Úvod do theorie křivek třetího stupně na základě funkcí elliptických.*)

Sepsal **Karel Bobek.**

Mnohé vlastnosti křivek algebraických lze teprve pomocí integrálů Abelových přirozeně vyvoditi; jich nejjednodušší případ, vyjmeme-li logarithmus, jest integrál elliptický. Obecná theorie tu ukazuje, že podstatné vlastnosti algebraické čáry $f(x, y) = 0$ nezávisí tak na stupni jejím n jako na počtu jistých integrálů racionálných funkcí odvozených z funkce y. Má-li křivka d bodů dvojnásobných, r bodů návratu, pak jest počet oněch integrálů

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r.$$

Číslo to nazváno rodem (Geschlecht, genre) křivky; při křivce 3. stupně bez bodu dvojnásobného neb návratu rovná se 1. Jediný zmíněný integrál, který se tu vyskytuje, lze, jak poznáme, uvésti do tvaru $u = \int \frac{dx}{y}$; veličiny x a y lze dále vyjádřiti co jednoznačné funkce hodnoty u, o nichž poznáme, že jsou dvojperiodické.

Nemoha se odvolati v literatuře české k theorii elliptických funkcí vyvinuté směrem dalším úvahám přispůsobeným, dovolím si předeslati dle přednášek *Weierstrassových* hlavní věty, jichž upotřebeno; podám tedy v první části základy theorie elliptických funkcí.

I.

1. Nechť značí s a t souřadnice pravoúhlé bodu 2ω; položme $2\omega = s + it$, kdež $i = \sqrt{-1}$, a znázorňujme komplexní veličinu $2\omega = s + it = re^{i\varphi}$ bodem 2ω, tak že bod 2ω stanoví

*) Srovnej: *Clebsch*, Ueber einen Satz von *Steiner* und einige Puncte der Theorie der Curven dritter Ordnung, Crelle 63, kde poprvé užito funkcí elliptických v theorii čar třetího stupně.

zároveň délku $\overline{o2\omega}$ co do směru i polohy. Pomocí dvou komplexních veličin 2ω a $2\omega'$ tak volených, že podíl $\frac{\omega}{\omega'}$ není reálný, t. j. tak volených, že přímka $\overline{2\omega\, 2\omega'}$ neprobíhá bodem o, lze utvořiti nesmírné množství bodů v rovině, jež totiž znázorňují hodnoty $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, v nichž μ a μ' značí čísla celistvá mezi $-\infty$ a $+\infty$. Tyto body jsou vrcholy rovnoběžníků pomocí tratí $\overline{02\omega}$ a $\overline{02\omega'}$ utvořených. Nabývají-li μ a μ' mezi $-\infty$ a $+\infty$ všech celistvých hodnot, tu pokrývají ony rovnoběžníky celou rovinu jako síť.

Funkce $1 - \frac{u}{2\mu\omega + 2\mu'\omega'}$ mizí v bodě $u = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ a jest v celé rovině jednoznačnou. Součin

$$u\, \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right)^{*)}, \qquad w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

v němž značí Π' součin všech faktorů vycházejících při

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega',$$

když μ a μ' proběhnou všecka celistvá čísla mezi $-\infty$ a $+\infty$ neodvisle od sebe, vyjímajíce však kombinaci $\mu = 0$, $\mu' = 0$, jest tedy veličinou, která pro každé $u = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ a pro $u = 0$ zmizí, t. j. jest nullou ve všech nahoře sestrojených bodech (vrcholech). Tento součin není však absolutně konvergentní t. j. on nesbíhá při libovolném seřadění faktorů, a proto tvoří *Weierstrass* součin nový, přidávaje ku každému členu faktor exponenciálný $e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}$; pak lze dokázati, že v rovnici

$$\sigma u = u\, \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} \tag{1}$$

pravá strana konverguje neodvisle od pořádku faktorů a že tedy repraesentuje funkci, již σu značíme. Funkce σu vymizí (je nullou) při $u = 0$ a při $u = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, t. j. ve vrcholech rovnoběžníků sestrojených pomocí délek 2ω a $2\omega'$.

---

*) Akcent při znamení součinu Π má naznačovati, že nutno při tvoření součinu jistou kombinaci čísel μ a μ' vyjmouti; zde kombinaci $\mu = 0$, $\mu' = 0$.

Především uvažme, že σu není nekonečná při žádném konečném u, a že obecně je funkcí komplexní, neboť 2ω a $2\omega'$ jsou takovými. Je-li zvláště pak — a právě tím případem se budeme zanášeti — ω reálným a ω' ryze imaginárnou hodnotou, totiž $\omega' = i\bar{\omega}$, kdež $\bar{\omega}$ značí reálné číslo, pak je funkce σu při reálných hodnotách u též reálnou. Neboť k hodnotě

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\bar{\omega}i$$

možno z faktorů vždy vyhledati sdruženou hodnotu

$$\bar{w} = 2\mu\omega - 2\mu'\bar{\omega}i;$$

tu ale je součin dvou faktorů

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} . \left(1 - \frac{u}{\bar{w}}\right) e^{\frac{u}{\bar{w}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\bar{w}}\right)^2}$$

reálným a tvaru $p^2 + q^2$.

Funkce σu je lichá, t. j.

$$\sigma(-u) = -\sigma(u); \tag{2}$$

neboť z rovnice (1) vychází

$$\sigma(-u) = -u \Pi' \left(1 - \frac{u}{-w}\right) e^{\frac{u}{-w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{-w}\right)^2},$$

a jelikož v hodnotách

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$
$$-w = -2\mu\omega - 2\mu'\omega',$$

μ a μ' probíhají všecka celistvá čísla mezi $-\infty$ a $+\infty$, probíhají je taktéž $-\mu$ a $-\mu'$ a tedy

$$\sigma(-u) = -u \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} = -\sigma(u).$$

Pomocí funkce σu utvoříme nyní snadno funkce o dvou periodách. Logarithmickým derivováním rovnice (1) obdržíme

$$\frac{d \log \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \Sigma' \left[\left(\frac{1}{u - w}\right) + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right],$$

a dalším derivováním

$$-\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\frac{1}{u^2} - \Sigma' \left[\left(\frac{1}{u - w}\right)^2 - \frac{1}{w^2}\right].$$

Položme nyní *)

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}, \tag{3}$$

*) $\wp$ čteme *pe*.

t. j.

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\left(\frac{1}{u-w}\right)^2 - \frac{1}{w^2}\right].$$

Řada na pravé straně konverguje, nechť se seřadí členy její jakkoli, a tedy

$$(4) \qquad \wp u = \sum_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{u-w}\right)^2 - \Sigma' \frac{1}{w^2},$$

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega',$$

$$\mu\mu' \ldots -\infty \ldots +\infty;$$

zde v prvním součtu se kombinace $\mu = 0$, $\mu' = 0$ připouští. Touto rovnicí jest funkce $\wp u$ definována a zároveň vyznačena její dvojitá periodičnost. Vychází totiž

$$\wp(u + 2\omega) = \sum_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{u - 2(\mu - 1)\omega - 2\mu'\omega'}\right)^2 + \sum_{\mu\mu'}' \frac{1}{w^2} = \wp u,$$

$$\wp(u + 2\omega') = \sum_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{u - 2\mu\omega - 2(\mu' - 1)\omega'}\right)^2 + \sum_{\mu\mu'}' \frac{1}{w^2} = \wp u,$$

neboť $\mu - 1$ a $\mu' - 1$ probíhají zároveň s μ a μ' všecka čísla mezi $-\infty$ a $+\infty$. Obecně pak

$$(5) \qquad \wp(u + 2\alpha\omega + 2\alpha'\omega') = \wp u,$$

jsou-li α, α' libovolná celistvá čísla.

