Časopis pro pěstování matematiky

Beloslav Riečan

O jednej miere Hausdorffovho typu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 361--365

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108757`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O JEDNEJ MIERE HAUSDORFFOVHO TYPU

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

(Došlo 14. srpna 1964)

V článku je zostrojený príklad množiny $S \subset E_2$, ktorej jednorozmerná Hausdorffova miera je menšia ako jej jednorozmerná miera definovaná pomocou obdiaľnikov. Tým je rozriešená úloha č. 4 z Čas. pro pěst. mat., *86* (1961).

1. Formulácia úlohy. Označme znakom E_k k-rozmerný euklídovský priestor, L_k k-rozmernú (vonkajšiu) Lebesgueovu mieru. Nech k, n sú prirodzené čísla, $k \leqq n$. Nech A je systém k-rozmerných nadrovín v E_n. Pre $E \subset E_n$ položme

$$d_k(E) = \sup_{F \in A} L_k(E \cap F) .$$

Nech B je systém všetkých gúľ, C systém všetkých kvádrov v E_n. Pre $E \subset E_n$, $r > 0$ položme ďalej

$$F_k(E, r) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d_1(E_i)^k , \quad G_k(E, r) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d_1(F_i)^k ,$$

$$H_k(E, r) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d_k(E_i) , \quad K_k(E, r) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d_k(F_i) ,$$

kde infimum počítame cez všetky postupnosti $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset E$, $E_i \in B$, $d_1(E_i) < r$, resp. všetky $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \supset E$, $F_i \in C$, $d_1(F_i) < r$. Napokon

$$F_k(E) = \lim_{r \to 0+} F_k(E, r) , \quad G_k(E) = \lim_{r \to 0+} G_k(E, r) ,$$

$$H_k(E) = \lim_{r \to 0+} H_k(E, r) , \quad K_k(E) = \lim_{r \to 0+} K_k(E, r) .$$

Treba rozhodnúť, či platí $F_k = G_k$ resp. $H_k = K_k$.

2. Riešenie. *Existuje množina* $S \subset E_2$ *tej vlastnosti, že* $F_1(S) = H_1(S) = 1$, $K_1(S) = G_1(S) = \sqrt{2}$.

3. Príklad.[1]) Najprv zavedieme jeden pomocný pojem. Nech A je systém uzavretých navzájom disjunktných kruhov v rovine, z ktorých každý má priemer d. Nech p je prirodzené číslo, $E \in A$. Znakom (p, E) označíme systém p uzavretých kruhov o priemere d/p umiestnených rovnomerne z vnútornej strany po obvode kruhu E. Ďalej položíme $(p, A) = \bigcup\{(p, E) : E \in A\}$.

Nech $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísiel, $p_1 \geqq 4$. Nech E je uzavretý kruh o priemere 1. Položme

$$A_1 = \{E\}\,, \quad A_{i+1} = (p_i, A_i) \quad (i = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$S_i = \bigcup A_i \quad (i = 1, 2, \ldots)\,, \quad S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i\,.$$

4. Dôkaz. Budeme písať $H_1(S, r) = H(S, r)$, $K_1(S, r) = K(S, r)$, $H_1(S) = H(S)$, $K_1(S) = K(S)$. Pre ľubovoľný otvorený obdiaľnik $E \subset E_2$ položíme

$$A_i(E) = \{F \in A_i : F \cap E \neq \emptyset\}\,.$$

Ďalej označíme znakom d_i priemer ľubovoľného kruhu zo systému A_i, teda $d_1 = 1$, $d_{i+1} = d_i/p_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Nech E je ľubovoľný otvorený obdiaľnik, $E \cap S \neq \emptyset$. Označme znakom $d(E)$ jeho priemer. Nech $i = i(E)$ je prirodzené číslo s touto vlastnosťou: E pretína iba jeden kruh zo systému A_i, ale aspon dva kruhy zo systému A_{i+1}. Nech $K > 0$ je ľubovoľné číslo. Z konštrukcie systémov A_n vyplýva existencia čísla $r_0 > 0$ tej vlastnosti, že pre všetky obdiaľniky E s priemerom menším ako r_0 je $i = i(E) > K$.

