Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Strouhal

Váhy a vážení. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 5, 321--343

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109035

Váhy a vážení.

Napsal

Dr. Vincenc Strouhal,
professor české university v Praze.

(Dokončení).

§ 8. Zkouška vah.

Veškeré vážení vztahuje se k nullovému bodu vah. I jest jedním ze základních požadavků, jimž jemné váhy musí vyhověti, aby *nullový bod* byl *stálým*. Proto jest zkouška *stálosti bodu nullového* první, kterou u vah třeba provésti.

Když tedy váhy byly vhodně umístěny, zařízeny a když teplota se ustálila, vybavíme váhy, necháme je stále kývati a zaznamenáváme body obratu a_1, a_2, a_3 ... Již zde nesmí se jeviti nějaké nápadnější ubývání výkyvů. Na to kombinujeme je vždy po čtyřech a počítáme nullový bod, tedy na př. z čísel a_1, až a_4, pak a_5 až a_8 atd. Nullový bod musí v mezích, jež jsou dány chybami pozorovacími, vycházeti souhlasně.

Týž souhlas musí se jeviti, když se váhy střídavě vybaví a zabaví, po případě i poněkud prudčeji zabaví; nullový bod po novém vybavení musí býti týž jako před zabavením.

Konečně se váhy zatíží, vybaví, nechají kývati, zabaví, a opět vybaví atd.; nullový bod určený po tom, když se závaží sejmou, musí rovněž souhlasiti s původním.

Vzhledem k tomu, že chyby pozorovací nejsou větší než $\frac{1}{10}$ dílce, a že nullový bod se určuje kombinací několika pozorování, nesmí nesouhlas mezi jednotlivě určenými body nullovými činiti více než málo setin dílce, nebo nanejvýše též $\frac{1}{10}$ dílce, což by souhlasilo s případem pravdě velice nepodobným, že by veškerá pozorování byla jednostranně o $\frac{1}{10}$ dílce nesprávna.

Ukazují-li se odchylky větší, jest to znamením, že váhy jsou citlivěji zařízeny než to dle jich mechanického provedení jest oprávněno. V tom případě jest tato větší citlivost zcela illusorní a lépe jest (hlavně se zřetelem k rychlejšímu kývání vah) ji zmenšiti a uvésti v souhlas se stálostí nullového bodu.

Hrubší odchylky ve výsledcích pozorování poukazují k nějaké chybě mechanické; na př. nějaký šroubek není dotažen a viklá se, hranoly nejsou dobře očistěny neb broušeny a pod.

Umístění vah jest při tom ovšem důležité. Mají býti postaveny na konsole, jež jest upevněna na *hlavní* zdi budovy, možná-li, ne blízko okna ani ne blízko kamen, poněvadž v zimě účinkem obou nastávají značné jednostranné rozdíly teploty.

Požadavku stálosti nullového bodu nesmí se však rozuměti tak, jako by nullový bod *průběhem celého dne* neb měsíce a roku musil býti stálým. Působí zajisté na bod nullový rozdělení teploty ve skříni vah; nejmenší nesouměrnost teploty prozrazuje se v bodu nullovém. Když tedy teplota — dle daných poměrů laboratoře — jednostranně stoupá (účinkem kamen) neb klesá (účinkem okna a pod.), jeví se to velmi pravidelně jistým chodem bodu nullového. Proto by bylo také zpozdilé chtíti snad nullový bod tak regulovati, aby byl přesně $= 10{\cdot}00$; i kdyby se to jednou podařilo, jindy se již jeví odchylka. Proto se také při přesném vážení musí bod nullový určiti před i po vážení a základem počtu učiniti hodnota průměrná.

Vše to, co zde řečeno o souhlasu jednotlivě určených bodů nullových, platí všeobecněji o souhlasu rovnovážných poloh, když jsou váhy zatížené. Tyto polohy, několikráte jsouce pozorováním určené, musí vespolek souhlasiti v mezích pozorovacích chyb. Také v této příčině dlužno provésti zkoušku vah; zejména dlužno zkusiti, zda-li tato poloha rovnovážná se nemění, když se závaží na různá místa misky položí, na př. jednou na střed, podruhé blíže kraje a pod.

§ 9. Jak se stanoví citlivost vah.

V předběžných úvahách theoretických byla odvozena rovnice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m\,L}{M_0 l_0 + 2 M l}.$$

Touto rovnicí se udává, na čem citlivost vah závisí, nelze však z ní citlivost počítati, poněvadž malinké délky l_0 a l nejsou přímému měření přístupné. Proto se citlivost vah stanoví pokusem.

Buďtež váhy na obou stranách stejně zatíženy. Určíme na stupnici rovnovážnou polohu. Na to přidáme na př. na pravo přívažek μ (v milligrammech) a určíme znovu rovnovážnou polohu. Je-li rozdíl obou rovnovážných poloh $= n$ dílců a je-li R délka ukazovatele od osy C počítajíc, jest patrně

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{R}.$$

Číslo n jest citlivosti úměrné; u týchž vah jest tudíž měrou citlivosti; a poněvadž ovšem roste s přívažkem μ, přepočítá se dělením $\frac{n}{\mu}$ na přívažek *jednoho milligrammu. Citlivost vah jest dána rozdílem rovnovážných poloh pro přívažek jednoho milligrammu.*

Aby se vyšetřilo, jakou měrou citlivost závisí na zatížení vahadla, určí se pro zatížení různá. Pro praxis jest výhodno voliti jakožto zatížení nullové to, které jest dáno vahou závěsů a misek a odtud počínajíc zvětšovati zatížení na př. na 50, 100, 150, 200, 250 grammů, neb jinak dle toho, jaké největší zatížení jisté váhy připouštějí.

Výsledky takovéto práce sestaví se tabellárně a znázorní graficky; dostane se tak *křivka citlivosti*, kteráž jest pro určité váhy charakteristickou. Z jejího průběhu lze souditi na povahu vzdálenosti l_0 a l.