Zároveň nalezneme, že je funkce $\wp u$ sudou, t. j. že

$$(6) \qquad \wp(-u) = \wp u,$$

neboť pravá strana rovnice (4) obsahuje jen veličinu u^2 a její mocniny. Z toho ale vychází, že je funkce $\wp u$ pro reálné hodnoty u reálnou a kladnou, jsou-li periody tvaru 2ω, $2\bar{\omega}i$, kdež ω a $\bar{\omega}$ pokládáme za reálné. V tomto případu je ale též $\wp(vi)$ reálné, je-li v reálné, poněvadž $(vi)^2 = -v^2$; položme

$$(7) \qquad \wp(vi) = \bar{\wp} v.$$

Pomocí souvislostí funkcí $\wp u$ a σu vyjádřené rovnicí (3) lze ustanoviti $\sigma(u + 2\omega)$ a $\sigma(u + 2\omega')$ pomocí σu. Vzhledem k rovnici (5) máme

$$\frac{d^2 \log \sigma(u + 2\omega)}{du^2} = \frac{d^2 \log \sigma}{du^2}$$

a tedy jednou integrací

$$\frac{\sigma'(u + 2\omega)}{\sigma(u + 2\omega)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta,$$

značíce η integrační stálou. Abychom ji vyjádřili pomocí σu, položme $u = -\omega$ a uvažme, že σu je funkcí lichou, tedy $\sigma' u$ sudou, pročež

$$\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} = -\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} + 2\eta$$

t. j.

$$\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}.$$

Integrujeme-li hoření rovnici ještě jednou, obdržíme

$$\log \sigma(u + 2\omega) = \log \sigma u + 2\eta u + \log C$$

$$\sigma(u + 2\omega) = C\sigma u\, e^{2\eta u}.$$

K vůli stanovení integrační stálé, položme $u = -\omega$, pak

$$\sigma\omega = -C\sigma\omega\, e^{-2\eta\omega},$$

$$C = -e^{2\eta\omega}.$$

Tím jsme nabyli rovnice, pro následující theorii důležité

(8) $$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u.$$

Podobně nalezneme, že

(8′) $$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$

kdež

(9) $$\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}, \quad \eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega'}.$$

Zaměníme-li v první rovnici (8) u za $u + 2\omega'$ a položíme-li v pravo za $\sigma(u + 2\omega')$ hodnotu z druhé vycházející, obdržíme

$$\sigma(u + 2\omega + 2\omega') = e^{2\eta(u+\omega+2\omega')+2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$

obdobně vychází z druhé rovnice (8′)

$$\sigma(u + 2\omega' + 2\omega) = e^{2\eta'(u+\omega'+2\omega)+2\eta(u+\omega)}\sigma u.$$

Musí tedy

$$2k\pi i = 2\eta(u + \omega + 2\omega') + 2\eta'(u + \omega') - [2\eta'(u + \omega' + 2\omega) + 2\eta(u + \omega)],$$

t. j.

$$k\frac{\pi i}{2} = \eta\omega' - \eta'\omega.$$

Z řady pro $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ lze, položíme-li $u = \omega$, vyvoditi, že $k = \pm 1$ a tedy

(10) $$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi i}{2}.$$

2. Vlastnosti funkce σu vyjádřené rovnicemi (8) poskytují nám ihned funkce o dvou periodách. Položme

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_m)}.$$

Je patrno, že funkce $\mathrm{F}(u)$ vymizí při $u = a_1$, $u = a_2$, .. $u = a_n$ a s. tak, jako $(u-a)$ při $u = a$. Pravíme totiž, že je funkce $\mathrm{F}(u)$ při $u = a$ jednoduchou nullou, mizí-li tu jako $u - a$, různíce toho mizení ode tvaru $(u-a)^\lambda$, kteréž zoveme λ-násobnou nullou. Obdobně nazýváme $u = b$ μ-násobným nekonečnem funkce $\mathrm{F}(u)$, je-li tato při $u = b$ nekonečnou jako $\frac{1}{(u-b)^\mu}$. Nově právě utvořená funkce má tedy naskrz jen jednoduché nully a jednoduchá nekonečna v bodech a_1, a_2 .. a_n resp. b_1, b_2 .. b_m.

Arci jsou zároveň nullami body $a_i + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ a nekonečny body $b_h + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, poněvadž i v těchto bodech jedna z funkcí $\sigma(u-a_i)$ neb $\sigma(u-b_h)$ jednoduše zmizí.

Má-li $\mathrm{F}(u)$ míti periodu 2ω, tedy

$$\mathrm{F}(u+2\omega) = \mathrm{F}(u),$$

obdržíme především

$$\mathrm{F}(u+2\omega) =$$

$$\frac{(-1)^n\,\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)\,e^{2\eta\sum\limits_1^n{}_i(u-a_i+\omega)}}{(-1)^m\,\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_m)\,e^{2\eta\sum\limits_1^m{}_h(u-b_h+\omega)}}$$

a tedy tu nutno, aby

$$(-1)^{n-m} = 1\,;\quad 2\eta\,[\sum_1^n{}_i(u-a_i+\omega) - \sum_1^m{}_h(u-b_h+\omega)] = 2k\pi i$$

aneb

$$\eta\,[\sum_1^m{}_h b_h - \sum_1^n{}_i a_i] + \eta\,(n-m)(u+\omega) = k\pi i.$$

Tomu však při libovolné hodnotě u nelze jinak vyhověti, než že $n = m$, pak $(-1)^0 = 1$ a dále musí

$$\eta \sum_1^n{}_i(a_i - b_i) = -k\pi i,$$

kde k značí nějaké číslo celistvé.

Má-li býti $2\omega'$ též periodou funkce $\mathrm{F}(u)$, obdržíme obdobně podmínku

$$\eta' \sum_1^n{}_i(a_i - b_i) = -k'\pi i.$$

Násobíme-li první hodnotu ω' a druhou ω a odečteme-li pak, obdržíme vzhledem k rovnici (10)

$$\sum_1^n{}_i (a_i - b_i) = 2k\omega' - 2k'\omega,$$

rovná se tedy nějaké periodě, kterou třeba $2\bar{\omega}$ poznamenati můžeme. Místo

$$\sum_1^n{}_i (a_i - b_i) = 2\bar{\omega}$$

píšeme ale přehlednějším spůsobem

$$\sum_1^n{}_i (a_i - b_i) \equiv 0 \ (\text{mod } 2\omega\ 2\omega'),$$

kde $\equiv 0$ značí, že se levá strana rovná součtu celistvých násobků veličin 2ω a $2\omega'$.

Shrneme-li dosavadní výsledky, nalezáme, že máme ve funkci

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{F}(u) = \frac{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2) \ldots \sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1)\,\sigma(u - b_2) \ldots \sigma(u - b_n)}$$

při podmínce

$$\text{(11')} \qquad \sum_1^n{}_i a_i - \sum_1^n{}_i b_i \equiv 0 \ (\text{mod. } 2\omega\ 2\omega')$$

dvouperiodickou funkci, která v bodech $a_i + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ *mizí jednoduše jako* $(u - a_i)$ *a v bodech* $b_i + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ *má jednoduchá nekonečna jako* $\frac{1}{u - b_i}$.

