Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Vorovka

Integrál partikulární jakožto obálka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 229--240

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109065`

$\overline{ao}$, t. j. střed hledané ellipsy jest půlící bod úsečky spojující bod a_1 se středem ellipsy dané.

Poněvadž kružnice K i K' jsou v téže rovině, budou průměty obou kružnic ellipsy, jichž osy navzájem jsou rovnoběžny, a poměr os u obou bude týž.

Integrál partikulární jakožto obálka.

Napsal

Dr. **Karel Vorovka**,
s. professor na Král. Vinohradech.

Obyčejná differenciální rovnice prvního stupně

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

má obecný integrál tvaru

$$(2) \qquad F(x, y, C) = 0,$$

kdež značí C libovolnou konstantu. Klademe-li místo ní nějakou určitou hodnotu, obdržíme integrál partikulární. Integrál takový podává pak zároveň rovnici jakési určité křivky, kdežto integrál obecný značí soustavu takových křivek.

Zvolme v obecné poloze bod M_0 o souřadnicích x_0, y_0 a vyhledejme, které křivky dané soustavy bodem tím procházejí. K tomu cíli dosaďme souřadnice jeho do rovnice (2), čímž obdržíme

$$(3) \qquad F(x_0, y_0, C) = 0.$$

Z rovnice té lze pak C vypočítati. Vychází-li na př. pro C rovnice lineární, jejíž kořen jest $C = \alpha$, pak bodem M_0 prochází jenom jedna křivka; rovnice její zní

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

což jest zároveň partikulární integrál původní rovnice differenciální. O křivkách dané soustavy lze pak říci, že pokrývají rovinu jednoduše. — Vychází-li pro C rovnice kvadratická, jejíž kořeny jsou α a β, pak bodem M_0 procházejí dvě křivky, jejichž rovnice jsou

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{a} \quad F(x, y, \beta) = 0.$$

V tom případě pravíme o dané soustavě křivek, že rovinu pokrývá dvojnásobně.

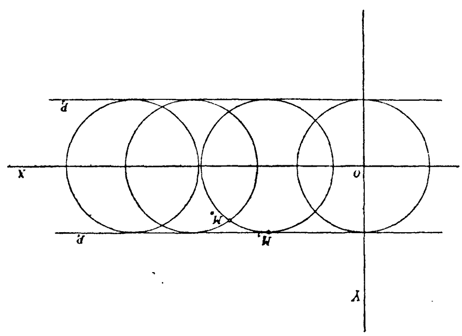
Na př. differenciální rovnice

$$y^2 y'^2 + y^2 - r^2 = 0$$

má obecný integrál

$$(x - C)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Integrál tento značí soustavu kruhů o stálém poloměru r, jejichž středy leží na ose x-ové (obr. 1.).



Obr. 1.

Jest viděti, že tato soustava kruhů má za obálku dvě s osou x-ovou rovnoběžné přímky P_1 a P_2. Dosadíme-li do obecného integrálu souřadnice bodu M_0 daného v poloze obecné, obdržíme pro C rovnici kvadratickou, která dává dva různé kořeny, protože diskriminant její nerovná se nulle. Kdybychom však místo bodu M_0 zvolili některý bod obalující přímky, na př. bod M_1, bude příslušná kvadratická rovnice podávati jenom jeden kořen, protože diskriminant její se annulluje. Bodem M_0 v poloze obecné procházejí tedy dvě křivky, bodem obálky však M_1 pouze křivka jediná, což jest i z obrazce patrno.

Vlastnost taková přísluší bodům každé jakékoliv obálky. *Prochází-li tedy bodem v poloze obecné n různých křivek dané soustavy, pak každým bodem příslušné obálky prochází alespoň o jednu křivku méně.*

Známe-li rovnici obálky

$$g(x, y) = 0, \tag{4}$$

můžeme snadno najíti souřadnice ξ a η těch bodů, v nichž se stýká obálka s křivkami příslušné soustavy.*) Řešíme jednoduše rovnice

$$g(\xi, \eta) = 0$$
$$F(\xi, \eta, C) = 0$$

dle ξ a η. Z tvaru těchto rovnic lze souditi, že *obecně kořeny budou záviseti na proměnném parametru C, že tedy každá křivka bude se s obálkou stýkati v jiném bodě.* Později však poznáme, že jsou možny též odchylky od tohoto pravidla.