Křivka citlivosti mění se poněkud teplotou; ale poněvadž teplota síně, v níž se vážení děje, jen v úzkých mezích se měnívá, netřeba k účinku jejímu přihlížeti. Je-li jednou křivka citlivosti určena, může se jí při vážení po dlouhá léta užívati, při čemž ovšem ob čas některé kontrolní pozorování se provede. Rozumí se však samo sebou, že s vahami nesmí se státi žádné jakékoliv změny, kteréž by mohly míti na citlivost vliv, zejména pak, že se vzdálenost těžiště vahadla od osy nesmí regulační maticí změniti.*)

*) Předpis, že se má citlivost při každém vážení regulační maticí zaříditi dle zatížení, jest zcela absurdní.

Aby se výkyv při přidávání přívažku μ milligrammů nestal jednostranně velikým, zařídí se zatížení — pomocí jezdce — tak, že prvá rovnovážná poloha padne as tak daleko před nullový bod jako druhá (po přidání přívažku μ) za ním. Na př. prvá na 7·65, druhá na 12·17, rozdíl 4·52 na 3 milligrammy, tudíž citlivost = 1·51.

§. 10. Příklady citlivosti vah.

Vzhledem k zajímavosti a důležitosti věci buďtež zde uvedeny některé konkretní příklady. Pozorovatel: V. Šťastný, 1887.

1. Váhy Bungovy (obr. 6.). Největší zatížení 1000 *g*. Křivku citlivosti lze sestrojiti z dat následujících.

Zatížení:	0	200	500	600	800	1000 *g*
Citlivost:	1·03	0·95	0·89	0·84	0·78	0·73

Váhy jsou zařízeny zúmyslně méně citlivě, aby doba kyvu byla menší.

2. Váhy Rueprechtovy (obr. 5.) Největší zatížení 250 *g*. Užívá se jich však jen pro málo více než 200 *g*. Křivka citlivosti sestrojí se z čísel následujících.

Zatížení:	0	50	100	150	200 *g*
Citlivost:	1·53	1·37	1·29	1·24	1·23

3. Váhy Herzbergovy (nástupce firmy Bunge). Velice jemné. Největší zatížení jen 20 *g*. Křivka citlivosti udá se z dat následujících:

Zatížení:	0	5	10	15	20 *g*
Citlivost:	9·14	8·06	7·37	6·85	6·29

V příkladech těchto jsou zastoupeny váhy pro velké, střední a malé zatížení. Křivky citlivosti, jež snadno a rychle lze sestrojiti, ukazují spád citlivosti se zatížením z počátku prudší, pak vždy mírnější.

§ 11. Methoda vážení.

Methoda vážení objasní se nejlépe následujícím konkretním příkladem. Bylo přesně stanoviti váhu daného křišťálu K. Užito vah Bungových, jichž největší zatížení smělo býti jen 50 grammů; v souvislosti s tím byla jejich citlivost značná; udávaly ještě setiny milligrammu. Výpis z protokolu jest následující:

		Nullový bod . . . . 8·61
K	10·005 *g*,	rovnov. poloha . . . 5·24
		nullový bod . . . . 8·61
Pro zatížení	10 *g*,	citlivost vah . . . . 7·96

odchylka rovnovážné polohy od středního nullového bodu 3·37
přepočtěná na *mg*, ... 3·37 : 7·96 = 0·423
tudíž jest

$$K = 10{\cdot}005423\ g.$$

Příklad tento podává úplné schema vážení; obsahuje tudíž tři pozorování. Citlivost vzata z tabulky. Nullový bod pozorován dvakrát ke kontrole. Zná-li pozorovatel své váhy a ví-li, že nullový bod v krátké době se nemění, může kontrolní jeho určení odpadnouti.

Redukuje se pak celé vážení na dvě pozorování; jedním se stanoví nullový bod vah, druhým se určí rovnovážná poloha, když jest hmota na jedné misce a na druhé tolik závaží, aby váhy, vybaveny, kývaly v mezích stupnice. Vážení se pak jaksi dokončí počtem. Poslední decimala výsledku přibírá se, jako vždy, jen k zajištění decimaly předposlední.

§ 12. Jak se zkoumá správnost vah.

Z rovnováhy na páce jsme oprávněni souditi jen na *rovnost statických momentů.* Přidáme-li na pravou misku vah hmotu M_1 a na levou hmotu M_2, zvětšíme moment při vahadle, které jest již zatíženo závěsy a miskami, na pravo o $M_1 g L_1$, na levo o $M_2 g L_2$. Je-li rovnovážná poloha tatáž jako nullový bod, lze psáti

$$M_1 L_1 = M_2 L_2.$$

My však jsme zvyklí z rovnováhy oné souditi na *rovnost hmot,* t. j. klásti

$$M_1 = M_2.$$

To však předpokládá

$$L_1 = L_2$$

a v rovnici této jest obsažen požadavek *správnosti vah.*

Dle toho *stačí* pro správnost vah, když jest vahadlo pákou přesně rovnoramennou, t. j. když hrany hranolů postranních jsou od hrany středního hranolu stejně vzdáleny.

Obyčejně se však požadavek správnosti *stupňuje: žádá* se *úplná symmetrie* vahadla vzhledem k rovině dané těžištěm A_0 a hranou O středního hranolu. Vyšší tento požadavek má ovšem dobrý smysl se zřetelem na vliv teploty. Jde o to, aby rovnoramennost vah, byla-li zjednána pro jistou teplotu, se *zachovala* při *teplotě jakkoli rozdílné*; úplná pak souměrnost vahadla zaručuje nejlépe stejnou změnu obou ramen při vzrůstání neb klesání teploty.

Jak daleko rovnici $L_1 = L_2$ jest u daných vah vyhověno, rozhodne se nikoli snad měřením těchto délek nýbrž vážením, které jest daleko přesnějším než měření délková.

