Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jaroslav Friedrich

K otázce orientování přímky v analytické geometrii

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 4, D156--D160

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109333`

K otázce orientování přímky v analytické geometrii.

Jaroslav Friedrich, Praha.

Téma tolikráte již projednané a přece, jak se zdá, ani pro půdu školskou dosud neuzavřené! A to ne snad co do rozsahu v používání, ale dokonce v jádru věci, ve způsobu, jak orientování prováděti! K této věcné stránce stůjž zde proto aspoň náčrtek rozboru — jako podnět k znovuuvážení věci!

Pro jedinou přímku v rovině je rozhodnutí jak o kladném smyslu, tak o stranách[1]) zásadně volné a není také věcnou nějakou vzájemností vázáno. Rovněž nerozhoduje p-orientace, t. j. orientace pro přímku p již provedená, o orientování dalších přímek q, r, . . ., nicméně k vůli soustavnosti v geometrii jejich celku, k vůli požadavku jednotnosti v metodě i výsledcích sáhne se zajisté aspoň k zásadě jednotné vzájemnosti mezi oběma kladnými směry. Tato může býti po případě i nějak formálně motivována (obdobou, případným vzhledem pro určité stanovisko pozorovatelovo a j.) Zůstalo by pak pro každou přímku ještě při volnosti jedné volby, čehož je třeba, aby se mohlo vyhověti podmínkám úlohy (na př. projednávání trojúhelníka orientovaného a pod.). Na tuto potřebu se často zapomíná.

Jde-li o řešení problému geometrií analytickou, přistupuje nová okolnost, totiž koexistence x-orientace. A tu nastává dvojí možnost: Buď se analytická geometrie postarala o to, aby svými prostředky mohla vyhověti provedenému již rozhodnutí o orientaci v daném útvaru, anebo si stanovila samostatně jisté interní zásady orientace bez ohledu na možné vnější potřeby, i jest pak ovšem otázkou, zda se orientace předepsaná, po případě povahou problému přímo žádaná, do tohoto analyticky systemisovaného rámce dá zasaditi. Možnost kolise je tu evidentní. Proto, co se týče onoho orientování analyticky založeného, jest žádati vystačitelnost ke všem (korektním) potřebám a dáti přednost způsobu, který poskytuje nezávislost na poloze sou-

[1]) Sama otázka vhodnosti těchto názvů zasluhovala by úvahy.

řadné soustavy. Kromě toho je požadavkem — ovšem samozřejmým, ale na tomto poli zvláštní péči vymáhajícím — důslednost jak v stanovení orientačních zásad, tak při jich používání.

Přihlédněme nyní k tomu, do jaké míry vyhovují vytčeným zde zásadám jednak způsob v našich učebnicích dosud běžný pro zavedení orientace na základě normální rovnice přímky, jednak návrh kolegy Vrány, podložený již učebnému postupu v metodické příručce kolegy dr. Simerského.[2])

I. Prvnímu lze právem vytýkati toto:

1. Nevystačí na obě alternativy orientace a nehoví tedy zásadě volnosti volby. — Tím totiž, že se úsečka vedená z počátku soustavy kolmo k přímce označuje pro kteroukoli polohu znaménkem jednotným (kladným), je rozhodnuto i o jednotnosti poloroviny obsahující počátek, i je také orientace všem přímkám jdoucím mimo počátek jednotně předurčena. Orientace odchylná není tedy tímto způsobem vyjádřitelna, leč pro přímky jdoucí počátkem, kterýžto případ s vytýkanou „neurčitostí" se obvykle posuzuje právě naopak jako nedostatek a proto slabá stránka této metody.[3])

2. Orientace závisí na volbě místa pro počátek soustavy. — Není tedy pevnou, s útvarem srostlou, nýbrž při transformaci se pro jistou síť přímek zvrátí. K jednomu účelu se však naopak dá této závislosti s prospěchem využíti. Vzhledem k závadě sub 1. lze totiž mnohdy aspoň přiměřenou volbou počátku docíliti toho, aby případ s hotovou již orientací byl analyticky tímto typem vyjádřitelný. Jindy ani této možnosti není (na př. pro trojúhelník záporně orientovaný).

3. Nemálo ruší nedůslednost v sledování kladného směru na normále zavedeného. — Způsob, že se zde udává vzdálenost bodu od přímky[4]) ve směru kolmice z bodu spuštěné, nesouhlasí

---

[2]) Fr. Vrána: Základní úlohy o přímce v analytické geometrii; Časopis **61** (1931/32), Příloha did.-met., str. D 1.

RNDr. Jaroslav Simerský: Jak učiti analytické geometrii na reálných gymnasiích; Praha, JČMF, 1936, ve Sbírce metodik pro střední školy.

[3]) Jestliže pro takovou přímku orientace jest již dána, resp. zvolena, je možno jednu i druhou její alternativu vystihnouti, neboť pro normální rovnici tohoto typu je α odchylkou normály z prostoru kladného vystupující. Jinak je právě zněním té rovnice jednoznačně určena.