Rovnice obálky pravidelně jest integrálem příslušné rovnice differenciální; nedá-li se však z obecného integrálu žádnou speciální stálou hodnotou libovolné konstanty odvoditi, není integrálem partikulárním, nýbrž singulárním. To jest také obyčejný případ, a jen výjimečně se stává, že některá z dané soustavy křivek jest ostatním křivkám obálkou, takže integrál, jakožto singulární vyhledaný, vlastně jest integrálem partikulárním. Pěkný takový příklad uvádí Serret:**)

Je-li dána soustava křivek rovnicí

$$y = C(x - C)^2,$$

rozpadá se obálka ve dvě křivky, jichž rovnice jsou

$$y = 0 \quad \text{a} \quad y = \frac{4x^3}{27}.$$

Z těch však první jest zároveň křivkou dané soustavy; neboť rovnice její plyne z původní, klademe-li v této $C = 0$.

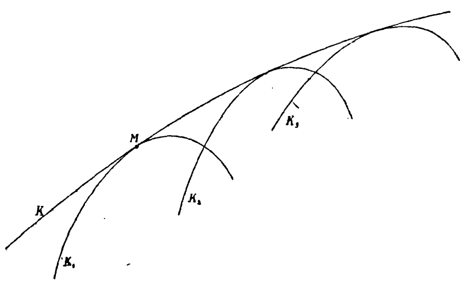
V Harnackově německém zpracování zmíněné knihy Serretovy

*) Stykem rozumí se zde dotyk i protínání.

**) Serret, Cours de calcul diff. et int., 1880, II. str. 387—388.

jest příklad ten také uveden, ale k němu připojeno jest tvrzení, které se ve francouzském originále nevyskytuje a které je nesprávné. Zní totiž: „Nur bei einem Kurvensysteme, welches die Konstante C mindestens in der dritten Potenz enthält, welches also die Ebene mindestens dreifach überdeckt, kann dieser Fall eintreten. Die Einhüllende bildet den Ort der Punkte, in denen mindestens drei Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, und die Tangente der Ortskurve ist in jedem Punkte mit dieser Richtung identisch.“ *) Také v nejnovějším Bohlmannem pořízeném vydání téže knihy jest text tento doslovně bez nejmenší změny přijat. **)

Úsudek zde obsažený jest asi následující: Mysleme si křivku K (obr. 2.), která obaluje soustavu křivek K_1, K_2, $K_3, \ldots$,



Obr. 2.

sama však zároveň do této soustavy patří. Každým bodem jejím M procházejí tedy dvě křivky dané soustavy, totiž křivka K sama a některá z křivek K_1, K_2, $K_3, \ldots$ Protože však obálka má, jak známo, tu vlastnost, že každým bodem jejím prochází z dané soustavy alespoň o jednu křivku méně, nežli jich prochází bodem v poloze obecné, musí v našem případě bodem v poloze obecné procházeti nejméně křivky tři. Pak ovšem nutně obecný integrál obsahuje libovolnou konstantu C alespoň ve třetí mocnině, jak tomu také jest v příkladě již uvedeném.

---

*) Serret-Harnack, Lehrbuch der Diff.- und Integralrechnung, sv. II., 2., str. 48.

**) Tamže, sv. III., 1., 1903, str. 26.

Tento výsledek však nemůže býti správný, ježto lze snadno sestrojiti obecné integrály, které obsahují libovolnou konstantu C v nejvyšší mocnině druhé, a přece za obálku podávají integrály partikulární.

Chceme-li integrál takový sestrojiti, předpokládáme jej ve tvaru

$$(5) \qquad u_0(x, y)\, C^2 + u_1(x, y)\, C + u_2(x, y) = 0,$$

kdež funkce u_0, u_1, u_2 musí býti jednoznačné, ježto by jinak C určováno bylo více než dvojznačně. Pro jednoduchost omezme se ještě na funkce algebraické celistvé. Totéž nechť platí o všech ostatních funkcích, které se v počtu vyskytnou.