Položme na levou misku hmotu M a na pravou závaží A, aby byla rovnovážná poloha souhlasná s bodem nullovým; i jest

$$M \,.\, L_2 = A \,.\, L_1.$$

Položme pak hmotu M na misku pravou, a závaží A na levou; velmi zřídka obdržíme rovnovážnou polohu stejnou; z pravidla jest nutno závaží to poněkud pozměniti na B, o něco (málo) zvětšiti neb zmenšiti, aby opět byla rovnovážná poloha souhlasnou s bodem nullovým; platí pak

$$B \,.\, L_2 = M \,.\, L_1.$$

Z obou těchto rovnic plyne, když se vespolek násobí, při čemž se M krátí,

$$B \,.\, L_2^2 = A \,.\, L_1^2,$$

odkudž

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{B}{A}}\,.$$

Na místě tohoto výrazu přesného lze psáti vždy výraz velmi přibližný, je-li na př. $A > B$,

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{A - B}{A + B}$$

anebo

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A - B)}{\frac{1}{2}(A + B)}.$$

Měrou nerovnoramennosti vah čili nesprávnosti vah jest tedy poloviční rozdíl obou závaží *procentualní*, t. j. vzatý vzhledem k hodnotě průměrné. Tak se výhodněji počítá.

Je-li totiž touto hodnotou arithmetický průměr

$$C = \frac{1}{2}(A + B),$$

uchylují se A i B od hodnoty té v opačném smyslu o rozdíl δ, který jest vzhledem k hodnotě C velmi malý. Platí pak rovnice

$$\frac{A}{B} = \frac{C - \delta}{C + \delta} = \frac{1 - \frac{\delta}{C}}{1 + \frac{\delta}{C}}.$$

Provedouce dělení aneb užívajíce věty binomické obdržíme

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta}{C}} = 1 - \frac{\delta}{C} + \frac{\delta^2}{C^2} - \ldots.$$

Pomíjejíce tedy vyšších mocností poměru $\frac{\delta}{C}$, obdržímė

$$\frac{A}{B} = \left(1 - \frac{\delta}{C}\right)^2,$$

tudíž

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = 1 - \frac{\delta}{C} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A \quad B)}{\frac{1}{2}(A + B)}.$$

Příkladem budiž opět vážení onoho křišťálu odstavce předešlého. Vážení opakováno, při čemž křišťál K položen na misku pravou. Výpis z protokollu ukazuje následující:

		Nullový bod . . .	8·60
10·005 g	K,	rovnov. poloha .	12·70
		nullový bod . . .	8·65
Pro zatížení 10 g,		citlivost vah . .	7·96
odchylka rovnov. polohy od středního nullového bodu .			4·08
přepočtená na mg, ... 4·08 : 7·96 =			0·513,

$$K = 10{\cdot}005513.$$

V tomto příkladě jest tudíž

$$\frac{1}{2}(A - B) = -0{\cdot}000045$$

$$\frac{1}{2}(A + B) = 10{\cdot}0$$

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 + 0{\cdot}0000045.$$

Jedná-li se jenom o stanovení poměru $\frac{L_1}{L_2}$, lze vážiti a počítati jednodušeji dle schematu následujícího:

		Nullový bod . .	8·60
K	10·005,	rovnov. poloha .	5·24
10·005	K	rovnov. poloha . .	12·70
		nullový bod . . .	8·65.

Počítá se pak takto:

Střed obou rovnov. poloh . . . . 8·97
střed obou nullových bodů . . . . 8·62
odchylka střední rovnov. polohy od středního nullového bodu . . . . 0·35
přepočtená na mg, . . . 0·35 : 7·96 = 0·044

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 + 0{\cdot}000\,004\,4.$$

Poměr ramen vahadla není dokonce konstantou vah. Praxis ukazuje, že souvisí již se zatížením samým, hlavně však s rozdělením teploty ve skříni vah.

Tak byl poměr tento u vah Rueprechtových (do 250 *g*) určen jistého dne v souvislosti pro různá zatížení, kdy teplota se neměnila. Výsledky byly následující:

$$\frac{L_1}{L_2} = \begin{array}{lrr} 1 - 0{\cdot}0000055, & \text{zatížení} & 200\ g \\ 1 - 0{\cdot}0000076 & \text{„} & 100\ g \\ 1 - 0.0000101 & \text{„} & 50\ g \\ 1 - 0{\cdot}0000117 & \text{„} & 20\ g. \end{array}$$

Následujícího dne pokračováno v těchto měřeních dále, tak že se onen poměr stanovil pro zatížení 10 *g*. Dle postupu čísel očekávalo se číslo větší než 117, avšak vyšlo:

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - 0{\cdot}0000084, \text{ zatížení } 10\ g.$$

Patrně bylo rozdělení teploty ve skříni vah již poněkud jiné.

§ 13. **Jak lze vážiti správně na vahách nesprávných.**

1. Zdálo by se býti nejjednodušším, určiti číselně stupeň nesprávnosti vah, t. j. poměr $\frac{L_1}{L_2}$, a pak na základě rovnice

$$M_1 L_1 = M_2 L_2$$

počítati

$$M_2 = M_1 \frac{L_1}{L_2}.$$

Avšak pravili jsme již, že poměr obou ramen není konstantou vah, že se mění dle zatížení a hlavně dle rozdělení teploty ve skříni vah. Nelze tudíž číselné hodnoty jednou určené užiti také jindy.

Přes to slouží však takovéto určení poměru $\frac{L_1}{L_2}$ za *orientační*, aby bylo lze posouditi, kdy by se ho smělo přece užiti a kdy by se na něj vůbec nemusilo míti zření.

Tak na př. při oněch vahách Rueprechtových bylo co do hlavního čísla

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - 0{\cdot}00001.$$

Korrekce M . 0·00001 činila tudíž

2·0	*mg*	pro	$M = 200$ *g*
1·0	„	„	$M = 100$ „
0·1	„	„	$M = 10$ „
0·01	„	„	$M = 1$ „ .

Váhy udávaly ještě přesně desetinu, při menším zatížení půl desetiny *mg*. Z toho tedy patrno, že nerovnoramennost vah by se byla nesměla zanedbávati při zatížení kolem 200 neb 100 grammů, kde vliv její šel do celých *mg*, že však při zatížení jenom několika grammů vliv její byl menší než chyby pozorovací.