Snadno lze vyšetřiti, co nastane, splyne-li několik bodů a neb b. Splyne-li na př. v bodu a_1 λ bodu a, máme v čítateli činitele $[\sigma(u - a_1)]^\lambda$ a funkce $\mathrm{F}(u)$ je při $u = a$, λ-násobně nullou. Obdobně jest b_1 μ-násobným nekonečnem, vyskytne-li se ve jmenovateli činitel $[\sigma(u - b_1)]^\mu$. Pak nutno při počítání faktorů ve jmenovateli a v čítateli počítat faktor $\sigma(u - a_i)$ λ-kráte a faktor $\sigma(u - b_1)$ μ-kráte, a i v podmínce

$$\sum_1^n{}_i a_i - \sum_1^n{}_i b_i \equiv 0 \ (\text{mod } 2\omega\ 2\omega')$$

nutno klásti a_1 λ-kráte a b_1 μ-kráte. Tedy na př. funkce

$$\text{(12)} \qquad f(u) = \frac{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2) \ldots \sigma(u - a_n)}{\sigma^n u}$$

s podmínkou

$$\sum_1^n{}_i a_i \equiv 0 \ (\text{mod } 2\omega\ 2\omega')$$

je dvouperiodická; v $u = 0$ má n-násobné nekonečno a v bodech $u = a_1$, $u = a_2$, ... $u = a_n$ jednoduché nully.

Veličiny $a_1, .. a_n$, $b_1, .. b_n$ můžeme předpokládati v rovnoběžníku period 2ω, $2\omega'$, poněvadž se funkce $\mathrm{F}(u)$ nemění, zmenšíme-li argumenty $a_1, \ldots a_n$, $b_1, \ldots b_n$ o násobky veličin 2ω, $2\omega'$. Z toho patrno, *že dvouperiodická ta funkce v rovnoběžníku period právě tolikrát zmizí, kolikráte je nekonečnou.* Arci se počítá, že v λ-násobné nulle vymizí funkce λ-kráte. *Dvouperiodická funkce, která v rovnoběžníku period není nikde nullou a nikde nekonečnou, je nutně stálou veličinou*, jelikož pak ve všech rovnoběžnících t. j. v celé rovině není ani nullou ani nekonečnou.

Z této věty plyne, že jest dvouperiodická funkce $F(u)$, která mizí v bodech $a_1 \ldots a_n$ a jest nekonečnou v bodech $b_1 \ldots b_n$, až na stálý faktor určena, dány-li tyto body. K vůli jednoduchosti supponujme, že jsou všecky dané nully a nekonečna jednoduchá a položeny v jednom rovnoběžníku period; sestrojme pomocí jich funkci $\mathrm{F}_1(u)$ dle formule (11), i musí pak podíl $\frac{\mathrm{F}(u)}{\mathrm{F}_1(u)}$ býti veličinou stálou, jelikož jest funkcí dvouperiodickou, která v rovnoběžníku period se nestává ani nekonečně velkou ani nullou. Musí tedy také body $a_1 .. a_n$, $b_1 .. b_n$ podmínce (11′) vyhověti, i nahlížíme, že nelze zvoliti libovolně všechny body $a_1 .. a_n$, $b_1 .. b_n$, v nichž funkce dvouperiodická mizí a je nekonečna, nýbrž jeden z nich jest ostatními stanoven.

3. Poněvadž se nám funkce $\wp u$ co dvouperiodická objevila, zkusme tuto funkci vytvořiti pomocí σu. — Především nalézáme z rovnice (3), že je funkce $\wp u$ při $u = 0$ dvojnásob nekonečnou. Značí-li v veličinu stálou, rovná se funkce $\wp u - \wp v$ nulle při $u = +v$, $u = -v$. Položivše $a_1 = +v$, $a_2 = -v$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, máme tedy

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2,$$

jak dle obecné věty býti musí.

Funkce

$$\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u},$$

má tedy tytéž nully a tatáž nekonečna, pročež

$$\wp u - \wp v = C\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u}.$$

Vyvineme-li pravou stranu této rovnice dle rozšířené věty Taylorovy, nalezneme za koefficient členu $\frac{1}{u^2}$ hodnotu $-C\sigma^2 v$, z rovnice (3) ale plyne, že tento koefficient $=1$, tedy že

$$C = -\frac{1}{\sigma^2 v},$$

čímž

$$(13)\qquad \wp u - \wp v = \frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

Položíme-li

$$(14)\qquad \wp\omega = e_1,\quad \wp(\omega+\omega') = e_2,\quad \wp\omega' = e_3,$$

obdržíme zvláště

$$\wp u - e_1 = \frac{\sigma(\omega-u)\,\sigma(\omega+u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega},$$

$$(15)\qquad \wp u - e_2 = \frac{\sigma(\omega+\omega'-u)\,\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(\omega+\omega')},$$

$$\wp u - e_3 = \frac{\sigma(\omega'-u)\,\sigma(\omega'+u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega'}.$$

Jako $\wp u$ je i $\frac{d\wp u}{du} = \wp' u$ funkce dvouperiodická a sice lichá, poněvadž z

$$\wp(-u) = \wp(u),$$

plyne

$$-\wp'(-u) = \wp'(u).$$

Totéž vychází z rovnice (3), z níž derivováním obdržíme

$$(16)\qquad \wp' u = -\frac{2}{u^3} - 2\,\Sigma'\frac{1}{(u-w)^3}.$$

Nalézáme, že je $\wp' u$ při $u=0$ trojnásob nekonečné a že hodnoty $\wp'\omega$, $\wp'(\omega+\omega')$, $\wp'\omega'$ jsou konečny. Poněvadž

$$\wp(u'+2\omega) = \wp u',$$

obdržíme při $u' = u - \omega$

$$\wp(u+\omega) = \wp(u-\omega) = \wp(\omega-u),$$

a derivujíce

$$\wp'(u+\omega) = -\wp'(\omega-u);$$

pro $u=0$:

$$\wp'\omega = -\wp'\omega$$

t. j.

$$\wp'\omega = 0.$$

Podobně plyne, že

$$\wp'(\omega + \omega') = 0, \qquad (17)$$
$$\wp'\omega' = 0.$$

Tyto tři hodnoty ω, $\omega + \omega'$, ω' repraesentující jednoduché nully funkce $\wp' u$ vyplňují rovnici

$$\omega + (\omega + \omega') + \omega' = 2\omega + 2\omega' \equiv 0 \pmod{2\omega\ 2\omega'},$$

t. j. hoví skutečně podmínce, která se ukládá nullám dvouperiodické funkce, jež je pro $u = 0$ trojnásobně nekonečnou, jak arci musí býti.

