Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Příspěvky k deskriptivní geometrii Eudoxovy hypopédy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 4, 217--225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109342

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1936

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Příspěvky k deskriptivní geometrii Eudoxovy hypopédy.

L. Seifert, Brno.

(Došlo dne 29. srpna 1935.)

Obsah: Plochy druhého stupně jdoucí hypopédou, jejich ohniska. Průmět hypopédy z jejího obecného bodu, z jejího vrcholu, z bodu na površce válce jdoucí dvojným bodem. Průmět rovnoběžný s obecnou přímkou kuželu. Průmět z bodu na kuželu neb na válci. Poznámky o křivosti průmětů.

Hypopéda je průsek koule s rotačním válcem, který se jí dotýká v jednom bodě. Byla studována již ve starověku. Eudoxovou sluje podle autora astronomického systému, ve kterém právě hypopédy hrají důležitou úlohu. Křivka zvaná Vivianovo okno je její zvláštní případ. Nejdůležitější vlastnosti najde čtenář v dílech: Teixeira, Courbes spéciales remarquables, str. 324, Loria, Curve sghembe speciali, str. 199. Mnoho zajímavých konstruktivních detailů se najde ve spise M. Lerch, O dvou plochách stupně čtvrtého (Rozpravy II. třídy České akademie 22 (1913), č. 36, 141 stran). Časem při různých příležitostech a cvičeních se svými žáky přišel jsem na jiné vlastnosti a konstruktivní detaily, jež zde uveřejňuji. Pro stručnost jsem pokud možno zkrátil výpočty často dosti dlouhé, ač docela elementární a uveřejňuji jen věty, jež v citovaných a snadno přístupných pramenech nejsou. Chybějící obrázky si čtenář snadno sám doplní.

1. Hypopéda jest dána parametricky rovnicemi

$$x = a \cos 2\varphi, \ y = a \sin 2\varphi, \ z = 2b \sin \varphi; \tag{1}$$

jeví se jako průsek rotačního válce s koulí

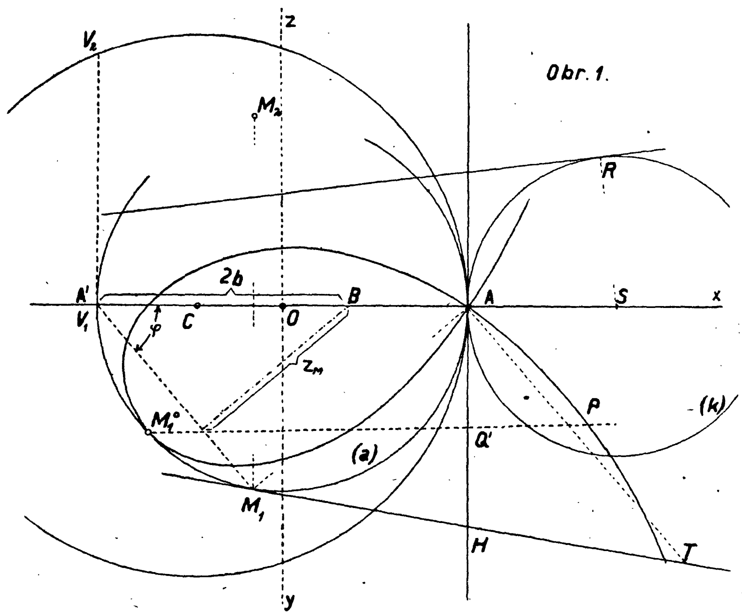
$$x^2 + y^2 = a^2, \ x^2 + y^2 + z^2 + 2 \frac{b^2}{a} x = a^2 + 2b^2. \tag{2}$$

V obr. 1 jest O střed kruhu (a), podstavy válce, $C\left(-\frac{b^2}{a}, 0, 0\right)$ jest střed koule, $A(a, 0, 0)$ dotyčný bod obou ploch. Tento jest dvojný hypopédy a zároveň středem rotačního kuželu

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} z^2, \tag{2a}$$

jenž hypopédou prochází. Jí prochází i parabolický válec

$$z^2 + 2\frac{b^2}{a}(x-a) = 0. \tag{2b}$$



Svazek ploch druhého stupně jdoucích hypopédou jest

$$(x^2 + y^2 - a^2) + \lambda\left[z^2 + \frac{2b^2}{a}(x-a)\right] = 0 \tag{3}$$