Dokážeme toto tvrdenie: k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $r_0 > 0$ také, že pre všetky obdiaľniky E s priemerom menším ako r_0 platí

$$d(E) \geqq (\sqrt{(2)} - \varepsilon) \sum\{d(F) : F \in A_{i+2}(E)\}\,. \tag{1}$$

Nech je teda E ľubovoľný obdiaľnik, $E \cap S \neq \emptyset$, h_1, h_2 dĺžky jeho strán, D ten kruh zo systému A_i pre ktorý je $D \cap E \neq \emptyset$. Môžu nastať dva prípady: alebo existuje priemer kruhu D taký, že E je časťou jednej z polorovín určených týmto priemerom, alebo taký priemer neexistuje.

I. Preberme prvý prípad. Nech E pretína r kruhov zo systému A_{i+1} $(r \geqq 2)$. Uvažujme dva krajné z týchto kruhov; nech M a N sú body, v ktorých sa tieto kruhy dotýkajú kružnice D. Nech k je dĺžka úsečky MN. Úsečke MN prislúcha stredový uhol $2\pi(r - 1)/p_{i+1}$. Preto platí

$$k = d_i \sin \frac{\pi(r - 1)}{p_{i+1}}\,. \tag{2}$$

Odtiaľ vyplýva

$$d(E) \geqq k - 2d_{i+1} \geqq d_{i+1}(2r - 4)\,. \tag{3}$$

---

[1]) Podobný príklad je za iným účelom zostrojený v práci [1], str. 459.

Pretože posledný výraz je pre $r \geqq 7$ väčší ako $\sqrt{(2)}\, r\, d_{i+1}$, platí nerovnosť

$$(4) \qquad d(E) \geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum\{d(F) : F \in A_{i+1}(E)\},$$

teda tým skôr (1).

Ak je $3 \leqq r < 7$, môžeme pre E s dostatočne malým priemerom zlepšiť odhad (3):

$$(5) \qquad d(E) \geqq k - 2\left(\frac{d_{i+1}}{2} + \frac{d_{i+1}}{2} \sin \frac{\pi(r-1)}{p_{i+1}}\right) \geqq$$

$$\geqq d_i \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{\pi(r-1)}{p_{i+1}} - d_{i+1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon]\, r d_{i+1},$$

odkiaľ vyplýva (4). Zostáva nám teda preskúmať prípad $r = 2$. Z nerovností (5) dostávame $d(E) > \frac{3}{2}[\sqrt{(2)} - \varepsilon]\, d_{i+1}$ teda nerovnosť (1) platí, ak $\sum\{d(F) : F \in A_{i+2}(E)\} \leqq \frac{3}{2} d_{i+1}$. V opačnom prípade je $d(E) \geqq k$, odkiaľ vyplýva pri použití podobného postupu ako v (5) nerovnosť (1).

II. Ak je jedno z čísiel h_1, h_2 menšie, alebo rovné číslu $d_i/2$, dokáže sa (1) podobne, ako v I. Predpokladajme, že obe čísla h_1, h_2 sú väčšie ako $d_i/2$. Priemerom rovnobežným so stranou h_1 rozdeľme E na obdiaľniky E_1, E_2, priemerom rovnobežným so stranou h_2 rozdeľme E na obdiaľniky F_1, F_2. Položme

$$\begin{aligned} p_j &= \operatorname{card} A_{i+1}(E_j) \quad (j = 1, 2), & q_j &= \operatorname{card} A_{i+1}(F_j) \quad (j = 1, 2), \\ p &= \max(p_1, p_2), & q &= \max(q_1, q_2). \end{aligned}$$

Ak položíme, ako predtým $r = \operatorname{card} A_{i+1}(E)$, potom je zrejmé, že platí

$$(6) \qquad 2p \geqq r, \quad 2q \geqq r.$$

Teraz dokážeme, že pre E s priemerom menším, ako nejaké vhodné volené číslo r_0 je

$$(7) \qquad h_1 \geqq (2 - \varepsilon)\, p d_{i+1}, \quad h_2 \geqq (2 - \varepsilon)\, q d_{i+1}.$$

Nech α je uhol úsečky MN so stranou h_1. Potom

$$h_1 \geqq (k - 2d_{i+1}) \cos \alpha \geqq \left(d_i \sin \frac{\pi(p-1)}{p_{i+1}} - 2d_{i+1}\right) \sin \frac{\pi(p-1)}{p_{i+1}} \geqq$$

$$\geqq d_i \sin^2 \frac{\pi(p-1)}{p_{i+1}} - 2d_{i+1} \geqq d_i \frac{2}{\pi} \frac{\pi(p-1)}{p_{i+1}} - 2d_{i+1} \geqq (2 - \varepsilon)\, p d_{i+1}.$$

Podobne sa dokáže druhý vzorec v (7).