A tak to bývá u všech jemných vah. Pro jistá malá zatížení lze je považovati za rovnoramenné, tudíž za správné; jest to věcí pozorovatele určením poměru obou ramen se orientovati o tom, až do kterého zatížení váhy mohou prakticky za zcela správné platiti. Tvar oné rovnice

$$M_2 = M_1 \frac{L_1}{L_2},$$

ve které M_1, pro pravou misku, znamená závaží, motivuje zároveň, proč se má počítati vždy poměr $\frac{L_1}{L_2}$ a nikoli snad obráceně $\frac{L_2}{L_1}$.

2. Při větším zatížení vah lze nerovnoramennost vymýtiti dvojím vážením, jednou se závažím A na misce pravé, podruhé se závažím B poněkud jiným na misce levé. (Gauss.) Platí pak opět rovnice

$$M . L_2 = A . L_1,$$
$$B . L_2 = M . L_1,$$

z nichž plyne

$$M = \sqrt{AB}.$$

Správná hmota M jest tudíž geometrickým průměrem závaží A a B.

Místo geometrického lze přibližně vzíti též průměr arithmetický:

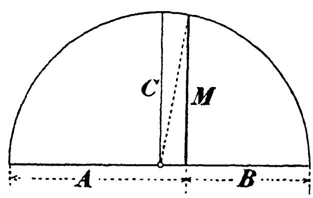
$$C = \frac{1}{2}(A + B).$$

Dle označení již dříve užívaných jest totiž

$$AB = (C + \delta)(C - \delta) = C^2 - \delta^2 = C^2\left(1 - \frac{\delta^2}{C^2}\right)$$

$$\sqrt{AB} = C\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{C^2}\right) = C.$$

Jednoduchou geometrickou interpretaci těchto vzorců podává obr. 9. Sestrojíme-li nad součtem $A + B$ polokruh, jest C poloměr, M polotětiva, tudíž vždy $M < C$, ale v blízkosti středu kruhového velmi blízce $M = C$.



Obr. 9.

Tak byla hmota onoho křišťálu dvojnásobným vážením nalezena.

$$\begin{aligned} A &= 10{\cdot}005423 \\ B &= 10{\cdot}005513 \\ \hline C &= 10{\cdot}005468 \end{aligned}$$

jakožto správná hmota křišťálu.

3. Ještě jinak lze na vahách nesprávných vážiti správně *tarováním* (Borda). Na misku pravou položí se hmota K a vyváží se na misce levé nějakou jinou hmotou (starším, sebe nedokonalejším závažím, zrnky granatovými a pod.) tak, aby váhy kývaly v mezích stupnice. Určí se rovnovážná poloha, kteráž pak platí za bod nullový.

Na to se sejme hmota K a na *touž misku*, kde byla, klade se tolik závaží M, až rovnovážná poloha jest opět tatáž; to znamená, že se klade závaží, až váhy kývají v mezích stupnice, určí se rovnovážná poloha, počítá se, o kolik dílců stupnice se ještě liší od dřívější, t. j. od tohoto jaksi nullového bodu a dle známé citlivosti se dělením dopočítá, kolik by se bylo mělo závaží ještě přidati neb ubrati.

Jak patrno, jest methoda tato methodou *substituční*; klade se hmota známá M, t. j. závaží na místo hmoty neznámé K, až jest rovnovážná poloha tatáž jako před tím.

Jest vhodné za taru užiti na levé misce závaží, třeba staršího, poněvadž toto udává s velkou příbližností, jak mnoho závaží pak na pravo položiti dlužno.

Jinak lze též tak si počínati. Na levou misku položí se největší závaží, jež váhy ještě vydrží, na př. 200 *g*, neb 100 *g*, 50 *g* atd. a na pravo součet všech ostatních závaží, který se nominalně onomu velkému rovná. Určí se rovnovážná poloha, která pak platí za nullový bod.

Pak se opět závaží na pravé misce všechna — anebo jen kolik je třeba — sejmou, položí se tam hmota K a přidá se tolik závaží, až se rovnovážná poloha shoduje s dřívější.

Jest patrno, že zde difference závaží při obou váženích na misce pravé užitých dává správnou hmotu M.

4. Srovnáváme-li obě methody, Gaussovu a Bordovu, shledáme, že poslední jest jednodušší. Vede k cíli rychle, vyžadujíc jen dvojího pozorování. Methoda Gaussova vyžaduje pozorování tří, neb čtyř, když se nullový bod vah ke konci vážení chce ještě kontrolovati. Za to však methoda Gaussova dává více než Bordova; neboť dovoluje počítati též poměr $\frac{L_1}{L_2}$, kterýž jest v jistém smyslu kontrolou vážení, jakož i jinak cenným vedlejším výsledkem.

Kdyby při methodě Gaussově šlo jenom o hmotu M a nikoli též o poměr $\frac{L_1}{L_2}$, dalo by se pozorování též jenom na dvě redukovati, neboť nullový bod se vymýtí.

V onom příkladu, kdy šlo o správnou váhu křišťálu K, bylo by postačilo vážiti a počítati dle schematu tohoto:

K . . . 10·005, rovnov. poloha . . . 5·24
10·005 . . K, rovnov. poloha . . . 12·70
poloviční rozdíl obou rovnov. poloh . . . 3·73
přepočtený na *mg*, ... 3·73 : 7·94 = 0·469

K = 10·005469.

Nullový bod vah netřeba pozorovati; ovšem že se předpokládá, že při vážení zůstane konstantním.

Když se tedy váží methodou Gaussovou a pozoruje se jen, co je nutné ke stanovení hmoty M, pak se vážení redukuje též jen na dvě pozorování a nejeví se tudíž methoda ta býti méně jednoduchou než Bordova. V skutku jsou obě rovnocenné, a jen důvody vedlejší mohou vésti k tomu, které se má dáti v případech konkretních přednost.