a sestává vesměs z rotačních ploch, s výjimkou plochy (2b). Stopy těchto ploch tvoří svazek kružnic s dotykem v A (obr. 1). Buď k jedna z nich se středem S, jenž je zároveň středem kvadriky. Tečna kružnice k je průmětem dvou přímek kvadriky a zároveň bisekant hypopédy, dotyčný bod R jest jejich stopa. Z toho je zřejmo, že k je stopou hyperboloidu, kdežto každý kruh svazku, jenž uzavírá kruh (a), je stopou elipsoidu. Abychom k danému φ našli snadno první a druhý průmět, učiňme v obr. 1 $A'B = 2b$, $\sphericalangle BA'M_1 = \varphi$. Vzdálenost $A'M_1$ od B jest z_M. Stopa T tečny hypopédy v bodě M jest průsečík tečny M_1T ke kruhu (a) s kolmicí AT ku AM_1 (AT je stopa tečné roviny kuželu 2a). Trojúhelník AHT je rovnoramenný a $HT = HA$. Bod T opisuje cissoidu Diokletovu.

Ohniska plochy (3) ležící mimo rovinu (xy) mají souřadnice

$$\xi = -\lambda\frac{b^2}{a}, \quad \zeta = \left(a + \lambda\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$$

a jejich geom. místo je kubika

$$[\zeta^2 + (\xi - a)^2]\,\xi + \frac{b^2}{a}(\xi - a)^2 = 0 \tag{4}$$

či v polárních souřadnicích s pólem A a osou AO

$$r = \frac{a}{\cos\omega} + \frac{b^2}{a}\cos\omega. \tag{4a}$$

Ohniska jsou reálná při $-\frac{b^2}{a} \leqq \xi$, t. j., je-li střed kvadriky v intervalu CO. Máme pak na (4) dvojiny bodů takové, že součet vzdáleností od bodů hypopédy je konstantní.

2. Průmět hypopédy (1) z jejího obecného bodu $M^0(\varphi_0)$ do roviny $z = 0$ je *strofoida*. Snadným výpočtem dostaneme nejprve rovnici v pravoúhlé a pak v polární soustavě s pólem A a osou Ax

$$r = 2a\sin\varphi_0\frac{\sin(2\omega - \varphi_0)}{\cos\omega};$$

$M_1{}^0$ je základní bod, Ay řídicí přímka, $AQ' = Q'P$ (obr. 1).

Z jiných průmětů křivky z jejího bodu zaslouží zmínky průmět z vrcholu křivky $V(-a, 0, 2b)$, jenž odpovídá hodnotě $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, na rovinu (yz). Jest to

$$by^2z + a^2z^2 - b^2y^2 = 0;$$

Longchamps ji nazývá *cubique mixte.*[1])

Projekce z bodu na kouli mimo křivku (stereografická) dává bicirkulární křivku, jež má dvě analagmacie. Řídicí kruhy jsou průměty kruhu $z = 0$ a hlavního kruhu, který obsahuje osu válce. Tato metoda je v teorii bicirkulárních křivek dobře známa.

3. Buď $S(a, 0, c)$ bod na površce válce, jež jde dvojným bodem A. Přímka, která spojuje S s bodem M hypopédy má na $z = 0$ stopu

$$x = a - \frac{2ac\sin^2\varphi}{c - 2b\sin\varphi}, \quad y = \frac{2ac\sin\varphi\cos\varphi}{c - 2b\sin\varphi};$$

vezmeme-li A za pól, Ax za osu, má tento bod polární souřadnice r

---

[1]) Teixeira, Courbes spéciales remarquables, sv. 1, str. 118.

a $\omega = \frac{1}{2}\pi + \varphi$,

$$r = \frac{2ac \sin \varphi}{c - 2b \sin \varphi} = -\frac{ac}{b} + \frac{\frac{ac}{b}}{1 + \frac{2b}{c} \cos \omega}. \tag{5}$$

Vidíme tedy, že *průmět hypopédy z bodu S jest ohnisková konchoida kuželosečky, při čemž délka, o niž se průvodič kuželosečky zmenšuje, jest rovna parametru.*

Vyjdeme-li od této konchoidy

$$r = -p + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega},$$

vidíme, že ji lze považovati za průmět hypopédy, při čem $a = \frac{1}{2}\varepsilon p$. Na průvodiči bodem A jsou body $M(\omega)$, $M'(\pi + \omega)$ a bod M_0 kružnice (a). Výpočtem nebo promítáním zjistíme ihned, že body A, M_0, M, M' tvoří harmonickou čtveřinu a tečny bodů M, M' s tečnou kruhu v bodě M_0 se sekou v bodě T_0.