Z dřívější obecné věty máme nyní

$$\wp' u = C\,\frac{\sigma(\omega + \omega' - u)\,\sigma(\omega - u)\,\sigma(\omega' - u)}{\sigma^3 u}.$$

Vyvineme-li pravou stranu v řadu, objeví se člen

$$\frac{1}{u^3}\,.\,C\sigma(\omega + \omega')\,\sigma\omega\,\sigma\omega';$$

z rovnice (16) však patrno, že součinitel členu $\frac{1}{u^3}$ jest -2, pročež

$$C = -\frac{2}{\sigma(\omega + \omega')\,\sigma\omega\,\sigma\omega'},$$

a tedy

$$(18)\quad \wp' u = -2\,\frac{\sigma(\omega + \omega' - u)\,\sigma(\omega - u)\,\sigma(\omega' - u)}{\sigma^3 u\,\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega + \omega')}.$$

Změníme-li u na $-u$, máme

$$\wp' u = -2\,\frac{\sigma(\omega + \omega' + u)\,\sigma(\omega + u)\,\sigma\,\omega' + u)}{\sigma^3 u\,\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega + \omega')}.$$

Násobivše obě rovnice, obdržíme

$$(\wp' u)^2 = 4\,\frac{\sigma(\omega - u)\,\sigma(\omega + u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega}\,.\,\frac{\sigma(\omega + \omega' - u)\,\sigma(\omega + \omega' + u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(\omega + \omega')}\,.\,\frac{\sigma(\omega' - u)\,\sigma(\omega' + u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega'},$$

t. j. vůči rovnicím (15)

$$(19)\qquad (\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3).$$

Tím je $(\wp' u)^2$ vyjádřeno racionálně pomocí $\wp u$ a sice položíme-li

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_1\wp^2 u - g_2\wp u - g_3,$$

jsou e_1, e_2, e_3 kořeny rovnice

$$4z^3 - g_1 z^2 - g_2 z - g_3 = 0.$$

Lze však dokázati, že $g_1 = 0$ t. j. $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Položíme-li totiž

$$\wp u = u^{-2} + 3c_2 u^2 + 5c_4 u^4 + \ldots; \quad c_2 = \Sigma' \frac{1}{w^4}, \quad c_4 = \Sigma' \frac{1}{w^6},$$

máme

$$\wp' u = -2u^{-3} + 6c_2 u + 20 c_4 u^3 + \ldots,$$

$$(\wp' u)^2 = 4u^{-6} - 24 c_2 u^{-2} - 80 c_4 + \ldots \text{ kladné mocniny},$$

$$(\wp u)^3 = u^{-6} + 9c_2 u^{-2} + 15 c_4 + \ldots \quad " \quad "$$

$$(\wp u)^2 = u^{-4} + 6c_2 + \ldots \quad " \quad "$$

a tedy vloživše do rovnice poslední pro $(\wp' u)^2$ tyto řady

$$4u^{-6} - 24c_2 u^{-2} - 80 c_4 + \ldots = 4u^{-6} - g_1 u^{-4} + (36 c_2 - g_2) u^{-2} + (60 c_4 - 6 g_1 c_2 - g_3) + \ldots,$$

z čehož jde

$$g_1 = 0; \quad -24 c_2 = 36 c_2 - g_2; \quad -80 c_4 = 60 c_4 - 6 g_1 c_2 - g_3,$$

aneb

$$g_2 = 60 \Sigma' \frac{1}{w^4},$$

$$g_3 = 140 \Sigma' \frac{1}{w^6}.$$

Můžeme tedy položiti

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$$
$$= 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \quad (20)$$

a pak

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Pomocí těchto rovnic vyjádříme argument u funkcí $\wp u$ čili z. Jelikož je derivace $\wp' u$ při reálných kladných hodnotách u dle rovnice (16) zápornou, položíme

$$\wp u = z, \quad \wp' u = \frac{dz}{du} = -\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3},$$

$$du = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

a poněvadž při $u = 0$ jest $z = \infty$, máme

(21) $$u = -\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$
$$= -\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}.$$

Tento integrál je komplexní, jsou-li g_2 neb g_3 takové, aneb je-li jen z komplexní; an nezávisí po jistou míru na cestě, na níž se od $z = \infty$ do bodu z integruje. Není účelem této práce, abychom pojednávali o integrálech vzatých v mezích imaginárných; to patří do theorie funkcí komplexních. *) Jen tolik podotkneme, že integrujíce podél reálné osy z ∞ do z integrál je potud reálný, pokud je odmocnina $\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$ reálnou.

Předpokládáme, že g_2 a g_3 jsou reálné hodnoty, pak je nutně jeden kořen rovnice

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

reálný; budiž to e_1. Jsou-li i ostatní dva reálné, předpokládejme $e_1 > e_2 > e_3$. Jsou-li ale e_2 a e_3 imaginárné, pak jsou sdruženy $e_2 = \alpha + i\beta$, $e_3 = \alpha - i\beta$.

a) $e_1 > e_2 > e_3$ jsou reálné; pak jest integrál na cestě od $-\infty \ldots e_1$ reálný a jelikož pro $\wp u = e_1$ máme $u = \omega$, vychází polovice periody

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

co hodnota reálná.

Při $u = \omega + \omega'$ jest $\wp u = e_2$ a jelikož $\wp'\omega = 0$, mění $\wp' u$ znamení, jakmile překročíme bod $u = \omega$, pročež

$$\omega + \omega' = -\int_{\infty}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} + \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

$$= \omega + \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

aneb

$$\omega' = -i \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{2\sqrt{(e_1 - z)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Poněvadž z se tu mění od e_1 do e_2, jest $(e_1 - z)$ veličinou kladnou, jakož $(z - e_2)$ a $(z - e_3)$, radikal tedy reálný a ω' ryze imaginárné.

*) V. *H. Durège,* Einleitung in die Theorie der Functionen einer complexen Variabelen.

b) Je-li jen kořen e_1 reálný, pak

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

je reálná hodnota, poněvadž je odmocnina na reálné ose od $+\infty$ do e_1 reálnou. ω' je tu ale komplexní a dá se — což blíže odůvodňovati nechceme — uvésti do tvaru $\omega + \omega'$, kdež ω' je ryze imaginárné.

4. Jako z funkce σu můžeme i pomocí funkcí $\wp u$ a $\wp' u$ snadno sestrojiti dvouperiodické funkce. Má tu platnost velmi důležitá věta:

Každá dvouperiodická funkce $\varphi(u)$ skládá se racionálně z funkcí $\wp u$ a $\wp' u$.

Je-li předně $f_1(u)$ dvouperiodická sudá funkce o periodách 2ω, $2\omega'$, která mizí v bodech $a_1, a_2, \ldots a_n$ a tudíž také v bodech $-a_1, -a_2, \ldots -a_n$, a která je nekonečnou v bodech $\pm b_1, \pm b_2, \ldots \pm b_n$, při čemž arci vždy $\Sigma a_i - \Sigma b_i = 0$, pokládajíce k vůli jednoduchosti nully a nekonečna za jednoduchá, tu platí

$$f_1(u) = C \frac{(\wp u - \wp a_1)(\wp u - \wp a_2) \ldots (\wp u - \wp a_n)}{(\wp u - \wp b_1)(\wp u - \wp b_2) \ldots (\wp u - \wp b_n)},$$

neboť výraz na pravé straně má v rovnoběžníku period tytéž nully a tatáž nekonečna jako daná funkce $f_1(u)$. Při $u = 0$ je čítatel i jmenovatel nekonečný jako $\frac{1}{u^{2n}}$ a podíl zůstává tedy konečným.