Methody vážení, zde popisované, nejsou tak všeobecně užívané, jak by býti mělo. I tam, kde jde o účely vědecké (technické analyse, stanovení hustoty a pod.), vážívá se obyčejně tak, že se jezdec trpělivě popostrkuje na linealu až vážení souhlasí, t. j. až výkyvy na levo a na pravo od středního dílce škály jsou stejné. Předpokládá se tedy, že s tímto středním dílcem nullový bod souhlasí, že jest stálým a že výkyvů neubývá. Nehledíc k nepřesnosti vědecké v tom obsažené jest tento způsob vážení též zdlouhavý a unavující. Pozorovatel zvyklý na způsob vážení, jak zde byl popsán, ani nechápe, jak by kdo měl vážiti jinak. Příčinou toho, proč mnohý se neodhodlá k pozorování kyvů, jest jakási nechuť k počítání i tak jednoduchému, jakého se zde vyžaduje. Ovšem také při tom primitivním způsobu vážení pozorovatel nikdy nemůže zjistiti, jak přesnými jsou váhy, jimiž pracuje, ač na druhé straně přesnosti výsledků, jež obdrží, důvěřuje.

§ 14. Kdy není nerovnoramennost vah na závadu.

V případech velmi četných, jak ve fysice tak i v chemii, lze i na vahách sebe nesprávnějších vážiti docela správně i vážením obyčejným, lze vůbec otázku správnosti vah ignorovati. Při mnohých pracích jde totiž o *poměr* dvou hmot; na př. při chemické analysi, při určování hustoty atd. Provádíme pak vážení *relativní*. Že při takovém vážení eventualní nerovnoramennost vahadla nemá žádného vlivu na výsledek, který hledáme, jest patrno. Máme totiž

$$M_1 L_1 = M_2 L_2 ,$$
$$M'_1 L_1 = M'_2 L_2 ,$$

tudíž

$$\frac{M_1}{M'_1} = \frac{M_2}{M'_2} ,$$

bez ohledu na jakékoliv L_1 neb L_2. Ovšem se předpokládá, že se poměr $\frac{L_1}{L_2}$ od jednoho vážení ke druhému nezměnil, což zase vyžaduje, aby se vážení druhé konalo co možná brzy po prvém.

Vážení, které není *relativní*, zove se *absolutní*. Při tomto jde o stanovení hmoty v grammech; zde jest nutno vážiti buď methodou Gaussovou anebo Bordovou, touto nejvhodněji v té modifikaci, kde netřeba žádného závaží výpomocného. Tak na př. jde-li o stanovení množství stříbra neb mědi elektrolysou vyloučeného, nutno vážiti absolutně.

§ 15. **Účinek vzduchu při vážení absolutním a relativním.**

Vážíce srovnáváme váhu hmot ve vzduchu umístěných. Avšak v tomto ústředí jsou hmoty ty nadlehčovány, nepůsobí svou vahou plnou. Následkem toho dlužno jak absolutní tak i relativní vážení přepočísti, redukovati na vakuum. Tato redukce předpokládá známost hustoty jak hmoty, kterou vážíme, tak i závaží, a to aspoň přibližně. Redukce dopadne tím větší, čím více se hustoty od sebe liší. Příslušné formule a tabulky, jimiž se redukce tato provádí, bývají uváděny v souvislosti se stanovením hustoty.

Sestrojují se také „váhy vakuové" pro vážení fundamentalní důležitosti, na př. srovnávání normalních kilogrammů. Skříň u vah takových musí vůči velmi značnému tlaku vzduchu míti kostru železnou velmi pevnou a desky skleněné velmi silné; musí též býti postaráno o mechanismus, kterým by se i při zavřených vahách daly hmoty na misky klásti a dle methody Gaussovy překládati. Vzhledem k vysoké ceně takových vah bývají jimi opatřeny jen ústavy metronomické prvého řádu. Avšak zkušenosti zde učíněné ukázaly, že výsledky, při vážení v prostoru vzduchoprázdném nabyté, dlužno přijímati s velikou kritičností a obezřelostí, poněvadž jest velice málo takových tuhých látek, které vakuum beze změn svého stavu vydrží.

§ 16. Kontrola závaží.

Říkává se plným právem, že váhy náleží k nejpřesnějším fysikalním apparatům, jež známe; neboť váhy, jdoucí do 1 *kg* maximalního zatížení, udávají zcela snadně ještě 1 *mg*, t. j. $\frac{1}{1000000}$ celku; lze však dobře upraviti váhy ty tak, aby udávaly ještě 0·1 *mg*, čímž stupeň přesnosti stoupne na $\frac{1}{10000000}$. Kdyby na př. délka 1 metru měla býti stanovena s touže přesností, musila by se zaručiti ještě $\frac{1}{10000}$ *mm*, t. j. 0·1 μ, což jest nemožné.

Nemá-li však tato přesnost, jakéž při vážení lze dosáhnouti, býti illusorní, nutno dbáti toho, aby také závaží bylo tak přesně vyrovnáno, jak se to nominalně udává. Zde pak největší opatrnost tím více má místo, poněvadž se závaží užívá a to ne všech kusů stejně. Užíváním se však nominalní jich hodnota může dosti značně změniti, tak že chyby v závaží jsou pak značně větší než chyby pozorovací při vážení samém. Snadno stává se, že pozorovatel snaží se vážiti správně na $\frac{1}{10}$ *mg* a v závažích, jichž užívá, jsou chyby mnoha desetin neb i celých milligrammů. Jest tudíž důležitou úlohou čas od času závaží, jichž pozorovatel užívá, kontrolovati.

Tato kontrola provádí se tím způsobem, že se od největšího kusu počínajíc každý jednotlivý kus závaží srovnává s následujícími, po případě se součtem tolika následujících, aby nominalně byla tatáž hodnota zjednána. Kusy, kteréž se vyskytují dvakrát, nutno nějakým označením (bodem, hvězdičkou a pod.) rozlišovati. Srovnávání velkých kusů dlužno prováděti methodou Gaussovou dvojího vážení. Redukce na vakuum při tom odpadává, poněvadž hmoty srovnávané jsou z téhož materialu, tudíž téže hustoty. Malé kusy, zejména deci- a centigrammy, dlužno vážiti na vahách velmi citlivých, aby, možno-li, ještě setiny milligrammu byly zajištěny. Jakožto výsledek všech těchto vážení obdržíme tolik rovnic, kolik kusů závaží má. Rovnice tyto tvoří pozorovací material, který se má propočítati.