Rovnici obálky podává diskriminant

$$(6) \qquad u_1^2 - 4u_0u_2 = 0,$$

a požadujeme, aby tatáž křivka, kterou tato rovnice značí, plynula z obecného integrálu pro některou speciální stálou hodnotu C. Nebude na újmu všeobecnosti, budeme-li žádati, aby takový případ nastal pro $C = 0$, protože substitucí $C = C_1 + \alpha$ můžeme jiný případ $C = \alpha$ na první jednoduchý případ uvésti. Pro $C = 0$ plyne však z obecného integrálu

$$(7) \qquad u_2 = 0.$$

Vyhledejme především společné body křivek daných rovnicemi (6) a (7). Dosazením příslušné hodnoty z poslední rovnice do předchozí obdržíme novou rovnici

$$(8) \qquad u_1 = 0.$$

Místo soustavy rovnic (6) a (7) máme nyní soustavu (7) a (8). Kořeny těchto dvou rovnic dávají body společné oběma křivkám. Jest jich obecně počet omezený a netvoří dohromady žádné souvislé čáry. My však chceme, aby celé pásmo bodů tvořících souvislou křivku bylo oběma křivkám společno. Je-li rovnice této společné křivky

$$(9) \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

pak požadavku tomu nejvšeobecnějším způsobem vyhovíme, položíme-li

$$u_1 = \varphi^k K(x, y) \tag{10}$$

a

$$u_2 = \varphi^l L(x, y), \tag{11}$$

kdež k a l jsou čísla celá a funkce K a L funkci φ jakožto faktor již neobsahují.

Rovnicemi (10) *a* (11) *jest úloha řešena. Obecný integrál, který má stanovené vlastnosti, jest tedy*

$$u_0 C^2 + \varphi^k K C + \varphi^l L = 0. \tag{12}$$

Zbývá ještě podotknouti, že funkce u_0 nesmí funkci φ jakožto faktor obsahovati, jelikož by se pak jím celá rovnice krátila. Také funkce K a L a čísla k a l, jak dále uvidíme, nesmějí se zcela libovolně voliti, má-li vůbec možnost obálky potrvati

Lze snadno potvrditi, že integrál takto sestavený žádané vlastnosti skutečně má. Pro $C = 0$ plyne

$$\varphi^l L = 0, \tag{13}$$

a jakožto rovnice obálky vychází

$$\varphi^{2k} K^2 - 4u_0 \varphi^l L = 0$$

čili, vytkneme-li tu φ v příslušné mocnině,

$$\varphi^m M = 0, \tag{14}$$

kdež funkce M s předešlými funkcemi jednoduchým způsobem souvisí.

Rovnice (13) podává křivky

$$\varphi = 0 \quad \text{a} \quad L = 0,$$

rovnice (14) podobně

$$\varphi = 0 \quad \text{a} \quad M = 0.$$

Křivka $\varphi = 0$ jest tedy integrálem partikulárním a přece zároveň obálkou všech křivek, které představuje integrál obecný.

Přistupme nyní k podrobnějšímu rozboru:

1. Lze dokázati, že křivka $\varphi = 0$ vždy musí býti nižšího stupně nežli obecná křivka dané soustavy. Kdyby totiž stupeň rovnice (12) měl býti týž jako stupeň rovnice $\varphi = 0$, musilo by patrně $k = l = 1$, a mimo to by místo funkcí K a L musily

býti dvě konstanty p a q. Potom však by rovnice (12) mohla nabýti tvaru

$$\frac{u_0}{\varphi} = -\frac{pC+q}{C^2},$$

kterýžto tvar ani možnost obálky nepřipouští. Místo výrazu na pravé straně můžeme totiž dosaditi novou libovolnou stálou D, čímž obdržíme okamžitě integrál, který libovolnou stálou určuje pouze jednoznačně a tedy obálky míti nemůže. — Nemožnost obálky lze ještě jinak ukázati. Derivujeme-li celou rovnici tuto dle x, vyloučí se tím hned libovolná stálá, a výsledek derivování jest tedy příslušnou differenciální rovnicí. Ta by však v každém bodě dávala jen jednu hodnotu pro y', což by nebylo možno, kdyby každým bodem dvě různé křivky procházely. — Podobným rozborem lze také poznati, že nepřípustny jsou též případy, kde $k = l$ a současně $K =$ konst. L.

