velmi pěkným geometrickým přínosem k teorii anholonomních variet je práce [6] Fr. Vyčichla, která navazuje na výsledky E. BORTOLOTTIHO a E. BOMPIANIHO a zobecňuje je. Jestliže podél křivky dané V_n^m (tj. podél integrální křivky Pfaffova systému, který definuje V_n^m), která leží v projektivním prostoru S_n, jsou dány křivkové elementy $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{k+1}$ řádu 0, 1, 2, ..., $k + 1$, které vycházejí z bodu E_0 a mají společné elementy $E_0, E_1, \ldots, E_{k-1}$, pak všechny tyto elementy náleží nekonečně mnoha holonomním varietám V_m. Přidáme-li k daným elementům ještě E_{k+2}, pak již neexistuje žádná varieta V_m, na níž by ležely elementy $E_0, E_1, \ldots, E_{k+2}$.

Speciální případ V_3^2 v S_3 je studován podrobněji. Zvláště se dokazuje, že mezi nekonečně mnoha holonomními varietami V_2, které v daném bodě E_0 aproximují danou V_3^2 v tom smyslu, že obsahují všechny elementy E_0, E_1 integrálních křivek dané anholonomní variety V_3^2 procházející bodem E_0, existuje nekonečně mnoho takových, které mají s V_3^2 společné Darbouxovy směry a pro něž Bortolottiho kvadrika je Lieovou kvadrikou.

Anholonomními varietami (spolu s holonomními) zabývá se rovněž práce [2] M. Mikana, v níž jsou studovány Königovy prostory přidružené vnořeným varietám.

6. Geometrické objekty a tensory. Obecná teorie tensorů a obecněji geometrických objektů byla u nás jen velice málo pěstována. Do tensorové analysy náleží drobnější příspěvek [7] Zd. Horáka, v němž se dokazuje, že derivací tensoru podle složek jiného tensoru je opět tensor.

V práci [16] A. Urbana našly se nutné a postačující podmínky pro to, aby geometrické objekty druhé třídy (s výjimkou jednoho typu), pro něž počet komponent se rovná dimensi prostoru, byly ekvivalentní. Řešení problému se převedlo na řešení systému funkcionálních rovnic. V dosud nepublikované práci [17] problém byl řešen pro obdobné geometrické objekty třídy r.

Závěr. Stranou byly ponechány aplikace tensorových metod diferenciální geometrie. Je však třeba vyzvednout tu skutečnost, že u nás otázkám aplikací je věnována značná pozornost.

Tak Fr. Vyčichlo užil diferenciálně geometrických metod, zvláště tensorových v teorii pružnosti a v teorii skořepin; v tomto směru pracuje rovněž B. Kepr. Zd. Horák, který pracuje v technické fyzice, došel k problematice svých geometrických prací z teoretických úvah fyzikálních. Obráceně zase svoje výsledky z tensorového počtu aplikoval na mechaniku a na kvantovou fysiku. Fr. Nožička řešil tensorovými metodami některé problémy mechaniky a zabývá se jejich užitím v teorii relativity.

Klasickými metodami diferenciální geometrie ve vyšší geodesii pracuje J. Kašpar. Otázkami aplikací diferenciálně geometrických metod užitých na komplexní funkce reálné proměnné při studiu rovinné kinematické geometrie zabývá se systematicky v řadě svých prací Zd. Pírko; spolu se svými spolupracovníky M. Pišlem a J. Chudým přispívá tak významným způsobem k řešení základních otázek pohybu v rovině.

V úvodu byly blíže osvětleny důvody, které vedly k tomu, aby byly shrnuty výsledky skupiny pracovníků v diferenciální geometrii tensorového směru. To však neznamená, že by z ostatních geometrů nikdo se již nezabýval obdobnou problematikou. Naopak, výsledky M. Syptáka, který se v několika pracích zabýval studiem speciálních tříd křivek v R_n, které jsou zobecněním známých křivek v R_3, M. Haranta, který zejména studoval vztahy mezi křivostmi obecných křivek v R_n a jisté speciální křivky v R_n, V. Vilhelma, který pracoval v teorii Minkowského prostorů a studoval absolutní derivace ve Finslerových prostorech, Č. Vitnera, který se zajímal o výjimečné body na křivkách ve V_n a odvodil základní vztahy centro-eukleidovské geometrie, atd., jsou pěkným a přitom velmi užitečným přínosem v tomto směru.