Když se chce způsob počítání objasniti všeobecně, přichází se k rovnicím a formulím velmi nepřehledným a složitostí svou odstrašujícím. Při počítání číselném tato složitost úplně odpadává, poněvadž se čísla vespolek kombinují opět v čísla, jež výsledek jednoduše udávají. Proto jest daleko výhodnějším předvésti určitý, ze skutečnosti vzatý početní příklad a na tomto způsob počítání objasniti. Spolu jest pak na příkladě takovém viděti, jak značné ony odchylky jednotlivých kusů závaží od hodnoty nominalní bývají.

Aby se odchylky tyto obdržely *absolutně,* bylo by nutno, aby jeden kus závaží, nejlépe kilogramm, se srovnal s kilogrammem normalním. Kde jde o vážení absolutní, jest srovnání toto nezbytné. Avšak při pracích chemických a při velmi četných pracích fysikálních jde jen o vážení relativní. V případě tomto stačí, když se úhrnný součet všech kusů závaží pokládá za správný, čímž se chce jen říci, že se odchylky po jednotlivých kusech závaží přiměřeně rozdělí; odchylky ty jsou tedy jen *relativní.* Způsob počítání jest však v obou případech stejný.

Bylo kontrolováno (pozorovatel *V. Šťastný*, 1887 v říjnu) závaží Bungovo (Hamburg), jehož se málo let (od r. 1884) při pracích fysikalních užívalo. Největší kusy byly srovnávány methodou Gaussovou na vahách Bungových, udávajících ještě desetiny *mg*; malé a nejmenší kusy na vahách Herzbergových, udávajících ještě setiny *mg*. Počítáno bylo na tisíciny *mg*, aby se setiny zajistily; ve výsledku se ovšem třetí decimalní místo jako korrekční vynechá.

Výsledek jednotlivých vážení až do grammu ukazují rovnice následující.

		mg
1000	=	$500 + 200 + 200^* + 100 - 0{\cdot}160$
500	=	$200 + 200^* + 100 - 1{\cdot}171$
200	=	$200^* + 0{\cdot}081$
200*	=	$100 + 50 + 20 + 20^* + 10 - 0{\cdot}825$
100	=	$50 + 20 + 20^* + 10 - 0{\cdot}533$
50	=	$20 + 20^* + 10 + 0{\cdot}044$
20	=	$20^* + 0{\cdot}047$
20*	=	$10 + 5 + 2 + 2^* + 1 - 0{\cdot}293$
10	=	$5 + 2 + 2^* + 1 - 0{\cdot}277$
5	=	$2 + 2^* + 1 - 0{\cdot}165$
2	=	$2^* - 0{\cdot}048$
2*	=	$1 + \sigma + 0{\cdot}012$
1	=	$\sigma - 0{\cdot}019.$

Při takovémto srovnávání vyniká zvlášť výhoda soustavy 5, 2, 2, 1. Značka σ značí součet všech decigrammů rovnající se jednomu grammu. Tento gramm přijme se jakoby za neznámou veličinu x a touto se vyjádří všechny ostatní kusy závaží postupnou substitucí. To dává rovnice následující.

		mg
1	=	$x - 0{\cdot}019$
2*	=	$2x - 0{\cdot}007$
2	=	$2x - 0{\cdot}055$
5	=	$5x - 0{\cdot}246$
10	=	$10x - 0{\cdot}604$
20*	=	$20x - 1{\cdot}224$
20	=	$20x - 1{\cdot}177$
50	=	$50x - 2{\cdot}961$
100	=	$100x - 6{\cdot}499$
200*	=	$200x - 13{\cdot}290$
200	=	$200x - 13{\cdot}209$
500	=	$500x - 34{\cdot}169$
1000	=	$1000x - 67{\cdot}327.$

Kdyby se nyní některý kus závaží, na př. 1000gramm, srovnal s normalním kilogrammem, obdržela by se odchylka onoho kusu od správné hodnoty nominalní a tím také hodnota neznámé x.

Jinak přijmeme součet všech kusů za správný. Sečítajíce tedy všechny předcházející rovnice vespolek obdržíme

$$2110\,g = 2110\,x - 140{\cdot}787\,mg$$
$$x = 1\,g + 0{\cdot}066724\,mg.$$

Tím jest hodnota x určena; odchylku její nutno počítati na tolik decimal, aby v její největším násobku, zde $1000\,x$, ještě tolik decimal ciferně zůstalo, na kolik se počet vede, zde tedy na tři decimaly. Zbývá ještě jen dosaditi hodnotu za x vypočítanou do rovnic, v nichž jednotlivé kusy závaží touto veličinou x jsou vyjádřeny. Tak vyjde konečně výsledek závěrečný následující:

			Odchylka
1	=	$1\,g + 0{\cdot}048\,mg$	$+0{\cdot}05\,mg$
2*	=	$2\,g + 0{\cdot}126$	$+0{\cdot}13$
2	=	$2\,g + 0{\cdot}078$	$+0{\cdot}08$
5	=	$5\,g + 0{\cdot}088$	$+0{\cdot}09$
10	=	$10\,g + 0{\cdot}063$	$+0{\cdot}06$
20*	=	$20\,g + 0{\cdot}110$	$+0{\cdot}11$
20	=	$20\,g + 0{\cdot}157$	$+0{\cdot}16$
50	=	$50\,g + 0{\cdot}375$	$+0{\cdot}38$
100	=	$100\,g + 0{\cdot}173$	$+0{\cdot}17$
200*	=	$200\,g + 0{\cdot}055$	$+0{\cdot}06$
200	=	$200\,g + 0{\cdot}136$	$+0{\cdot}14$
500	=	$500\,g - 0{\cdot}807$	$-0{\cdot}81$
1000	=	$1000\,g - 0{\cdot}603$	$-0{\cdot}60.$