2. Z rovnic (13) a (14) poznáváme, že se obálka i příslušná křivka soustavy rozpadají. Na příkladě uvidíme, že to vždycky býti nemusí.

3. Vyhledejme body, v nichž se stýká ona zajímavá část obálky s křivkami soustavy obalené, t. j. řešme rovnice (9) a (12) dle x a y. Jedná-li se jen o body v konečnu, plyne dosazením příslušné hodnoty z rovnice (9) do (12)

$$u_0 C^2 = 0,$$

z čehož

$$\text{buď} \quad C = 0 \quad \text{aneb} \quad u_0 = 0.$$

Případ prvý nepodává nic jiného, nežli že se křivka $\varphi = 0$ sama se sebou stýká a mimo to ještě s křivkou $L = 0$. Zajímavější je druhý případ. Řešením rovnic $u_0 = 0$ a $\varphi = 0$ obdržíme body styku s křivkami ostatními a to zcela neodvisle od C. Při řešení tom jsou patrně možny tři případy.

α) Obě rovnice obsahují spor a nemají společného řešení. Obálka $\varphi = 0$ jest tedy od křivek obalených zcela oddělena.

β) Všechny kořeny jsou komplexní; reálná část obálky jest tedy od reálných křivek soustavy oddělena. Styk děje se v částech imaginárních.

γ) Některé aneb všechny kořeny jsou reálné. V bodech těch nastává pak reálný styk mezi obálkou a křivkami obalenými.

V každém z těchto tří případů pozorujeme však veliký rozdíl od supposice, kterou jsme v obr. 2. učinili. Tam totiž se obálka stýká v každém svém bodě vždy s jinou křivkou soustavy; zde však buď žádný styk nenastává, aneb se děje v omezeném počtu bodů, jejichž souřadnice jsou kořeny rovnic $u_0 = 0$ a $\varphi = 0$. Nejdůležitější však při tom jest, že poloha bodů těch nezávisí na C, takže se obálka v nich stýká se všemi křivkami najednou. Nastává zde patrně odchylka, o níž byla již na str. 231. zmínka učiněna.

Tím se vysvětluje neshoda mezi tvrzením svrchu uvedeným a výsledky našimi. Supposice, že každým bodem takové zvláštní obálky procházejí dvě křivky dané soustavy, nemusí totiž býti vždy splněna.

Rovnice $\varphi = 0$ a $u_0 = 0$ mohou nám podati ještě více nežli body styku. Krátkým výpočtem lze odvoditi, že obálka se křivek obalených skutečně dotýká, jestliže se křivky oběma těmito rovnicemi dané dotýkají, a naopak, jestliže se protínají, že také obálka křivky soustavy protíná.

Ovšem důsledky dosud uvedené mají platnost jen pro body v konečnu.

Příklady.