Je-li pak $\varphi(u)$ libovolná funkce o periodách 2ω, $2\omega'$, utvořme

$$f_1 = \tfrac{1}{2}[\varphi(u) + \varphi(-u)],$$

$$f_1 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\varphi(u) - \varphi(-u)}{\wp' u}\right];$$

pak jsou f_1 a f_2 dvouperiodické sudé funkce a lze je tudíž dle předcházející úvahy vyjádřiti racionálně pomocí $\wp u$, tedy

$$f_1(u) = R_1(\wp u)$$

$$f_2(u) = R_2(\wp u),$$

značí-li R_1 a R_2 racionální výrazy veličiny $\wp u$. Nyní nalezneme

$$\varphi(u) = R_1(\wp u) + \wp' u \, R_2(\wp u) = R(\wp u, \wp' u),$$

t. j. $\varphi(u)$ je racionálná funkce dvouperiodických funkcí $\wp u$ a $\wp' u$.

Že naopak je každá racionálná funkce veličin $\wp u$ a $\wp' u$ dvouperiodickou, to se rozumí samo sebou.

5. Dokažme ještě, že funkce $\wp u$ a $\wp' u$ mají tu vlastnost, *že* $\wp(u+v)$ *neb* $\wp'(u+v)$ *lze vyjádřiti racionálně pomocí* $\wp u$, $\wp' u$, $\wp v$, $\wp' v$.

Podobnou vlastnost má funkce e^u o jedné periodě $2\pi i$, neboť

$$e^{u+v} = e^u e^v.$$

Determinant

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp w & \wp' w \end{vmatrix}$$

je dvouperiodickou funkcí hodnoty w, která při $w=0$ se stává nekonečnou jako $\frac{1}{w^3}$ a to jen při této hodnotě. Nullou se stává při $w=u$, $w=v$, a musí tedy ještě jednou vymizeti a sice při

$$w = -(u+v).$$

Z indentity

$$(\wp u - \wp v)^2 \wp'^2 w - [\varDelta - \wp w(\wp' u - \wp' v) + (\wp u \wp' v - \wp' u \wp v)]^2 = 0,$$

obdržíme rovnici třetího stupně (kladouce $\varDelta = 0$)

$$(\wp u - \wp v)^2 (4z^3 - g_2 z - g_3) - [z(\wp' u - \wp' v) - (\wp u \wp' v - \wp' u \wp v)]^2 = 0,$$

položivše $z = \wp w$, která má kořeny

$$z = \wp u, \quad z = \wp v, \quad z = \wp(u+v).$$

Můžeme tedy psáti

$$(\wp u - \wp v)^2 (4z^3 - g_2 z - g_3) - [z(\wp' u - \wp' v) - (\wp u \wp' v - \wp' u \wp v)]^2$$
$$= 4(\wp u - \wp v)^2 [z - \wp u][z - \wp v][z - \wp(u+v)],$$

neboť koefficienty mocností z^3 se shodují. Koefficienty z^2 pak podávají rovnici

$$(\wp' u - \wp' v)^2 = 4(\wp u - \wp v)^2 [\wp u + \wp v + \wp(u+v)],$$

z níž

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v, \tag{22}$$

čímž naše věta dokázána.

Derivujeme-li tuto rovnici jednou dle u, jednou dle v, a sečteme-li oba výsledky, obdržíme snadno

$$\text{(23)} \qquad \wp'(u+v) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{(\wp' u - \wp' v)[6(\wp^2 u - \wp^2 v)(\wp' u - \wp' v) - (\wp' u - \wp' v)^2]}{(\wp u - \wp v)^3} - \frac{1}{8}(\wp' u + \wp' v),$$

při čemž však třeba přihlížeti k relaci

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \tfrac{1}{2} g_2,$$

z níž dále

$$\wp'''u = 12\,\wp u\,\wp' u.$$

Z těchto dvou rovnic patrno, že všecky vyšší derivace funkce $\wp u$ se jeví co racionálné výrazy hodnot $\wp u$, $\wp' u$.

II.

1. Na základě předeslaných úvah můžeme již snadno vyvinouti základy theorie křivky třetího stupně.

Rovnice této křivky

$$ax^3 + a'y^3 + bxy^2 + b'x^2y + cx^2 + c'y^2 + dxy + ex + e'y + f = 0$$

obsahuje devět stálých, z čehož vychází, že taková křivka je devíti svými body stanovena. Jelikož ale máme kollineací aneb transformací souřadnic

$$x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma}{\delta x' + \varepsilon y' + \eta}, \quad y = \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'}{\delta x' + \varepsilon y' + \eta},$$

osm stálých k disposici, lze obecně rovnici třetího stupně touto cestou tak přetvořiti, že obsahuje jen jednu stálou, tak nazvaný *absolutní invariant*. Že při této transformaci proměnné ztrácí význam pravoúhlých souřadnic, je věcí lhostejnou. Můžeme tedy rovnici křivky třetího stupně uvésti do tvaru

$$(1) \qquad y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3 = 0.\,^{*})$$

Položíme-li tedy

$$(2) \qquad y = \wp' u\,, \quad x = \wp u,$$

$$(3) \qquad u = -\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = -\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{y},$$

tu nám ukazuje vlastnost funkcí $\wp u$ a $\wp' u$ vyjádřená rovnicí (20), že x a y vyhovují identicky rovnici (1) dané křivky.

Souřadnice bodů křivky třetího stupně vyjádřeny co jednoznačné dvouperiodické funkce argumentu u, integrálu to elliptického.

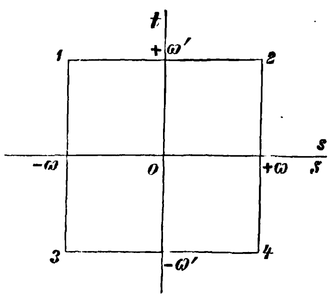
Poněvadž x a y jsou funkce dvouperiodické neodvisle proměnné u, netřeba této přisuzovati všecky hodnoty, stačí nabude-li všecky ty, jež znázorňují body položené v rovnoběžníku period 2ω a $2\omega'$.

---

*) g_2 a g_3 jsou tak zvané *invarianty* křivky třetího stupně, dle *Clebsche* $g_2 = 2S$, $g_3 = -\frac{4}{3}T$; *absolutní invariant* pak jest $\frac{S^3}{T^2} = \frac{2}{9}\frac{g_2^3}{g_3^2}$. Viz *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, pag. 569.

Pokládajíce g_2 a g_3 za hodnoty reálné — jinak by byla celá křivka pomyslná — musíme různiti případy dva.

a) Kořeny rovnice $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ jsou reálné $e_1 > e_2 > e_3$. Dle dřívějších úvah víme, že pak periody 2ω a $2\omega'$ jsou jedna reálná, druhá ryze imaginárná. Rovnoběžník period je tedy pravoúhlý; my jej tak zvolíme, aby bod $u = 0$ byl jeho středem (viz obrazec). Pak je



při $u = 0$, $x = \infty$, $y = \infty$,

$u = \pm\omega$, $x = e_1$, $y = 0$,

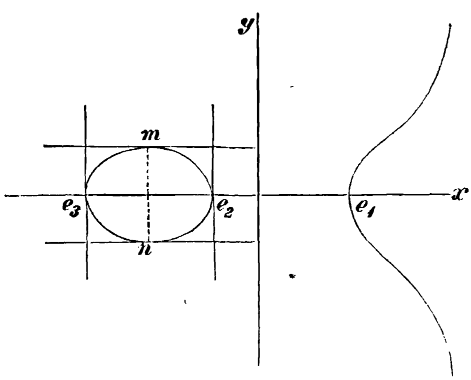
$u = \pm\omega \pm \omega'$, $x = e_2$, $y = 0$,

$u = \pm\omega'$, $x = e_3$, $y = 0$;

tyto body křivky si v rovině xy vytkneme. Abychom nalezli jich tečny, odvoďme si

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - \frac{1}{2} g_2}{y}$$

a v oněch bodech pak vyjde $\frac{dy}{dx} = \infty$



t. j. tečny jsou kolmy k ose úseček x. Mění-li se u od $-\omega$ do $+\omega$, pak jsou $\wp u$ a $\wp' u$ reálné t. j. x, y jsou reálné; pro $u = \pm\omega$ jest $y = 0$, $x = e_1$. Tím přiřaděna hodnotám u na přímce od $-\omega$ do $+\omega$ položeným větev křivky K^3, která se z nekonečna ose úseček souměrně přibližuje a ji v bodu e_1 protíná.

