Petr Mandl

Věková struktura markovských větvících procesů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 353--360

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108750

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

VĚKOVÁ STRUKTURA MARKOVSKÝCH VĚTVÍCÍCH PROCESŮ

PETR MANDL, Praha

(Došlo dne 26. června 1964)

Práce obsahuje věty o konvergenci podle pravděpodobnosti věkového rozložení částic. Předpokládá se, že částice během své existence mění stav způsobem homogenního Markovova procesu.

1. Předmětem práce je studium soustavy X, skládající se z prvků, které budou nazývány částicemi, s těmito vlastnostmi: Každá částice existuje v některém ze stavů $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. V případě, že částice je ve stavu ω_i, potom pravděpodobnost, že přejde za dobu Δt do stavu $\omega_j (j \neq i)$ je $q_{ij}\, \Delta t + o(\Delta t)$. Dále je pravděpodobnost $\mu_i(n_1, n_2, \ldots, n_r)\, \Delta t + o(\Delta t)$, že částice v době Δt zanikne a dá vznik n_1 částicím ve stavu $\omega_1, \ldots, n_r$ částicím ve stavu ω_r. Zde $n_1 \geqq 0, \ldots, n_r \geqq 0$. Přitom zmíněné pravděpodobnosti nezávisí na předchozím vývoji částic a již existující částice na sebe navzájem nepůsobí.

Uvedené podmínky charakterizují homogenní Markovův větvící proces. Je zde pouze ten doplněk, že přechod částice do stavu ω_j je odlišován od zániku částice a vzniku jedné nové částice ve stavu ω_j. Má tedy smysl studovati rozložení částic podle věku. Výsledky, obdobné větě 1, je třeba viděti v tvrzeních o konvergenci věkového rozložení v časově závislých procesech větvení a o asymptotickém chování počtu částic ve vícerozměrných Galton-Watsonových procesech. ([1], Věty 9.2, 25.1.)

2. Budeme používati těchto symbolů:

$\boldsymbol{E}_j$ střední hodnota za podmínky, že v čase 0 existovala jediná částice ve stavu ω_j se stářím 0,

$\boldsymbol{P}_j(.)$ pravděpodobnost za téže podmínky,

$\boldsymbol{P}(.)$ pravděpodobnost při libovolném, blíže neurčeném výchozím stavu částic,

$M_i(t, x)$ počet částic ve stavu ω_i v čase t, jejichž stáří je menší než x,

$$W_i(t, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}M_i(t, x)\,, \quad \lambda \geqq 0\,,$$

$W_i(t) = W_i(t, 0)$ – počet částic ve stavu ω_i v čase t,

$$W(t) = W_1(t) + \ldots + W_r(t),$$

$R_i(t, x) = M_i(t, x) W_i(t)^{-1}$ pro $W_i(t) > 0$ – věkové rozložení částic ve stavu ω_i v čase t; pro $W_i(t) = 0$ klademe $R_i(t, x) = 0$;

T okamžik vymření populace. V případě, že k vymření nedojde, je $T = \infty$.

Položme dále pro $i, j = 1, \ldots, r$

$$-q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} + \sum_{n_1, \ldots, n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r), \tag{1}$$

$$\varrho_{ij} = \sum_{n_1, \ldots, n_r} n_j \mu_i(n_1, \ldots, n_r), \quad s_{ij} = q_{ij} + \varrho_{ij},$$

$$Q = \|q_{ij}\|, \quad S = \|s_{ij}\|.$$

Budeme předpokládat, že platí pro $i = 1, \ldots, r$

$$\sum_{n_1, \ldots, n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r)(n_1 + \ldots + n_r)^2 < \infty. \tag{2}$$

Za předpokladu (2) jsou konečné veličiny $n_{ij}(t) = \mathbf{E}_i W_j(t)$ (viz [2], § 5) a jejich matice $N(t) = \|n_{ij}(t)\|$ vyhovuje vztahu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = SN(t), \quad N(0) = E. \tag{3}$$

(Viz dále (7) pro $\lambda = 0$). E je jednotková matice.