[4]) Veličiny „vzdálenost přímky od bodu" a „vzdálenost bodu od přímky" směrově korektně a důsledně rozlišuje Vrána v cit. článku. Simerský dodržuje zásadu „od přímky" i pro případ kolmé úsečky d z počátku na přímku spuštěné, ačkoli tato délka má pro různé přímky roviny vzhledem k počátku obdobnou určující funkci jako na př. pořadnice y pro různé body roviny vzhledem k ose x jako východisku měření a měla by tedy býti obdobně měřena od počátku. Záměna ta nezůstává bez následků; vede totiž pro vzdálenost dvou rovnoběžek p, q ke vzorci od obvyklého pravidla odchylnému $\overline{PQ} = d_p - d_q$.

totiž s oním základním, který je zaveden v soustavě souřadnic. Tím se stalo, že poloroviny obdržely znaménko obrácené, že kladný polopaprsek normály je osou poloroviny záporné a že k výpočtu takto orientovaných vzdáleností bodů od přímek je třeba onoho činitele — 1.

II. Způsob druhý volí si kladně stranu „nad“ přímkou, smysl pak je určován nikoli podle pevné vzájemnosti smyslu a strany, nýbrž podle zásady „vzhůru“.[5]) Odtud již shledáváme po uvažovaných stránkách následující:

a) Orientace je rovněž predestinována, což má v zápětí tytéž následky jako u způsobu předcházejícího. — Předpis pro stranu selhává zde pro přímky rovnoběžné s osou y-ovou. Jen pro tyto zůstává tedy volnost obojí alternativy, oba autoři však určují kladnost i zde pevně (směrem kladné osy x-ové), nepočítajíce s eventuální potřebou orientace protivné. Zásadu smyslu „vzhůru“ sledují pak důsledně i v tom, že podle ní přisuzují znaménko i jednotlivé délce (vzájemné vzdálenosti dvou bodů), ač teprve koexistence dvou neb několika úseček rovnoběžných, resp. o dvou směrech vzájemně kolmých zavedení relativnosti požaduje, kdežto naopak orientace předurčená může vésti k rozporu, resp. k nutnosti od zavedeného znaménkového pravidla upustiti (na př. pro délku lomené linie, obvod trojúhelníka, planimetrický[6]) výpočet obsahu trojúhelníka).

b) Orientace je rovněž závislá na poloze soustavy souřadné, tentokráte však na směru osy y-ové. — Následky jsou ovšem tytéž jako u způsobu Hesseova.

c) Tento způsob orientování nevyhovuje ve všem požadavku jednotnosti. — Způsob Hesseův obsahuje jednotnou vzájemnost smyslu a strany, odchylka α se mění spojitě od 0° do 360°, i vy-

[5]) Termíny užívané oběma autory jako definiční pro popis této orientace jsou vzhledem k možné různosti v poloze osy y-ové neudržitelné. R. v. Lilienthal, jenž první snad na tento způsob orientování upozornil článkem „Note zur Hesseschen Normalform der Gleichung einer Ebene“ (Math. Annalen **42** (1893), 497), vyjadřuje základní myšlenku pro stanovení smyslu na přímce v prostoru takto: Části, ve které je přímka rozdělena bodem P_0, považujme za kladnou a zápornou podle toho, jakého znaménka jest první nemizící rozdíl $z - z_0$, $y - y_0$, $x - x_0$. Téže zásady pak užívá i pro kladný smysl normály k rovině (první nemizící směrový kosinus z pořadí $\cos c$, $\cos b$, $\cos a$ má býti kladný), čímž je rozhodnuto o straně roviny.

Jednodušší a názornější byla by formulace využívající kinematické představy o kladném smyslu „orientující“ osy: Přechodu z prostoru před útvarem do prostoru za útvarem k rozlišení stran, vzrůstu pak stejnojmenné souřadnice k stanovení kladného smyslu přímky.

[6]) Je sice správné, že Vrána odsuzuje (na str. D 2 cit. článku) počítati v anal. geometrii obsah trojúhelníka z pouček planimetrických, ale to ještě neznamená, že by se mohlo pro eventuální aplikaci této metody nedbati rozporu.

značuje se proto jednotností v metodě i výsledcích. V tomto systému oněch podmínek jednotnosti není. Tam na př. lze vysloviti obecně platnou větu, že se osa úhlu, jejž tvoří kladné polopaprsky, obdrží součtem normálních rovnic, zde je nutno teprve podle znaménka směrnic rozhodnouti, zda jest sčítati či odčítati. Podobná dvojakost jest pro dělicí poměr ve svazku paprsků. Anebo: Na stanovení odchylky dvou přímek orientovaných metoda tato samotným počtem podle obecné zásady — tedy bez obrazce, resp. bez představy získané o situaci posouzením směrnic — nevystačí (nedostatkem je tu omezení na $\alpha < 180°$).