Srovnávání malých závažíček, decigrammů a centigrammů, se k těmto výsledkům připojí. Pozorovací material obsahují následující rovnice, vážením zjednané.

								mg
1	=			0·5	+ 0·2	+ 0·2*	+ 0·1	− 0·019
0·5	=				0·2	+ 0·2*	+ 0·1	+ 0·038
0·2	=					0·2*		+ 0·002
0·2*	=	0·1	+ 0·05	+ 0·02	+ 0·02*	+ 0·01		+ 0·110

			mg
0·1	$=$	$0{\cdot}05 + 0{\cdot}02 + 0{\cdot}02^* + 0{\cdot}01$	$+ 0{\cdot}078$
0·05	$=$	$0{\cdot}02 + 0{\cdot}02^* + 0{\cdot}01$	$- 0{\cdot}023$
0·02	$=$	$0{\cdot}02^*$	$- 0{\cdot}002$
0·02*	$=$	$0{\cdot}01 + 0{\cdot}01^*$	$- 0{\cdot}073$
0·01	$=$	$0{\cdot}01^*$	$- 0{\cdot}034.$

Zavedeme-li hodnotu 0·01* za neznámou y, kterou pak všechny jednotlivé kusy malých závažíček vyjádříme, obdržíme postupnou substitucí

		mg
0·01	$=$	$y - 0{\cdot}034$
0·02*	$=$	$2y - 0{\cdot}107$
0·02	$=$	$2y - 0{\cdot}109$
0·05	$=$	$5y - 0{\cdot}273$
0·1	$=$	$10y - 0{\cdot}445$
0·2*	$=$	$20y - 0{\cdot}858$
0·2	$=$	$20y - 0{\cdot}856$
0·5	$=$	$50y - 2{\cdot}121$
1	$=$	$100y - 4{\cdot}299.$

Avšak kus poslední, 1, jest již určen. Jeho hodnota jest

$$1 = 1\,g + 0{\cdot}048\,mg\,.$$

Z toho se tedy vypočte

$$y = 0{\cdot}01\,g + 0{\cdot}04347\,mg\,.$$

Když pak výsledek tento opět postupně dosazujeme, obdržíme jakožto závěrečný výsledek následující.

		Odchylka
0·01*	$= 0{\cdot}01\,g + 0{\cdot}043\,mg$	$+ 0{\cdot}04\,mg$
0·01	$= 0{\cdot}01\,g + 0{\cdot}009$	$+ 0{\cdot}01$
0·02*	$= 0{\cdot}02\,g - 0{\cdot}020$	$- 0{\cdot}02$
0·02	$= 0{\cdot}02\,g - 0{\cdot}022$	$- 0{\cdot}02$
0·05	$= 0{\cdot}05\,g - 0{\cdot}056$	$- 0{\cdot}06$
0·1	$= 0{\cdot}1\,g - 0{\cdot}010$	$- 0{\cdot}01$
0·2*	$= 0{\cdot}2\,g + 0{\cdot}011$	$+ 0{\cdot}01$
0·2	$= 0{\cdot}2\,g + 0{\cdot}013$	$+ 0{\cdot}01$
0·5	$= 0{\cdot}5\,g + 0{\cdot}052$	$+ 0{\cdot}05.$

Nazvali jsme malá ta výslední čísla *odchylkami* a nikoli korrekcemi; neboť nejedná se o to, hledati *korrekce* závaží, t. j. stanoviti, mnoho-li dlužno k nějakému kusu přidati nebo od něho ubrati, aby kus ten měl tu hmotu *fakticky*, jakou má *nominalně*, nýbrž jen stanoviti, jaká jest jeho *hmota skutečná*, oč váží, jak říkáme, více nebo méně, než jak jest při něm udáno. Korrekce by měly patrně opačné znamení než ony odchylky.

§ 17. Jak lze pozorováním číselně stanoviti konstanty vah.

Vraťme se ke konci oddílu tohoto o vahách k základům theoretickým, jimiž jsme výklad začali. Pro citlivost a dobu kyvu, jež pro práci s vahami mají hlavní význam, odvodili jsme rovnice

$$n = \mathrm{R} \operatorname{tg} \alpha, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m\mathrm{L}}{\mathrm{M}_0 l_0 + 2\mathrm{M}l},$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{M}_0 \mathrm{L}_0^2 + 2\mathrm{ML}^2}{\mathrm{M}_0 l_0 + 2\mathrm{M}l}.$$

Z rovnic těchto poznáváme, jaké to jsou veličiny, jež zde rozhodují. Vedle vahadla, t. j. jeho hmoty M_0, délky 2L a poloměru setrvačnosti L_0, a vedle jeho zatížení 2M, jsou to odlehlosti l_0 a l (obr. 3.). O těchto bylo již z výkladu samého patrno, že jsou vzhledem k délkám L a L_0 velmi malé. Mají-li však ony vzorce býti zcela jasnými, jest velice žádoucno, aby se na nějakém případu konkretním, pro jisté určité váhy, jak se jich k účelům vědeckým užívá, číselně ukázalo, jak jsou malými, jakého řádu. K tomu je třeba provésti *pozorování*, jak *citlivosti* tak *doby kyvu*, pro *zatížení rozličná;* pozorování ta se doplňují a zároveň navzájem se kontrolují, čímž se úkol, sám sebou důležitý, stává zajímavějším.

Za příklad buďtež uvedena pozorování, jež Dr. *Vlad. Novák* provedl na vahách Rueprechtových (obr. 5.). Váhy tyto, jdoucí do zatížení až 250 *g*, byly k účelu tomu citlivěji regulovány, než jak bylo původně a jak v § 10. udáno. Ukázalo se, že s tímto zvýšením citlivosti jest jich provedení mechanické v úplném souhlasu. Číselné konstanty určeny takto:

Hmota vahadla $M_0 = 140{\cdot}353\,g$,
délka vahadla $2L = 29{\cdot}02\,cm$,
délka ukazovatele $R = 27{\cdot}50\,cm$.