Definice. Soustava X se nazývá *positivně regulární*, když

$$\lim_{t \to \infty} n_{ij}(t) = \infty \quad \text{pro} \quad i, j = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

Lemma. *Když X je positivně regulární, potom $n_{ij}(t) = v_i \pi_j e^{\gamma t} + O(e^{\beta t})$ pro $i, j = r$, kde γ, v_i, π_j jsou vesměs positivní, $\gamma > \beta$. Zde $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ je (až na vynásobení jediný) levý vlastní vektor matice S odpovídající charakteristickému číslu γ.*

Důkaz. Dle (4) existuje t_0 tak, že $n_{ij}(t_0) > 0$ pro $i, j = 1, \ldots, r$. Z (3) vyplývá, že je $N(t) = \exp St$. Z Perronovy věty pro matice s nezápornými prvky (viz [3]) plyne

$$N(t_0 n) = N(t_0)^n = \|v_i \pi_j\| \varrho_0^n + O(\varrho_1^n),$$

kde $\varrho_0 > \varrho_1$. Podle (4) musí být $\varrho_0 > 1$. Tvrzení lemmatu dostaneme, klademe-li

$$\gamma = t_0^{-1} \log \varrho_0, \quad \beta = t_0^{-1} \log \varrho_1.$$

Označme $p_{ij}(t)$ pravděpodobnost, že částice, která se nachází ve stavu ω_i nezanikne za dobu t a bude ve stavu ω_j. Položme $P(t) = \|p_{ij}(t)\|$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t) = P(t)\, Q$$

je soustava Kolmogorových diferenciálních rovnic pro $p_{ij}(t)$.

Věta 1. *Když X je positivně regulární, potom pro každé $\varepsilon > 0$ a $j = 1, 2, \ldots, r$ platí*

$$(5) \qquad \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{P}(\sup_x |R_j(t, x) - F_j(x)| > \varepsilon, T > t) = 0 .$$

Zde

$$(6) \qquad F_j(x) = 1 - e^{-\gamma x} \pi_j^{-1} \sum_{i=1}^{r} \pi_i \, p_{ij}(x) .$$

Důkaz věty 1 bude proveden v bodech 3–7.

3. Nejprve vyšetříme veličiny $\varphi_{ij}(t, \lambda) = \boldsymbol{E}_i \, W_j(t, \lambda)$. Použijeme-li předpokladů v bodě 1, nahlédneme celkem snadno, že platí

$$\varphi_{ij}(t + \Delta t, \lambda) = (1 + q_{ii} \Delta t) \{\varphi_{ij}(t, \lambda) + p_{ij}(t) [e^{-\lambda(t + \Delta t)} - e^{-\lambda t}]\} + \\ + \Delta t \sum_{k \neq i} q_{ik} \varphi_{kj}(t, \lambda) + \Delta t \sum_{n_1, \ldots, n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r) [n_1 \varphi_{1j}(t, \lambda) + \ldots + \\ + n_r \varphi_{rj}(t, \lambda)] + o(\Delta t) .$$

Odkud podle (1)

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_{ij}(t, \lambda) = -\lambda e^{-\lambda t} p_{ij}(t) + \sum_k s_{ik} \varphi_{kj}(t, \lambda) .$$

Označíme-li $\Phi(t, \lambda) = \|\varphi_{ij}(t, \lambda)\|$, máme (7) v maticovém zápisu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(t, \lambda) = -\lambda e^{-\lambda t} P(t) + S \, \Phi(t, \lambda) , \quad \Phi(0, \lambda) = E .$$

S použitím (3) dostáváme

$$\Phi(t, \lambda) = N(t) - \lambda \int_0^t N(t - s) \, e^{-\lambda s} P(s) \, \mathrm{d}s .$$

Klademe-li

$$(8) \qquad \bar{N} = \|v_i \pi_j\| ,$$

máme dle lemmatu

$$(9) \qquad \Phi(t, \lambda) = \bar{N}\left(E - \lambda \int_0^t e^{-(\lambda + \gamma) s} P(s) \, \mathrm{d}s\right) e^{\gamma t} + O(e^{\beta t}) = \\ = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \, \mathrm{d}\bar{N}(E - e^{-\gamma s} P(s)) \, e^{\gamma t} + O(e^{\beta t}) = \Xi(\lambda) \, e^{\gamma t} + O(e^{\beta t}) .$$

Zde jsme zavedli novou matici $\Xi(\lambda) = \|\xi_{ij}(\lambda)\|$.