Je škoda, že podaný přehled nemohl konstatovat nějaké pozoruhodnější soustředění zájmu několika geometrů na řešení okruhu problémů těsněji spolu souvisících. I když výsledky získané jednotlivými pracovníky jsou v mnohém ohledu velmi pěkné a často podnětné, přece jen zůstávají poměrně dost isolované. Mezi mladšími diferenciálními geometry jen málokteří se zabývají tensorovými metodami. Snad to není ani tak nezájmem, jako spíše nedostatkem vhodné orientace po problematice a ne dost dobře organisovaným vedením. Počínající těsnější spolupráce v československé diferenciální geometrii a živější zájem o problematiku řešenou na jiných pracovištích dávají tušit možnost širšího rozvoje i těch směrů diferenciální geometrie, které se zabývají tensorovými metodami.

Literatura

Budínský Br.:

[1] Příspěvek k teorii afinní normály (1960), nepublikováno, str. 15.

[2] Příspěvek k afinní teorii ploch (1961), nepublikováno, str. 21.

Havlíček K.:

[1] Klein's Representation of Ruled Surfaces. Spisy přír. fak. K. u., *172* (1939/46), 17—20.

[2] Rozvinutelné plochy v přímkové geometrii. Rozpravy II. tř. České akad., *LIII*, 42 (1943), 1—24; Mitteilungen der Tschech. Akad. der Wissenschaften, *LIII*, 42 (1943), 1—3.
[3] Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à *n* dimensiones — Courbes sphériques. Čas. pro pěst. mat. a fys., *72* (1947), 137—146.
[4] Sur les surfaces enveloppes de sphères. Čas. pro pěst. mat., *74* (1949), 21—40.
[5] Surfaces réglées qui sont enveloppes des sphères. Czech. Math. Journal, *1* (*76*) (1951), 187 až 197. Каналовые линейчатые поверхности. Чехосл. матем. журнал, *1* (*76*), (1951), 213—224.
[6] Kanálové *W*-plochy. Čas. pro pěst. mat., *78* (1953), 347—357.
[7] Poznámka k přímkové geometrii rozvinutelných ploch. Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), 26—37.

Hlavatý V.:
[1] Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. Praha (1937).
[2] Diferenciální přímková geometrie I, II. Rozpravy II. tř. České akad., *L*, 27 (1941).
[3] Zur Lie'schen Kugelgeometrie I. Kanalflächen. Věstník Král. české spol. nauk, Praha (1941).
[4] K Lieově kulové geometrii II. Kongruence (Elementární vlastnosti). Rozpravy II. tř. České akad., *LI*, 33 (1941).
[5] K Lieově kulové geometrii III. Kongruence (Základní rovnice). Rozpravy II. tř. České akad., *LII*, 7 (1942).
[6] K Lieově kulové geometrii IV. Kongruence (Integrabilní konexe). Rozpravy II. tř. České akad., *LII*, 16 (1942).

Horák Zd.:
[1] Princip energie a rovnice fysiky. Spisy přír. fak. K. u., *25* (1924), 1—40.
[2] K teorii minimálních ploch. Čas. pro pěst. mat. a fys., *56* (1927), 252—267.
[3] Zobecnění pojmu variety. Spisy přír. fak. M. u., *86* (1927), 1—20.
[4] Die Formeln für allgemeine lineare Übertragung bei Benutzung von nichtholonomen Parametern. Nieuw Archief voor Wiskunde, *XV*, Groningen (1927), 193—201.
[5] Sur la courbure des variétés non holonomes. Comptes rendus, *187* (1928), 1273—1275.
[6] Sur le problème fondamental du calcul intégral absolu. Comptes rendus, *189* (1929), 19—21.
[7] Sur les dérivées par rapport aux affineurs. L'enseignement Mathématiques, *28* (1929), 212 až 214.

Kepr B.:
[1] Příspěvek k průniku dvou ploch. Pokroky mat., fys. a astron., *I*, 3 (1956), 242.
[2] Příspěvek ke geometrii křivek spádových. Pokroky mat., fys. a astron., *II*, 3 (1957), 365 až 367.
[3] Příspěvek k rovnoběžnému osvětlení ploch. Sborník věd. prací fak. inž. stav. v Praze, SPN (1958), 149—152.
[4] Příspěvek k rovnoběžnému přenosu vektorů plochy. Sborník 21 ČVUT fak. inž. stav., SPN (1959), 143—148.