Vykonána pak mnohá pozorování orientační jak citlivosti tak doby kyvu. Za urychlení vzata hodnota (Praha)

$$g = 981{\cdot}0\,\frac{cm}{sec^2}.$$

Mezi výsledky, odvozenými jednak z citlivosti, jednak z doby kyvu, nebylo žádoucího souhlasu. Ukázalo se však, že délka l, kteráž vyšla positivní, nejevila se býti konstantní, nýbrž v mezích pružnosti se zatížením měnlivou; při větším zatížení se tedy vahadlo poněkud více prohýbá. O jak malinká prohnutí zde však jde, objasní se výsledky níže uvedenými. Z okolnosti, že vahadlo se v mezích pružnosti většímu zatížení poddává, usouzeno, že zde asi také bude rozhodovati doba působení a že tudíž, aby docíleno bylo souhlasu, nutno pracovati jako by s prohnutím limitním, jaké se dostaví teprve po uplynutí doby dostatečně dlouhé. Na základě toho učiněn zvláštní plán pozorovací, jehož provedením, jak dále viděti, docíleno souhlasu tak dobrého, že tím zase naopak správnost onoho soudu se dotvrdila. Váhy zatíženy a vybaveny; učiněna malá korrekce, aby rovnovážná poloha souhlasila se středním dílcem stupnice. Na to se nechaly váhy volně kývati $^1/_4$ hodiny; tím se prohnutí vahadla ustálilo; teprve potom přikročeno — *bez arretace vah* — ke stanovení doby kyvu. Pozorováno chronometrem Bröckingovým 13 průchodních okamžiků, t. j. stanoven vždy okamžik, kdy ukazovatel prošel právě přes střední dílec stupnice. Na to pak — *opět bez arretace vah* — stanovena citlivost ($m = 1\,mg$), jakoby v přímé souvislosti s pozorováním doby kyvu při témže prohnutí vahadla. Rovnovážné polohy počítány ze čtyř bodů obratu. Dílce stupnice jsou millimetry. Na to doba kyvu opětně — *bez arretace vah* — určena ke kontrole ještě jednou. Do počtu pak zavedeny hodnoty průměrné, při nichž decimala poslední má ovšem jen početní význam, byvši podržena tak, jak z průměrných hodnot vyšla bez zaokrouhlení.

Takovým způsobem zjednána mezi stanovením citlivosti a mezi určením doby kyvu jako by přímá *souvislost*, arretace vah mezi pozorováním způsobila by *diskontinuitu*, následkem kteréž by nebylo lze pozorování kombinovati.

Pozorování definitivní konána v únoru 1900. Nejprve určeno n a t pro $M = 0$, t. j. pro vahadlo samotné, nezatížené (ani miskami). Vyšlo:

$$n = 3{\cdot}372\,mm \qquad t = 9{\cdot}0087\,sec.$$

Na základě těchto dat, vzhledem k rovnici

$$n = \frac{RL}{M_0 l_0} \text{ vypočteno } l_0 = 0{\cdot}08431\,mm,$$

a vzhledem k rovnici

$$\lambda = \frac{L_0^2}{l_0} \text{ vypočteno } L_0 = 82{\cdot}47\,mm.$$

Čísla tato udávají další konstanty vahadla, určujíce polohu jeho těžiště pod osou a jeho poloměr setrvačnosti.

Na to zavěšeny na vahadlo jeho misky se závěsy. Jich hmota byla před tím určena a nalezena,

hmota misky a závěsu v pravo . . . 36·3613 *g*,
„ „ „ v levo . . . 36·3609 *g*.

Po tom provedeno ve způsobu dříve vylíčeném pět řad pozorování citlivosti i doby kyvu, a to pro zatížení miskami a závěsy samotnými a pak pro zatížení o 50, 100, 150 a 200 grammů větší.

Výsledek práce a výpočty odlehlosti l jak z pozorování citlivosti tak z pozorování doby kyvu udává přehledně tabulka následující.

Citlivost a doba kyvu vah Rueprechtových.

Výpočet odlehlosti l.

	M	n	l	t	l
	g	mm	mm	sec	mm
1	36·361	3·133	0·0124	14·0854	0·0106
2	86·361	2·878	0·0118	18·3558	0·0109
3	136·361	2·652	0·0118	21·1000	0·0121
4	186·361	2·415	0·0126	23·2847	0·0121
5	236·361	2·219	0·0130	24·6305	0·0132

Srovnávajíce výsledky pro l, jak vyšly jednak z citlivosti jednak z doby kyvu, shledáváme souhlas velmi dobrý.

Dlužno zajisté uvážiti, že se l počítá z *přírůstku* $2Ml$ momentu celkového $M_0 l_0 + 2Ml$, tudíž z hodnot *differenčních*; proto jest také souhlas lepší tam, kde tyto přírůstky jsou větší, t. j. kde zatížení M jest větší. Čísla ukazují se zatížením chod, který se pravidelněji jeví z pozorování doby kyvu. Jest to pochopitelné, poněvadž dobu kyvu t lze stanoviti přesněji než citlivost n. Redukce doby kyvu na vakuum, zde velice nesnadná, jde do chyb pozorovacích. Také redukce na amplitudy „nekonečně malé“ nebyla nutná, poněvadž amplitudy byly již velmi malé. Onen chod čísel l jest však mírný. Pozorování tudíž ukazují, že se vahadlo větším zatížením poněkud prohýbá, ač prohnutí nečiní více než asi tři tisíciny millimetru. A i jinak jest odlehlost l samotna velmi malá, číníc asi osminu odlehlosti l_0 těžiště, něco málo přes setinu millimetru. A přec vidíme, jak i tyto nepatrné délky způsobují v citlivosti ubývání dosti značné, totiž od $n = 3{\cdot}37$ při zatížení vahadla nullovém až do $n = 2{\cdot}22$ při zatížení vahadla miskami a závažím 200gramm. Tím se vysvětluje, proč jest prakticky nemožno zhotoviti váhy, jichž citlivost byla by konstantní.

Grafickým znázorněním výsledků pozorovaných, jehož zde neuvádíme, vynikne průběh veličin n a t jakož i průměrných hodnot l velice poučně.