III. Po seznání nedostatků a závad není nesnadno vyhledati způsob plně vyhovující.

α) Aby bylo možno pro touž polohu přímky vyjádřiti obojí možnou orientaci co do stran, je třeba orientovati normálu důsledně *podle bočné orientace přímky* — nejvhodněji směrem do prostoru kladného — a nikoli tedy směrem od počátku. Tím právě je zároveň také vyloučena závislost na poloze počátku soustavy. Početně jsou oba případy rozlišeny *různou hodnotou odchylky* α, jež se měří ovšem od kladné poloosy x-ové důsledně kladnou rotací ke kladnému polopaprsku normály n (od $0°$ do $360°$).

β) Aby bylo možno k téže orientované normále vystihnouti rovnicí všechny přímky k ní kolmé, je třeba do počtu zavésti jejich *vzdálenost od počátku* (n_0), ovšem s příslušným znaménkem podle orientace pro normálu již zavedené.

Za těchto definic má normální rovnice přímky tvar

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - n_0 = 0,$$

a substituce souřadnic libovolného bodu ležícího mimo přímku do jejího trojčlenu podává jeho vzdálenost *od přímky* bezprostředně s patřičným znaménkem.

γ) Kladný smysl přímky samotné zde prozatím nepřicházel v úvahu, i mohlo by vlastně býti o něm rozhodnuto libovolně. Ale zvláště na půdě analytické geometrie je k vůli jednotnosti[7]) a, aby se čelilo eventuálním kolisím, záhodno stanoviti *vzájemnost smyslu a strany pevně*. Výběru není, neboť znění rovnice jest implicite již výrazem fakta, že $\widehat{xy} = +90°$, i musí tudíž býti i $\widehat{pn} = +90°$. Požadavek jednotnosti vede tudíž k jednotnému vztahu $\alpha = \varphi + R$ čili $\varphi = \alpha + 3R$[8]).

[7]) Jednotnost přináší pravidelně také tu výhodu, že nejsme při aplikacích vázáni na určité zvláštní pořadí, jako tomu jest na př. při stanovení úhlů trojúhelníka metodou Vránovou (str. D 38).

[8]) Kdyby šlo o to, aby také smysl přímky byl vystižen kvantitativním výrazem analytickým, bylo by nutno přibrati rovnici

$$p = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

Způsob zde sestavený není neznámý a je dlouho již v užívání, nicméně v učebnicích velmi hojně dosud se vyskytuje jednostranný původní způsob Hesseův přes některé své nedostatky. Jsou toho příčinou mimo jiné zajisté i dobré důvody didaktické. Dotknu se zde, aby nebylo snad nedorozumění stran poměru této úvahy k vyučování, pouze jednoho momentu, jenž jest v souvislosti se zaujatým zde stanoviskem a užitým postupem. Byl tu proveden rozbor dvou metod, a shledané nedostatky přímo ukazovaly cestu řešení: Hledati k orientaci dané, resp. zvolené vyhovující analytický její výraz. Ve škole však je situace jiná. Dosud aspoň vlastnost orientovanosti nebyla pojata do začátků kapitoly o přímce, nýbrž byla teprve poznáním význačné vlastnosti normální rovnice do učebného pásma vnesena. A tu nelze neuznati, že pro účel pouhého odvození normální rovnice byla volba Hesseova, odpovídajíc i volbě souřadnic polárních, na první pohled zcela případná, a že naopak zřetel k nějaké orientaci dané by býval čímsi neorganicky jako přítěž navěšeným. — Je z toho vidno, že úplné didaktické vyřešení tohoto tématu, čítajíc v to i aplikování tohoto obsažnějšího typu normální rovnice na známé základní případy, poskytne učitelům hojně ještě úkolů.

Matematika a studium speciální mapy.

Václav Skalický, Pardubice.

Úvod. Základním požadavkem správné výchovy jest, aby se veškeré vyučování opíralo o žákův zájem. To vede k volbě takových metod a prostředků, které použity při zpracování předepsané látky vedou k co největší samočinnosti žákově, které budují na jeho vlastních zkušenostech, a jež dávají v něm vznikati pocitu užitečnosti vědeckých metod a nutnosti hledati nejúčelnější z nich. Proto jest nutno, aby vyučování matematické vycházelo, pokud je možno, z praktických problémů. Žák musí být přesvědčen o praktické ceně matematiky, ba přímo o její nutnosti; nesmí ji považovati za pouhou gymnastiku logického usuzování. Napřed byl praktický problém, pak jeho řešení, a teprve později abstraktní věda.

Není ovšem možno sáhnouti namátkou mezi spoustu praktických problémů matematické povahy a voliti celkem bez něja-

---

jež vyplývá z n-orientace zcela obdobně jako

$$n = x \cos \alpha + y \sin \alpha - n,$$

z p-orientace. Tento pár rovnic představuje, jak patrno, transformaci ze soustavy (x, y) do soustavy (p, n).