Budiž

$$\eta_j(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}F_j(x) \quad \text{pro} \quad \lambda \geqq 0\,, \quad j = 1, \ldots, r\,.$$

Použijeme-li (6), (8), (9), vidíme, že platí

$$\xi_{ij}(\lambda) = v_i \pi_j\, \eta_j(\lambda) \quad \text{pro} \quad i, j = 1, \ldots, r\,. \tag{10}$$

4. Ukážeme, že veličiny $W_j(t, \lambda)\, e^{-\gamma t}$ konvergují při $t \to \infty$ podle kvadratického středu. Označme pro $\tau > 0$

$$\varrho_{ij}(t) = \varrho_{ij}(t, \tau, \lambda) = \boldsymbol{E}_i\, W_j(t, \lambda)\, W_j(t + \tau, \lambda)\,.$$

Konečnost veličin $\varrho_{ij}(t)$ je zaručena podmínkou (2). Z předpokladů o soustavě $\boldsymbol{X}$ plyne vztah

$$\begin{aligned} \varrho_{ij}(t + \Delta t) = (1 + q_{ii}\,\Delta t)\,\{\varrho_{ij}(t) &+ \\ + p_{ij}(t)\,[(e^{-\lambda(t+\Delta t)} - e^{-\lambda t})\,(\varphi_{jj}(\tau, \lambda) - e^{-\lambda\tau} p_{jj}(\tau)) &+ \\ + p_{jj}(\tau)\,(e^{-\lambda(2t+\tau+2\Delta t)} - e^{-\lambda(2t+\tau)})]\} + \Delta t \sum_{k \neq i} q_{ik}\varrho_{kj}(t) &+ \\ + \Delta t \sum_{n_1,\ldots,n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r)\,[n_1(\varrho_{1j}(t) - \varphi_{1j}(t, \lambda)\, \varphi_{1j}(t + \tau, \lambda)) &+ \ldots \\ + \ldots + (n_1\, \varphi_{1j}(t, \lambda) + \ldots)\,(n_1\, \varphi_{1j}(t + \tau, \lambda) + \ldots)] &+ o(\Delta t)\,. \end{aligned}$$

Zde při výpočtu výrazu v poslední hranaté závorce se používá předpokladu, že částice se vyvíjejí nezávisle a tedy kovariance součtu se rovná součtu kovariancí.

Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varrho_{ij}(t) = \{-\lambda e^{-\lambda t}\, p_{ij}(t)\,[\varphi_{jj}(\tau, \lambda) + (2e^{-\lambda(t+\tau)} - e^{-\lambda\tau})\, p_{jj}(\tau)] &+ \\ + \sum_{n_1,\ldots,n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r)\,[(n_1\, \varphi_{1j}(t, \lambda) + \ldots)\,(n_1\varphi_{1j}(t + \tau, \lambda) + \ldots) &- \\ - n_1\, \varphi_{1j}(t, \lambda)\, \varphi_{1j}(t + \tau, \lambda) - \ldots]\} + \sum_k s_{ik}\, \varrho_{kj}(t)&\,, \\ \varrho_{ii}(0) = \varphi_{ii}(\tau, \lambda)\,, \quad \varrho_{ij}(0) = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j&\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Označme výraz ve svorce v (11) $z_{ij}(t)$ a utvořme matice

$$Z(t) = \|z_{ij}(t)\|\,, \quad R(t) = \|\varrho_{ij}(t)\|, \quad \tilde{\Phi}(t,\lambda) = \|\delta_{ij}\varphi_{ij}(t,\lambda)\|\,.$$

Potom platí

$$R(t) = \tilde{\Phi}(\tau, \lambda)\, N(t) + \int_0^t N(u)\, Z(t - u)\,\mathrm{d}u\,.$$