Rovnice (22) a (23) ukazují, že jsou $\wp(u + \omega')$ a $\wp'(u + \omega')$ též reálné hodnoty *), poněvadž $\wp'\omega' = 0$ v našem případě $\omega' = \overline{\omega} i$ kdež $\overline{\omega}$ reálné, máme $\wp\overline{\omega} i = \overline{\wp\omega}$ též reálné, pročež $x = \wp(u + \omega')$, $y = \wp'(u + w')$ jsou reálné. Hodnoty $u \pm \omega'$

*) u reálné.

jsou znázorněny přímkami 12 a 34 v rovině st, a přísluší tedy těmto hodnotám jistá část křivky K^3 nesouvisící s první větví žádným reálným bodem a položená mezi e_2 a e_3.

Pro vrcholy této části musí

$$\frac{dy}{dx}=0,\ 12x^2=g_2,\ x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2};$$

snadno shledáme, že

$$g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3)=4(e_2^2+e_2e_3+e_3^2)$$

je veličina kladná $(e_1+e_2+e_3=0)$. Příslušné y je dáno

$$y=\pm\sqrt{-g_3\mp\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}}.$$

Poněvadž ale determinant

$$\tfrac{1}{32}R=-\tfrac{1}{27}(27g_3^2-g_2^3)$$
$$=-(-g_3-\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2})(-g_3+\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}),$$

při reálných kořenech je kladný *) máme

$$-g_3+\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}>0,\quad -g_2-\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}<0.$$

Tím obdržíme dva reálné body

$$x=-\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2},\ y=\pm\sqrt{-g_3+\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}},$$

a dva imaginárné

$$x=+\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2},\ y=\pm\sqrt{-g_3-\tfrac{2}{3}g_2\sqrt{\tfrac{1}{12}g_2}}.$$

První z těchto dvou hodnot x zapadá mezi e_2 a e_3 a podává reálné body m, n, jichž tečny jsou rovnoběžné s osou x. Tečny v bodech e_2 a e_3 jsme též stanovili, i vidíme, že se celá druhá větev křivky nalézá v rovnoběžníku oněmi čtyřmi tečnami sevřeném. Že tato celá větev je v konečnu, je patrno, poněvadž na přímkách 12 a 34 není žádného bodu u, jemuž by příslušela nekonečně velká hodnota $\wp u$ neb $\wp' u$. Tato větev protíná každou přímku, která se s ní setká, ve dvou bodech — což později ještě ukážeme — a chceme ji proto *větví sudou* nazývati, první větev nechť sluje *lichou*.

Dosavadní výsledky lze takto stručně vysloviti.

Mají-li $\wp u$ a $\wp' u$ periody 2ω reálnou, a $2\omega'$ ryze imaginárnou, a položíme-li

$$x=\wp u,\ y=\wp' u,$$

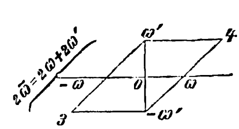
tu jsou x, y souřadnice bodu na křivce třetího stupně, skládající

*) V. *Clebsch*, Binaere Formen p. 129; dle str. 114. vyjde
$$R=-\tfrac{32}{27}(27g_3^2-g_2^3).$$

se ze dvou větví. Argumentu reálnému mezi $-\omega$ *a* $+\omega$ *přísluší větev lichá blížící se z nekonečna ose* $y=0$ *a protínající ji v bodu* $u=\omega$ *č.* $y_0=0$, $x=e_1$. *Argumentům tvaru* $u+\omega'$, *kde* u *je reálné mezi* $-\omega$ *a* $+\omega$, *přísluší větev sudá, tato jest celá v konečnu a protíná osu* $y=0$ *v bodech* $x=e_2$, $x=e_3$, *v nichž* $u=\omega$ *resp.* $u=0$. *Všem hodnotám* u *v rovnoběžníku period tvaru jiného přísluší pomyslné souřadnice* x, y.

b) Rovnice $4z^3-g_2z-g_3=0$ měj jen jeden reálný kořen e_1, ostatní dva e_2, e_3 jsou sdružené komplexní. Položíme-li zase

$$x=\wp u\,,\quad y=\wp' u,$$



tu patrno, že reálným hodnotám u mezi $-\omega$ a $+\omega$ přísluší reálné hodnoty x a y. Jelikož $2\omega+2\omega'$ je komplexní druhá eprioda, můžeme rovnoběžník jako v obrazci upraviti, *a přísluší pak trati* $-\omega\ldots+\omega$ *větev reálná lichá, poněvadž při* $u=0$ *máme* $x=\infty$, $y=\infty$. *Při žádných jiných hodnotách* u *nemají* x *a* y *více hodnot reálných,* jelikož nyní $\wp(u+\omega+\omega')$ není reálné, poněvadž $\wp(\omega+\omega')=e_2$ je komplexní.

Křivka třetího stupně K^3 *má v tomto případu jen jednu lichou větev.*

V obou případech protíná křivka osu pořadnic $x=0$, je-li $g_3<0$, neb při $x=0$, máme $y=\pm\sqrt{-g_3}$. Při křivce o dvou větvích se nalézají tyto body ve větvi sudé, poněvadž $\wp u$ nezmizí při reálné hodnotě u. Totéž vychází, uvážíme-li, že z kořenů e_1, e_2, e_3 jeden a sice e_1 musí býti kladný, jelikož $e_1+e_2+e_3=0$. Má-li pak $g_3=e_1e_2e_3$ býti záporné, musí $e_2>0$, $e_3<0$ a tedy se hodnota $x=0$ nalézá mezi e_2 a e_3.

2. Dána-li rovnice

$$(1)\qquad f(x,y)=0$$

libovolné křivky n-tého stupně, můžeme se tázati po bodech v nichž protíná naši křivku třetího stupně

$$(2)\qquad x=\wp u,\ y=\wp' u.$$

Je-li $f(x,y)$ takového tvaru, že se v ní vyskytuje člen y^n, pak patrno, že je funkce $f(\wp u\,,\wp' u)$ dvouperiodická a že se v ní vyskytne $\wp' u$ v mocnině n-té. Za $u=0$ je ale $\wp' u$ nekonečné jako $\frac{1}{u^3}$ a tedy je tu $f(\wp u\,,\wp' u)$ nekonečná jako $\frac{1}{u^{3n}}$, pročež musí dle obecné věty na str. 8. v rovnoběžníku period též $3n$-krát zmizeti t. j. musí existovati $3n$ hodnoty $u_1, u_2, .. u_{3n}$, jež činí

$$f(x,y) = f(\wp u, \wp' u) = 0$$

a zároveň je

$$y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3 = \wp'^2 u - 4\wp^2 u + g_2 \wp u + g_3 = 0.$$

Body ty jsou průsečíky křivky n-tého stupně s křivkou kubickou. Vůči větě na str. 7. vyslovené z toho vychází ihned, že argumenty $u_1, u_2, .. u_{3n}$ průsečíků dané kubické čáry s libovolnou čarou n-tého stupně vyhovují podmínce

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'};$$

každé u_i můžeme supponovati v prvním rovnoběžníku period $(\pm \omega, \pm \omega')$.