Z Pythagorovej vety, zo (6) a (7) vyplýva

$$d(E)^2 = h_1^2 + h_2^2 \geqq (2 - \varepsilon)^2\, d_{i+1}^2 \frac{r^2}{2},$$

teda

$$d(E) \geqq \left(\sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) rd_{i+1} > [\sqrt{(2)} - \varepsilon]\, rd_{i+1}\,,$$

odkiaľ vyplýva (4).

Nech $r_0 > 0$ je číslo spĺňajúce podmienku (1) a $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ postupnosť otvorených obdiaľnikov s priemerom menším ako $r(r < r_0)$ pokrývajúca S. Pretože S je kompaktná, existuje číslo n tak, že $S \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i$. K ľubovoľnej množine E_i určme číslo k_i tak, aby sa E_i pretínala práve s jednou množinou zo systému A_{k_i}, ale aspoň s dvoma množinami zo systému A_{k_i+1}. Položme $k = \max\{k_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Podľa (1) je

$$d(E_i) \geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum\{d(F) : F \in A_{k_i+2}(E_i)\} \geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum\{d(F) : F \in A_{k+2}(E_i)\}\,.$$

Platí teda nerovnosť

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d(E_i) &\geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum_{i=1}^{n} \sum\{d(F) : F \in A_{k+2}(E_i)\} \geqq \\ &\geqq [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum\{d(F) : F \in A_{k+2}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)\} = \\ &= [\sqrt{(2)} - \varepsilon] \sum\{d(F) : F \in A_{k+2}\} = \sqrt{2} - \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Podľa definície $K(S) \geqq K(S, r) \geqq \sqrt{(2 - \varepsilon)}$, teda $K(S) \geqq \sqrt{2}$. Dôkaz opačnej nerovnosti je zrejmý.

Ľahko sa dokáže nerovnosť $H(S) \leqq 1$. Aby sme dokázali opačnú nerovnosť predpokladajme, že $r > 0$, $\varepsilon > 0$ sú ľubovoľné čísla. Podľa definície existujú kruhy $\{E_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ také, že $S \subset \bigcup E_i$, $d(E_i) < r$ a $H(S) + \varepsilon \geqq H(S, r) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)$. Ku každému kruhu E_i zostrojíme štvorec F_i tak, aby $E_i \subset F_i$ a $d(F_i) = \sqrt{(2)}\, d(E_i)$. Podľa predošlého platí

$$\sqrt{(2)}\, H(S) + \sqrt{(2)}\, \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} d(F_i) \geqq K(S, r\sqrt{2})\,,$$

teda $\sqrt{(2)}\, H(S) \geqq K(S)$. Vzhľadom k tomu, že $K(S) = \sqrt{2}$, je $H(S) \geqq 1$, čím je dôkaz ukončený.

Literatúra

[1] *A. S. Besicovitch:* On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, Math. Ann. *98* (1928), 422—464.

Резюме

ОБ ОДНОЙ МЕРЕ ТИПА ХАУСДОРФА

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (Beloslav Riečan), Братислава

Пусть A – класс всех прямоугольников на плоскости. Для любого множества E и любого числа $r > 0$ положим

$$K(E, r) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset E,\ E_i \in A,\ \operatorname{diam}(E_i) < r\},\ K(E) = \lim_{r \to 0+} K(E, r).$$

Пусть $H(E)$ – линейная мера Хаусдорфа. В статье построено множество S, для которого $K(S) = \sqrt{2}$, $H(S) = 1$.

Summary

ON A MEASURE OF THE HAUSDORFF TYPE

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

Let A be the family of all rectangles in the plane. For any number $r > 0$ and any set E put

$$K(E, r) = \text{g.l.b.}\ \{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset E,\ E_i \in A, \operatorname{diam}(E_i) < r\},\ K(E) = \lim_{r \to 0+} K(E, r).$$

Let $H(E)$ be the linear Hausdorff measure in the plane. In this article the set S is constructed for which $K(S) = \sqrt{2}$, $H(S) = 1$.