1. Jest dán obecný integrál

$$C^2 + 2\,C(x - y) - (x - y)(x + y) = 0.$$

Srovnáme-li jej s obecným tvarem (12), nalezneme snadno, že zde jest

$$u_0 = 1, \varphi = x - y, k = l = 1, K = 2, L = -(x + y).$$

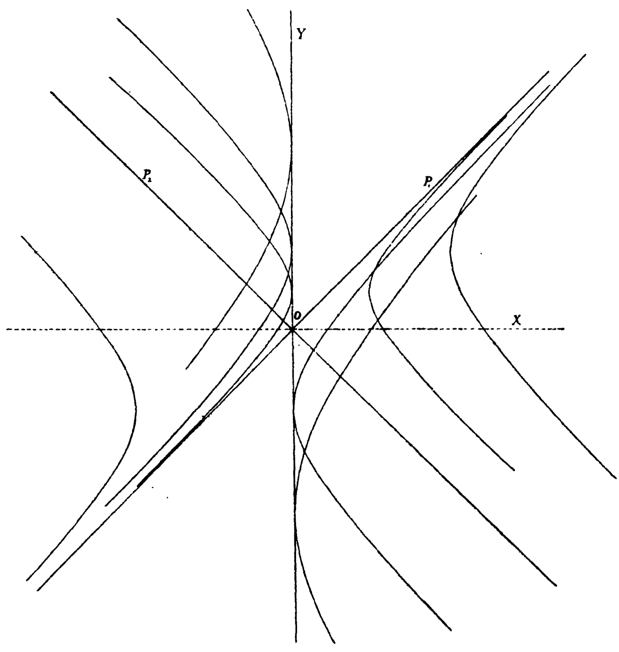
Pro $C = 0$ obdržíme dvě přímky P_1 a P_2, jejichž rovnice jsou $y = x$ a $y = -x$. Pro obálku vychází rovnice $x(x - y) = 0$. Obálka skládá se tedy z přímky P_1 a osy y—ové. Přímka P_1 jest tedy částí soustavy obalené a přece zároveň částí obálky. Chceme-li vyhledati, ve kterých bodech stýká se přímka ta s křivkami dané soustavy, řešme dle x a y rovnice

$$u_0 = 0 \text{ a } \varphi = 0.$$

Protože by však po dosazení v rovnicích obsažen byl spor, soudíme, že se přímka P_1 v konečnu nikde s křivkami soustavy obalené nestýká. — Obecný integrál lze snadno uvésti na tvar

$$\frac{(x-C)^2}{C^2} - \frac{(y-C)^2}{C^2} = 1,$$

z něhož plyne, že soustava skládá se ze samých rovnoramenných hyperbol, jejichž středy leží na přímce P_1, a jež svými vrcholy



Obr. 3.

dotýkají se osy y—ové (obr. 3.). Pro $C = 0$ hyperbola degeneruje v přímky P_1 a P_2 a přímka P_1 jest společnou asymptotou všech hyperbol a současně jejich obálkou.

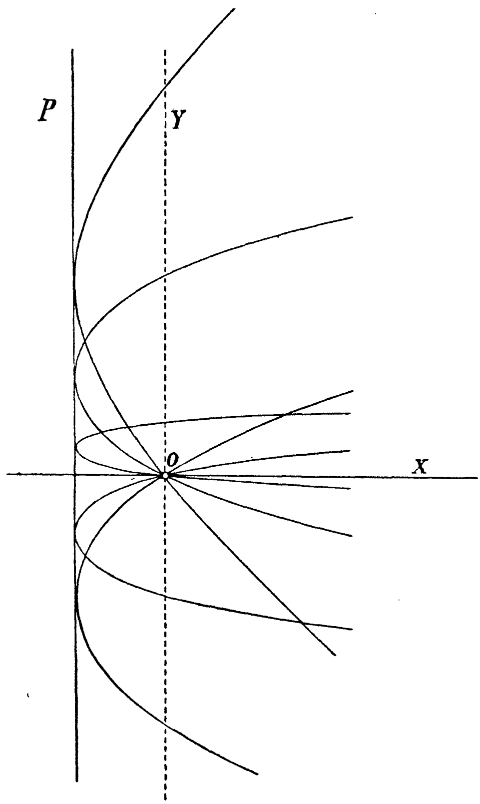
2. Obecný integrál nechť má tvar

$$xC^2 + 2Cy - y^2 = 0,$$

kdež patrně jest $u_0 \equiv x$ a $\varphi \equiv y$. Jiný tvar téhož integrálu jest

$$(y - C)^2 = C^2(x + 1),$$

z něhož poznáváme, že soustava skládá se z parabol, procházejících počátkem a dotýkajících se svými vrcholy přímky P, vedené rovnoběžně s osou y—ovou ve vzdálenosti — 1 (obr. 4.).



Obr. 4.