S použitím (9) vyplývá odtud, že je

$$\varrho_{ij}^{*}(t, \tau, \lambda)\, e^{-\gamma(2t+\tau)} = \sum_{k} \int_{0}^{\infty} e^{-2\gamma u} n_{ik}(u)\, du\, \zeta_{kjj}(\lambda, \lambda) + o(1)\,, \tag{12}$$

kde

$$\zeta_{ijk}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n_1, \ldots, n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r) \left[(n_1\, \xi_{1j}(\lambda_1) + \ldots)(n_1\, \xi_{1k}(\lambda_2) + \ldots) - \right.$$
$$\left. - n_1\, \xi_{1j}(\lambda_1)\, \xi_{1k}(\lambda_2) - \ldots \right].$$

Přitom zbytek v (12) je $o(1)$ pro $t \to \infty$ stejnoměrně v τ.

Celkem máme, že

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\tau>0} \boldsymbol{E}_i(W_j(t, \lambda)\, e^{-\gamma t} - W_j(t + \tau, \lambda)\, e^{-\gamma(t+\tau)})^2 =$$
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\tau>0} \left[\varrho_{ij}(t, 0, \lambda) - 2\varrho_{ij}(t, \tau, \lambda) + \varrho_{ij}(t + \tau, 0, \lambda) \right] = 0\,.$$

Existuje tedy veličina $\hat{W}_j(\lambda)$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}_i(W_j(t, \lambda)\, e^{-\gamma t} - \hat{W}_j(\lambda))^2 = 0\,.$$

5. Položme $\hat{W}_j(\lambda) = \pi_j\, \eta_j(\lambda)\, \overline{W}_j(\lambda)$. Dokážeme, že je

$$\boldsymbol{E}_i(\overline{W}_j(\lambda_1) - \overline{W}_k(\lambda_2))^2 = 0 \quad \text{pro} \quad \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, r\,. \tag{13}$$

Označíme $\psi_{ijk}(t, \lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{E}_i\, W_j(t, \lambda_1)\, W_k(t, \lambda_2)$.

Stejně jako v bodě 4 odvodí se rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi_{ijk}(t, \lambda_1, \lambda_2) = -(\lambda_1 + \lambda_2)\, \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, p_{ij}(t)\, \delta_{jk} +$$
$$+ \sum_{n_1, \ldots, n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r) \left[(n_1\, \varphi_{1j}(t, \lambda_1) + \ldots)(n_1\, \varphi_{1k}(t, \lambda_2) + \ldots) - \right.$$
$$\left. - n_1\, \varphi_{1j}(t, \lambda_1)\, \varphi_{1k}(t, \lambda_2) - \ldots \right] + \sum_{l} s_{il}\, \psi_{ljk}(t, \lambda_1, \lambda_2)\,,$$
$$\psi_{ijk}(0, \lambda_1, \lambda_2) = \delta_{ij} \delta_{jk}\,.$$

Z nich pak plyne vztah

$$\lim_{t\to\infty} \psi_{ijk}(t, \lambda_1, \lambda_2)\, e^{-2\gamma t} = \sum_{l} \int_{0}^{\infty} e^{-2\gamma u}\, n_{il}(u)\, du\, \zeta_{ljk}(\lambda_1, \lambda_2)\,.$$

Odtud

$$\boldsymbol{E}_i(\overline{W}_j(\lambda_1) - \overline{W}_k(\lambda_2))^2 = \sum_{l} \int_{0}^{\infty} e^{-2\gamma u}\, n_{il}(u)\, du \left[\zeta_{ljj}(\lambda_1, \lambda_1)\, (\pi_j\, \eta_j(\lambda_1))^{-2} - \right. \tag{14}$$
$$\left. - 2\zeta_{ljk}(\lambda_1, \lambda_2)\, (\pi_j\, \eta_j(\lambda_1))^{-1}\, (\pi_k\, \eta_k(\lambda_2))^{-1} + \zeta_{lkk}(\lambda_2, \lambda_2)\, (\pi_k\, \eta_k(\lambda_2))^{-2} \right].$$

Jelikož dle (10)

$$\zeta_{ijk}(\lambda_1, \lambda_2)\,(\pi_j\,\eta_j(\lambda_1))^{-1}\,(\pi_k\,\eta_k(\lambda_2))^{-1} =$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r)\,[(n_1 v_1 + \ldots + n_r v_r)^2 - n_1 v_1^2 - \ldots - n_r v_r^2]\,,$$

vyplývá (13) snadno z (14). Můžeme proto psáti $\overline{W}_j(\lambda) = \overline{W}$.