Mikan M.:
[1] Cartanova geometrie na ploše kulové. Čas. pro pěst. mat. a fys., *66* (1927), 103—121.
[2] Königovy prostory přidružené vnořeným varietám. Rozpravy II. tř. České akad., *XLIX*, 33 (1939), 1—13; Mitteilungen der Tschech. Akad. der Wissenschaften (1939), 1—4.
[3] Möbiova a neeuklidovská geometrie jednoparametrických útvarů (rukopis).

Nožička Fr.:
[1] Le vecteur affinnormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin. Čas. pro pěst. mat. a fys., *75* (1950), 179—209.
[2] Konexe a normála invariantního směru pro nadplochu v prostoru afinním. Čas. pro pěst. mat. a fys., *74* (1949), 260—263.

[3] La connexion et la normale de l'hypersurface dans l'espace riemannien du point de vue de la géométrie affine. Czech. Math. Journal, *1* (*76*) (1951), 17—28. Связность и нормаль гиперповерхности в пространстве римана с точки зрения аффинной геометрии. Чехосл. матем. журнал, *1* (*76*) (1951), 19—31.

[4] Křivka v afinním prostoru a její afinní oblouk. Čas. pro pěst. mat. *78* (1953), 307—339.

[5] O nadplochách totálně geodetických v Riemannově prostoru I, II. Čas. pro pěst. mat., *78* (1953), 65—72, 215—228.

[6] K problému afinní normály a indukované konexe nadplochy v afinním prostoru. Čas. pro pěst. mat., *79* (1954), 101—134.

[7] Příspěvek k afinní geometrii ploch. Čas. pro pěst. mat., *81*, 137—156.

[8] O styku variet v afinním lineárním prostoru. Čas. pro pěst. mat., *83* (1958), 171—201.

Profant M.:

[1] Poznámka ke skaláru charakterisujícímu kanálové plochy. Acta univ. Carolinae, Math., *2* (1960), 51—60.

Urban A.:

[1] Le complex de normales de V_2 dans V_4. Spisy přír. fak. K. u., *154* (1937), 28—32.

[2] Frenetovy vzorce nerozvinutelných přímkových ploch. Rozpravy II. tř. České akad., *LII*, 18 (1942), 1—20; Mitteilungen der Tschech. Akad. der Wissenschaften, *LII*, 18 (1942), 1—3.

[3] Diferenciální rovnice křivek na speciální V_{n-1} ve V_n. Rozpravy II. tř. České akad., *LVII*, 9 (1947), 1—12; Bullet. intern. de l'Académie tchèque des Sciences, *LVII*, 9 (1947), 1—5.

[4] On the geodesic Representation between Twodimensional Riemannian Spaces. Kon. Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, Proceedings *LI*, 2 (1948), 95—105; Indagationes Mathematicae, *X*, 1 (1948), 269—279.

[5] Note on the T. Y. Thomas's Paper: On the Projective Theory of Two Dimensional Riemann Spaces. Čas. pro pěst. mat. a fys., *73* (1948), 89—92.

[6] On the Geometry of a System of Partial Differential Equations of the Second Order. Kon. Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, Proceedings *LII*, 8 (1949), 303—315; Indagationes Mathematicae, *XI*, 4 (1949), 855—867.

[7] Geometrisace jistého systému parciálních rovnic druhého řádu. Čas. pro pěst. mat. a fys., *75* (1950), 267—269.

[8] Beltramiho věta pro parabolické body plochy. Čas. pro pěst. mat., *77* (1952), 373—381.

[9] Druhý útvar křivosti plochy v R_3. Čas. pro pěst. mat., *78* (1953), 73—88.

[10] Styk křivek v projektivním prostoru. Sborník I. věd. konf. strojní fak. ČVUT (1956), 4, 1—3.

[11] O styku křivek v projektivním prostoru. Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), 121—122.

[12] Théorème fondamental de la théorie du contact des courbes. Чехосл. матем. журнал *7* (*82*) (1957), 273—294.

[13] Zvýšení styku křivek promítáním. Mat.-fyz. čas. SAV, *VII* (1957), 207—234.

[14] Zvýšení styku křivek promítáním (případ protínajících se křivek trojrozměrného prostoru). Sborník II. věd. konf. fak. strojního inž. ČVUT, SPN (1958), 107—114.

[15] On Space of an Unified Theory of Gravitation and Electromagnetism. Tensor, *9*, 3 (1959), 205—208.

[16] O ekvivalenci geometrických objektů druhé třídy. Sborník III. věd. konference strojní fakulty ČVUT (v tisku).

[17] O ekvivalenci jistých geometrických objektů *r*-té třídy, rukopis.

Vančura Zd.:

[1] Les congruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přír. fak. K. u., *194* (1950), 20—28.