Nevyskytuje-li se v $f(x, y)$ člen y^n, nýbrž je-li nejvyšší mocnina proměnné y $(n - m)$-tá, t. j.

$$f(x,y) = f_m(x)\, y^{n-m} + f_{m+1}(x)\, y^{n-m-1} + \ldots,$$

kde f_m je v x stupně m-tého, pak lze snadno ukázati, že se křivka $f(x,y) = 0$ dotýká dané kubické čáry v bodu $x = \infty$, aneb $u = 0$ takovým spůsobem, že tu splývá m průsečných bodů obou čar. Jelikož pak při $u = 0$ $f_m(x)$ je nekonečné jako $(\wp u)^m$ a y^{n-m} jako $(\wp' u)^{n-m}$ a tedy $f_m(x)\, y^{n-m}$ jako $\frac{1}{u^{2m}} \frac{1}{u^{3n-3m}}$ t. j. $\frac{1}{u^{3n-m}}$, vychází $3n - m$ co počet nekonečen naší periodické funkce $f(\wp u, \wp' u)$; zmizí tedy tato funkce při $3n - m$ hodnotách $u_1, u_2, .. u_{3n-m}$. Připočteme-li k těmto oněch m bodů průsečných zapadajících do $x = \infty$, $y = \infty$, máme opět $3n$ body oběma čarám společné.

Z podmínky (3) vychází, *že všecky křivky n-tého stupně procházející $3n - 1$ pevným bodem čáry k^3, procházejí ještě jedním pevným bodem jejím.*

Platí též opačně: *Zvolíme-li body $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, .. $(x_{3n} y_{3n})$ na křivce k^3 takovým spůsobem, že argumenty u těchto bodů váže podmínka* (3), *pak lze jimi vždy vésti čáru n-tého stupně.* Neboť dle obecné věty na str. 7. lze pak sestrojiti dvouperiodickou funkci $\varphi(u)$, která vymizí jen v bodech $u_1, u_2, .. u_{3n}$ (jednoduše) a jest nekonečně velkou v stupni $3n$ v bodu $u = 0$. Dle věty na str. 13. vyslovené lze však $\varphi(u)$ vyjádřiti co racionálnou funkci $R(\wp u, \wp' u) = R(x, y)$ a tedy je $R(x, y) = 0$ rovnice křivky n-tého stupně, neboť je při $x = \infty$, $y = \infty$ nekonečná jako $\frac{1}{z}$ při $z = 0$.

Co zvláštní případ vytkněme, že argumenty u_1, u_2, u_3 průsečíků křivky k^3 s libovolnou přímkou vyplňují podmínku

(4) $$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{2\omega\ 2\omega'},$$

a naopak, je-li tato podmínka vyplněna, nalézají se body u_1, u_2, u_3 na přímce. Nazýváme zde bodem u k vůli jednoduchosti onen bod křivky K^3, jenž přísluší argumentu u.

Vedeme-li čtyrmi body v_1, v_2, v_3, v_4 libovolnou kuželosečku, protne tato K^3 ještě ve dvou bodech u_1, u_2 a máme

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + u_1 + u_2 \equiv 0 \pmod{2\omega\ 2\omega'}.$$

Položíme-li

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = a,$$

pojímajíce a co argument jistého bodu na K^3 máme

$$a + u_1 + u_2 \equiv 0 \pmod{2\omega\ 2\omega'},$$

t. j. *přímka spojující průsečíky u_1, u_2 křivky s kuželosečkou, vedenou čtyrmi pevnými body v_1, v_2, v_3, v_4 oné, prochází pevným bodem a křivky.*

Tím přiřaděn každé kuželosečce C^2 svazku $(v_1 v_2 v_3 v_4)$ jeden paprsek c bodem a procházející a naopak, každému paprsku vedenému bodem a přiřaděna určitá kuželosečka C^2, ona totiž, která přímku v těchže dvou bodech protíná, jako křivku, neb pakli

$$a + u_1 + u_2 \equiv 0$$

pro přímku, je také

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + u_1 + u_2 \equiv 0$$

a kuželosečka procházející body v_1, v_2, v_3, v_4, u_1 prochází též bodem u_2. Dán-li bod a, tu patrné, že lze body v_1, v_2, v_3 libovolně vytknouti, bod v_4 je pak ale stanoven.

Relace takto stanovená mezi svazkem kuželoseček a svazkem paprskovým je obapolně jednoznačná a jsou tedy oba svazky promětné; každou křivku třetího stupně lze tedy pomocí svazku kuželoseček a projektivného svazku paprskového sestrojiti. Neboť snadno ukážeme opačně, že každé takové dva svazky vytvoří křivku kubickou. Jsou-li $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ rovnice dvou kuželoseček svazku, pak je libovolná jeho kuželosečka dána rovnicí

$$X_1 - \lambda X_2 = 0;$$

a je-li obdobně $y_1 - \lambda y_2 = 0$ paprsek bodem $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ vedený, tu jsou svazky projektivné, přiřadíme-li elementy témuž λ příslušné. Průsečíky sdružených čar jsou pak na křivce

$$X_1 y_2 - X_2 y_1 = 0,$$

ta je stupně třetího, poněvadž X_1 a X_2 jsou druhého a y_1, y_2 prvního stupně v souřadnicích x, y.

Dány-li $3n - 2$ body $u_1, u_2, \ldots u_{3n-2}$ na křivce K^3, tu protíná každá křivka n-tého stupně jimi vedená K^3 ještě ve dvou hybných bodech v_1, v_2 a platí relace

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n-2} + v_1 + v_2 \equiv 0 \text{ (mod } 2\omega,\ 2\omega').$$

Přímka spojivá bodů v_1, v_2 prochází tedy pevným bodem a, jehož argument dán shodou

$$a \equiv u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n-2}.$$

3. Má-li přímka vedená bodem v býti tečnou v tomto bodu, musí

$$v + v + u \equiv 0 \text{ (mod } 2\omega,\ 2\omega'),$$

z čehož plyne argument u bodu tangencialného

$$u \equiv -2v.$$

Nežli věc obrátíme, t. j. než vyhledáme body, jichž tečny daným bodem procházejí, vytkněme si otázku, zda-li existují tečny, mající s křivkou styk trojbodový. V takovém bodu u patrně musí

$$u + u + u \equiv 0 \text{ (mod } 2\omega,\ 2\omega')$$

t. j.

$$3u = 2\alpha\omega + 2\alpha'\omega',$$

značíce α, α' čísla celistvá. Tedy

$$u = \frac{2\alpha\omega + 2\alpha'\omega'}{3},$$

a poněvadž se bod nemění, přidáme-li k argumentu jeho celistvé násobky period 2ω, $2\omega'$, jest zjevné, že stačí klásti za α, α' čísla 0, 1, 2; tím obdržíme *devět* bodů s tečnami, které mají styk trojbodový t. j. devět bodů obratu (inflekčních). Jich argumenty jsou

$$\begin{array}{lll} 0\,, & \dfrac{2\omega}{3}\,, & \dfrac{4\omega}{3}\,, \\ \dfrac{2\omega'}{3}\,, & \dfrac{2\omega+2\omega'}{3}\,, & \dfrac{4\omega+2\omega'}{3}\,, \\ \dfrac{4\omega'}{3}\,, & \dfrac{2\omega+4\omega'}{3}\,, & \dfrac{4\omega+4\omega'}{3}\,. \end{array}$$

Značíme-li stručněji bod o argumentu $\frac{2\alpha\omega+2\beta\omega'}{3}$ symbolem $\alpha\beta$, jsou obratníky naší křivky vyznačeny symboly

00, 10, 20,
01, 11, 21,
02, 12, 22.