6. Dokážeme rovnost

$$\boldsymbol{P}_i(\overline{W} = 0) = \boldsymbol{P}_i(T < \infty)\,.$$

Označme

$$G_i(p, t) = \boldsymbol{E}_i e^{-pW(t)}\,, \quad h_i(s, t) = G_i(se^{-\gamma t}, t)\,, \quad \boldsymbol{P}_i(\overline{W} = 0) = \Pi_i\,,$$

a zaveďme vytvořující funkci intensit větvícího procesu v soustavě X

$$f_i(x_1, \ldots, x_r, t) = \sum_k q_{ik} x_k + \sum_{n_1,\ldots,n_r} \mu_i(n_1, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}\,.$$

Platí

$$\text{(15)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_i = \frac{\partial}{\partial t} G_i - s\gamma e^{-\gamma t} \frac{\partial}{\partial p} G_i =$$

$$= f_i(h_1, \ldots, h_s) + \gamma \boldsymbol{E}_i\, se^{-\gamma t}\, W(t) \exp\{-se^{-\gamma t}\, W(t)\}\,.$$

Zde jsme použili rovnice vzad pro vytvořující funkci větvícího procesu. Není obtížné nahlédnouti, že $\lim\limits_{s\to\infty} \lim\limits_{t\to\infty} h_i(s, t) = \Pi_i$ Stejný limitní přechod v rovnici (15) dává

$$\text{(16)} \qquad f_i(\Pi_1, \ldots, \Pi_r) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, r\,.$$

Zřejmě je (např. dle bodu 3) $\Pi_i \neq 1$. Jelikož vztahům (16) vyhovují také pravděpodobnosti vymření $\boldsymbol{P}_i(T < \infty)$ a jsou jimi jednoznačně určeny (viz [2]) dostáváme výsledek $\boldsymbol{P}_i(T < \infty) = \Pi_i$.

7. Dokončíme důkaz věty 1. Dle předpokladu potomstva různých částic se vyvíjejí nezávisle. Tvrzení, dokázaná v bodech 4–6 platí tedy pro libovolný počáteční stav částic v soustavě X.

Nechť pro zvolená ε a j vztah (5) není splněn. Existuje tedy posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to \infty$ a číslo $\delta > 0$ tak, že

$$\text{(17)} \qquad \boldsymbol{P}(\sup_x |R_j(t_n, x) - F_j(x)| > \varepsilon,\ T > t_n) > \delta\,.$$

Uvažujme posloupnost $W_j(t_n, \lambda)\, e^{-\gamma t_n}$, která dle bodů 4,5 konverguje k $\pi_j\, \eta_j(\lambda)\, \overline{W}$ podle kvadratického středu. Jelikož z posloupnosti náhodných veličin konvergentní podle kvadratického středu lze vybrati posloupnost konvergentní s pravděpodobností jedna, lze s použitím diagonálního principu dokázati existenci posloupnosti $\{t_k\}$, vybrané z $\{t_n\}$ takové, že

$$P(\lim_k W_j(t_k, \lambda)\, e^{-\gamma t_k} = \pi_j\, \eta_j(\lambda)\, \overline{W} \text{ pro všechna } \lambda \geqq 0 \text{ racionální}) = 1\,.$$

Odtud dle bodu 6

$$P\left(\lim_k \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}R_j(t_k, x) = \eta_j(\lambda)\,, \quad \text{pro} \quad \lambda \geqq 0,\ T = \infty\right) = P(T = \infty)\,.$$