Druhá část obálky jest osa x—ová, a rovnici její $y = 0$ obdržíme též z obecného integrálu, položíme-li v něm $C = 0$. Protože přímky dané rovnicemi $x = 0$ a $y = 0$ se protínají, protínají také všechny paraboly osu x-ovou.

3. Má-li obecný integrál tvar

$$(\varphi K^2 - 1)\, C^2 + 4K\varphi C + 4\varphi = 0,$$

nerozpadá se ani obálka ani příslušná křivka soustavy obalené. Pro $C = 0$ plyne totiž rovnice jediné křivky $\varphi = 0$, a jakožto rovnice obálky vychází

$$16K^2\varphi^2 - 16\varphi\,(\varphi K^2 - 1) = 0$$

čili opět $\varphi = 0$. Tím se doplňuje tvrzení uvedené na str. 10., 2.

Rozšíření dosavadních výsledků.

Dosadíme-li do nalezeného obecného integrálu místo C výraz $D - \alpha$, obdržíme obecný integrál, který pro $D = \alpha$ podává partikulární integrál tvořící současně obálku. Jest však patrno, že požadavky svoje můžeme rozšířiti, tak aby tentýž obecný integrál pro některou jinou hodnotu libovolné konstanty dával opět jiný integrál partikulární, který by taktéž byl částí obálky atd.

Chceme tedy sestaviti obecný integrál, v němž jest C určeno dvojznačně a z něhož lze odvoditi části obálky:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

pro

$$C = \alpha_1, \quad C = \alpha_2, \ldots, \quad C = \alpha_n.$$

Tvar jeho jest ovšem dosti složitý. Integrál takový obdržíme totiž, jestliže do rovnice

$$u_0 C^2 + u_1 C + u_2 = 0$$

dosadíme

$$u_0 = P(x, y) \,.\, \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n + \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n}{\varphi_l} N_l$$

$$u_1 = -2\left[Q(x, y) \,.\, \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n + \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \frac{\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n}{\varphi_l} N_l\right]$$

$$u_2 = R(x, y) \,.\, \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n + \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 \frac{\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n}{\varphi_l} N_l,$$

kdež funkce P, Q, R, N_l smíme rozmanitě voliti vyjímaje $N_l = 0$.

Přesvědčme se ještě, že integrál takto sestavený všem stanoveným podmínkám vyhovuje.

I. Dosadíme-li na př. $C = \alpha_1$ do něho, má se ve výsledku vyskytnouti faktor φ_1. — Každá ze tří rovnic pro u_0, u_1 a u_2 obsahuje na pravé straně jenom jediný člen, v němž se φ_1 jakožto faktor nevyskytuje, a to:

v u_0 člen $\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n N_1$
„ u_1 „ $-2\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n N_1\alpha_1$
„ u_2 „ $\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n N_1\alpha_1^2$.

Násobíme-li však po dosazení tyto členy postupně hodnotami α_1^2, α_1, 1, zruší se navzájem, a tedy ve výsledku se φ_1 jakožto faktor oddělí.

II. Také v rovnici pro obálku oddělí se φ_1 jakožto faktor. Rovnice obálky jest

$$u_1^2 - 4u_0u_2 = 0.$$

Také však zde se zruší členy, které v sobě φ_1 neobsahují. Dosadíme-li totiž příslušné hodnoty, obdržíme

$$4\varphi_2^2\varphi_3^2\ldots\varphi_n^2N_1^2\alpha_1^2 - 4\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n N_1 \cdot \varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n N_1\alpha_1^2,$$

což se identicky annulluje.

Křivka $\varphi_1 = 0$ bude tedy partikulárním integrálem pro hodnotu $C = \alpha$, a zároveň bude částí obálky. Zcela podobně lze dokázati i o ostatních křivkách $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, že žádané vlastnosti skutečně mají.

Důkaz se však nezmění, opatříme-li v obecném integrálu činitele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ libovolnými mocniteli celými a kladnými, jestliže jen je stejně zvolíme u stejných funkcí N_i. Tím obdržíme všeobecnější podobu onoho integrálu. Ale i pak může se nevhodnou volbou funkcí P, Q, R, N_i státi, že vůbec možnost jakékoliv obálky přestane.