[2] Pláště kongruence koulí. Čas. pro pěst. mat., *80* (1955), 317—327.

[3] Některé vlastnosti plášťů kulových kongruencí. Sborník věd. konf. stav. fak. ČVUT (1960), v tisku.

Vyčichlo Fr.:

[1] Lineární přímkový komplex jako přímková varieta. Rozpravy II. tř. České akad., *44*, 28 (1934), 1—12; Bullet. intern. de l'Acad. des Sciences de Bohème (1934), 1—2.

[2] Lineární přímkový komplex jako trojrozměrná varieta. Zprávy z druhého sjezdu matem. zemí slovanských (1935), 199—200.

[3] Sur une interprétation géométrique de la courbure projective des courbes planes. Bulletin de la Société math. de France, *64* (1936), 87—98.

[4] Sur quelques propriétés algébraiques des courbes du faisceau Darboux-Segre. Mathematica *12*, Cluj (1936), 139—145.

[5] Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe. Čas. pro pěst. mat. a fys., *67* (1937), 26—61.

[6] Contributi alla geometria proiettiva delle varieta anolonoma. Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei, *XXVII*, ser. 6^a, 12 (1938), 646—658.

[7] Interpretazione geometrica della curvatura proiettiva delle curve piane. Bolletino dell'Unione Mat. Italiana, *17* (1938), 75—77.

[8] Příspěvek k zobecněné větě Beltramiho. Rozpravy II. tř. České akad., *L*, 2 (1940), 1—9; Mitteilungen der Tschech. Akad. der Wissenschaften, *L*, 2 (1940), 1—3.

[9] O ekvipolentním přenosu v Möbiusově rovinné geometrii. Rozpravy II. tř. České akad., *LIII*, 28 (1943), 1—14; Mitteilungen der Tschech. Akad. der Wissenschaften, *LIII*, 28 (1943), 1—10.

[10] O některých projektivních invariantech ploch. Mat.-fyz. čas. SAV, *III* (1953), 41—47.

[11] O diferenciálních invariantech zvláštní dvojice přímkových ploch. Sborník prací k sedmdesátinám prof. Fr. Kadeřávka, SNTL (1955), 131—134.

[12] O dvojicích ploch se společnými diferenciálními invarianty. Mat.-fyz. čas. SAV, *VI* (1956), 85—97.

Резюме

ОБЗОР ДОСТИЖЕНИЙ ЧЕХОСЛОВАЦКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТЕНЗОРНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

АЛОИС УРБАН (Alois Urban), Прага

В статье приводится обзор достижений чехословацких геометров, которые работали в области дифференциальной геометрии главным образом с использованием методов тензорного исчисления.

Подведя краткий итог исторического развития тензорных методов в Чехословакии, автор оценивает отдельные работы в рамках шести разделов: 1. в метрической дифференциальной геометрии, 2. в проективной дифференциальной геометрии, 3. в специальных геометриях (в геометрии прямых, в геометрии Мебиуса и в сферической геометрии), 4. в дифференциальной геометрии пространств с линейной связностью (в геометрии Римана, аффинной и проективной геометриях), 5. в теории анголономных пространств и 6. в теории геометрических объектов.

В заключение дается перечень всех работ, о которых было упомянуто.

Статья представляет собой обработанное извлечение из части вступительной лекции, причитанной на первой чехословацкой конференции по дифференциальной геометрии, состоящейся с 10-го по 15-ое сентября 1961 г., в которой проф. Й. Клапка и автор дали общий обзор развития и современного состояния дифференциальной геометрии в Чехословакии.

Summary

SURVEY OF CZECHOSLOVAK RESULTS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY USING TENSOR METHODS

ALOIS URBAN, Praha

The aim of this article is to present a summary of the results established by the Czechoslovak geometers working in differential geometry and using chiefly the methods of tensor calculus.

After a short survey of the historical development of tensor methods in Czechoslovakia, individual papers are reviewed within the scope of six larger groups: 1° metric differential geometry, 2° projective differential geometry, 3° special geometries (line, Möbius and sphere geometries), 4° differential geometry of spaces with linear connections (Riemannian, affine a projective spaces), 5° the theory of nonholonomic spaces and 6° the theory of geometric objects.

A list of all reviewed papers is adjoined.

The article is a modified summary of one part of the introductory lecture at the First Czechoslovak Conference on Differential Geometry, which took place from the 10th to 15th September 1961, where prof. J. KLAPKA and the author surveyed the development and present state of Czechoslovak differential geometry.