Konvergence Laplace-Stieltjesových transformací má za následek stejnoměrnou konvergenci distribučních funkcí v případě, že limita je Laplace-Stieltjesovou transformací spojité distribuční funkce. Máme tedy

$$P(\lim_k \sup_x |R_j(t_k, x) - F_j(x)| = 0,\ T = \infty) = P(T = \infty)\,.$$

Odtud

$$\lim_k P(\sup_x |R_j(t_k, x) - F_j(x)| \leqq \varepsilon,\ T = \infty) = P(T = \infty)\,,$$

a dále

$$\lim_k P(\sup_x |R_j(t_k, x) - F_j(x)| > \varepsilon,\ T > t_k) \leqq$$
$$\leqq \lim_k P(T > t_k) - P(T = \infty) = 0\,.$$

To je spor s (17), tedy platí (5). Tím je důkaz věty 1 dokončen.

8. Následující věta se týká věkového rozložení částic ve skupině stavů. Budiž s celé číslo, $1 \leqq s \leqq r$.

$$R^s(t, x) = \left(\sum_{i=1}^s M_i(t, x)\right)\left(\sum_{i=1}^s W_i(t)\right)^{-1} \quad \text{pro} \quad \sum_{i=1}^s W_i(t) > 0$$

budiž věkové rozložení počtu částic ve stavech $\omega_1, \ldots, \omega_s$.

Věta 2. *Když X je regulární, potom pro každé $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{t \to \infty} P\left(\sup_x \left|R^s(t, x) - \left(\sum_{i=1}^s \pi_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^s \pi_i F_i(x)\right)\right| > \varepsilon,\ T > t\right) = 0\,.$$

K důkazu věty 2 je třeba pouze málo pozměniti úvahy v bodě 7.

Literatura

[1] *T. E. Harris:* The theory of branching processes. Berlin 1963.

[2] *Б. А. Севастьянов:* Теория ветвящихся случайных процессов. Успехи мат. наук *6* (1951), 47–99.

[3] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц. Москва 1954.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗРАСТА В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ МАРКОВА

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

Работа касается однородных ветвящихся процессов Маркова с r типами частиц $\omega_1, \ldots, \omega_r$, которые во время своего существования меняют принадлежность к типу по законам однородного процесса Маркова. Пусть $p_{ij}(t)$ — вероятность перехода за время t из типа ω_i в ω_j, $n_i(t)$ — математическое ожидание числа частиц типа ω_i во времени t. При условиях (2) и

$$n_i(t) \sim \text{konst}\, \pi_i e^{\gamma t}\,, \quad t \to \infty\,, \quad \pi_i > 0\,, \quad \gamma > 0\,,$$

доказывается сходимость по вероятности распределения возраста частиц типа ω_j к функции распределения

$$F_j(x) = 1 - e^{-\gamma x} \pi_j^{-1} \sum_{i=1}^{r} \pi_i\, p_{ij}(x)\,.$$

Zusammenfassung

DIE ALTERSSTRUKTUR DER MARKOVSCHEN VERZWEIGUNGSPROZESSE

PETR MANDL, Praha

Die Arbeit betrifft homogene Markovsche Verzweigungsprozesse mit r Typen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ von Individuen, welche während ihrer Lebenszeit die Zugehörigkeit zum Typus nach den Gesetzen eines homogenen Markovschen Prozesses ändern. Es sei $p_{ij}(t)$ die Wahrscheinlichkeit des Überganges in der Zeit t vom Typus ω_i nach ω_j, $n_i(t)$ der Erwartungswert der Anzahl zur Zeit t der Individuen vom Typus ω_i. Unter den Voraussetzungen (2) und

$$n_i(t) \sim \text{konst.}\, \pi_i e^{\gamma t} \quad \text{für} \quad t \to \infty,\ \pi_i > 0,\ \gamma > 0\,,$$

wird die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit der Altersverteilung der Individuen vom Typus ω_j zur Verteilungsfunktion

$$F_j(x) = 1 - e^{-\gamma x} \pi_j^{-1} \sum_{i=1}^{r} \pi_i\, p_{ij}(x)$$

bewiesen.