Toto schema nám ukazuje velmi jasně vzájemnou polohu devíti bodů inflekčních.

1. Body napsané do téhož řádku neb do téhož sloupce jsou na přímce, poněvadž součet jich argumentu jest periodou.

2. Body do diagonály vepsané aneb body (jako 01, 12, 20; aneb 10, 21, 02) na lomené diagonale jsou též na přímce.

3. Tím jsme nabyli 12 přímek, z nichž každá prochází třemi body inflekčními. Každým bodem procházejí čtyry takové přímky a na nich jsou pak ostatní ony body.

Na př. bodem 00 prochází přímky

00, 10, 20;
00, 11, 22;
00, 01, 02;
00, 12, 21.

4. Z přímek, procházejících body obratu, lze sestrojiti čtyry trojstrany, z nichž každý na svých stranách má všecky body obratu.

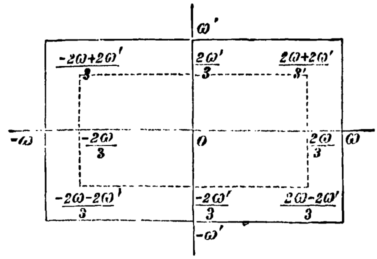
Jsou to trojstrany, jichž strany procházejí body napsanými do řádků, pak body napsanými do sloupců, pak body napsanými do diagonal přímých a lomených, t.

00, 11, 22; 01, 12, 20; 10, 21, 02;
a 02, 11, 20; 01, 10, 22; 00, 12, 21.

Pokládáme-li symboly bodů obratu za elementy devítičlenného determinantu, tu nám repraesentují vyvinuté členy jeho tyto přímky.

Chtějíce rozhodnouti o reálnosti bodů obratu, různěme vytknuté již dva tvary křivky třetího stupně.

a) Křivka o dvou větvích. Perioda 2ω je reálná, $2\omega'$ ryze imaginární. Jak z vedlejšího obrazce patrno, jsou jen body obratu s argumenty



$$0, \frac{2\omega}{3}, \frac{4\omega}{3} \text{ aneb } -\frac{2\omega}{3}$$

reálné, ostatní imaginárné, poněvadž mají komplexní argumenty však ne tvaru $u + \omega'$. Přece však můžeme tvrditi, že jsou tři přímky spojující tyto imaginárné body reálnými. Přímka totiž spojující sdružené komplexní body jest reálnou. Jsou-li

$$x' = \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \quad x'' = \mathrm{M} - i\mathrm{N},$$
$$y' = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}, \quad y'' = \mathrm{P} - i\mathrm{Q}$$

souřadnice takových bodů, máme

$$\begin{vmatrix} x, & \mathrm{M} + i\mathrm{N}, & \mathrm{M} - i\mathrm{N} \\ y, & \mathrm{P} + i\mathrm{Q}, & \mathrm{P} - i\mathrm{Q} \end{vmatrix} = 0,$$

čili po krátké transformaci

$$\begin{vmatrix} x & \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ y & \mathrm{P} & \mathrm{Q} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

co rovnicí přímky body $(x'y')$, $(x''y'')$ vedené, a ta jest reálná.

Rovnice (22) a (23) ukazují, že

$$\begin{aligned} &\text{je-li } \wp\,(u + iv) \text{ tvaru } \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \\ &\text{jest } \wp\,(u - iv) \text{ tvaru } \mathrm{M} - i\mathrm{N}, \\ \text{a } &\text{je-li } \wp'\,(u + iv) \text{ tvaru } \mathrm{P} + i\mathrm{Q}, \\ &\text{jest } \wp'\,(u - iv) \text{ tvaru } \mathrm{P} - i\mathrm{Q}, \end{aligned}$$

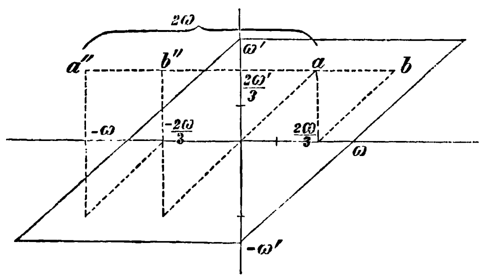
poněvadž $\wp'\,(-iv) = \wp'\,(iv)$. Z toho vychází, že přímka spojující body, které mají komplexní sdružené argumenty, jest vždy reálná. Jsou tedy přímky, na nichž se následující body po třech nalézají:

$$\frac{2\omega'}{3}, 0, -\frac{2\omega'}{3}; \quad \frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \frac{2\omega}{3}, \frac{2\omega - 2\omega'}{3}; \quad \frac{-2\omega + 2\omega'}{3},$$
$$-\frac{2\omega'}{3}, \frac{-2\omega - 2\omega'}{3}$$

reálné; neboť argumenty dvou bodů jsou tu vždy sdružené komplexní hodnoty. To jsou jediné tři reálné přímky, na nichž se nalézají body obratu po třech; ony tvoří jediný reálný trojstran, obsahující ony body. Každá z těchto přímek prochází jedním bodem reálným.

Reálné tři body obratu se nalézají na větvi liché a sice v naší soustavě souřadnic jsou dva souměrně položeny k ose x, třetí v nekonečnu na ose y.

b) Křivka o jedné větvi. Perioda reálná budiž 2ω a komplexní $2\bar{\omega} = 2\omega + 2\omega'$, kde ω' je ryze imaginárné.



Body obratu o argumentech $+\frac{2\omega}{3}$, 0, $-\frac{2\omega}{3}$ aneb $\frac{4\omega}{3}$ jsou opět reálné, arci na jediné reálné větvi křivky. Abychom k bodu $a = \frac{2\bar{\omega}}{3} = \frac{2\omega + 2\omega'}{3}$ nalezli v rovnoběžníku period sdruženě komplexní, uvažme, že týž bod má také argument $a - 2\omega = \frac{-4\omega + 2\omega'}{3} = a''$, poněvadž bodům a a a'' přísluší týž bod křivky. S bodem a'' je ale sdružen komplexní bod

$$a' = \frac{-4\omega - 2\omega'}{3} = \frac{-2\omega - 2\bar{\omega}}{3}$$

a tedy je přímka vedená body $a = \frac{2\bar{\omega}}{3}$, $a' = \frac{-2\omega - 2\bar{\omega}}{3}$, $\frac{2\omega}{3}$ reálná; podobně pro body $b = \frac{2\omega}{3} + \frac{2\bar{\omega}}{3}$, $b' = -\frac{2\bar{\omega}}{3}$, $-\frac{2\omega}{3}$ a pro body $\frac{2\omega'}{3}$, 0, $-\frac{2\omega'}{3}$.

Máme tedy i v případu křivky o jedné větvi jen tři reálné body obratu, z nichž každým opět prochází jedna reálná přímka obsahující dva komplexní sdružené body obratu.