Kartesiova rovnice křivky (5) zní pro počátek A

$$(x^2 + y^2 + \varepsilon p x)^2 = \varepsilon^2 x^2 (x^2 + y^2); \tag{5a}$$

utvoříme-li inversní křivku pro pól A a mocnost g^2 a píšeme-li pak $a_0 = -\frac{g^2}{\varepsilon p}$, $b_0 = \varepsilon a_0$, dostaneme

$$r = \frac{b_0 x}{x - a_0}$$

a poznáváme, že *průmět* (5) *jest křivka inversní s Nikomedovou konchoidou.*[2])

Nechť střed promítání $S(x_0, y_0, z_0)$ je na přímce kuželu v rovině $y = 0$. Pak

$$y_0 = 0, \; x_0 = \frac{a}{b}(b - z_0);$$

pro průmět bodu M do $z = 0$ dostaneme

$$x = a \frac{z_0 \cos 2\varphi + 2(z_0 - b) \sin \varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi}, \quad y = a z_0 \frac{\sin 2\varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi},$$

nebo, vezmeme-li za počátek bod $A(x = a + \xi, y = \eta)$,

$$\xi = 2 a z_0 \frac{\sin \varphi - \sin^2 \varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi}, \quad \eta = a z_0 \frac{\sin 2\varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi};$$

---

[2]) Teixeira, l. c., sv. 1, str. 259.

křivka má trojnásobný bod A s tečnami $\xi = 0$, $\eta = \pm \xi$, pro $z_0 > 2b$ je uzavřená a podobá se trifoliu,[3]) na něž se redukuje při $z_0 = \infty$, t. j. při rovnoběžném promítání.

4. Poslední poznámka vnucuje otázku, jaký je průmět hypopédy, promítáme-li rovnoběžně s obecnou přímkou kuželu. Buď D bod φ_0 hypopédy, kosiny směrné přímky AD jsou úměrné k

$$-a \sin \varphi_0, \; a \cos \varphi_0, \; b,$$

stopa přímky bodem $M(\varphi)$ rovnoběžné s AD jest (počátek A)

$$\xi = 2a \sin \varphi(\sin \varphi_0 - \sin \varphi), \; \eta = 2a \sin \varphi(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Píšeme-li

$$\xi = 4a \sin \varphi \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi),$$

$$\eta = 4a \sin \varphi \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi) \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi),$$

vidíme, že rovnoběžný průmět pro pól A a osu Ax lze psáti

$$r = 4a \sin (2\Theta - \varphi_0) \sin (\varphi_0 - \Theta) \quad [\Theta = \tfrac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi)]. \tag{6}$$

Tato rovnice ukazuje, že *rovnoběžný průmět je trifolium* a obráceně, *každé trifolium lze považovati za rovnoběžný průmět hypopédy* (b je libovolné).

Označme $M_1(x, y)$, $M_0(\xi, \eta)$ horizontální a šikmý průmět (směr AD) téhož bodu φ při počátku A. Snadno najdeme

$$(\xi + i\eta) - (x + iy) = -2ai \sin \varphi e^{i\varphi_0},$$

z čehož jde, že vektor M_1M_0 rovná se délkou vektoru AM_1 a to je Brocardova konstrukce křivky.[4]) Tečny hypopédy ve dvojném bodě se promítnou do

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \quad \frac{\eta}{\xi} = -\operatorname{cotg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

Vezmeme-li opět O za počátek souřadnic, jest rovnice šikmého průmětu

$$x = a \cos 2\varphi + 2a \sin \varphi_0 \sin \varphi, \; y = a \sin 2\varphi - 2a \cos \varphi_0 \sin \varphi. \tag{6a}$$

Vzorce pro střed křivosti dostaneme snadno, napíšeme-li rovnici normály a její derivaci. Pak pro $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ dostaneme středy křivosti oněch větví trojného bodu, které povstanou z dvojného bodu hypopédy

$$x_1 = 2a \cos \varphi_0 - a, \; x_2 = -2a \cos \varphi_0 - a.$$

[3]) Teixeira, l. c., sv. 1, str. 302.

[4]) Teixeira, sv. 1, str. 303.

Třetí větev, do níž se zobrazují body v blízkosti φ_0 (bod D) má střed křivosti

$$x_3 = 2a - a \cos 2\varphi_0, \quad y_3 = - a \sin 2\varphi_0.$$

Dvě dvojné tečny (obrys válce) se dotýkají kruhu (a) a jsou rovnoběžné s AD_1, třetí je rovnoběžná s Ay (obrys parabolického válce) a dotýká se v bodech daných rovnicí $\sin \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi_0$ (pro něž vymizí koeficient při x v rovnici normály).

Z okolnosti, že trifolium je projekcí hypopédy, plyne konstrukce tečny. Buď M^0 bod trifolia, M_1 příslušný bod řídicího kruhu (a), T bod na tečně vyznačený v odstavci (1). M_0T je hledaná tečna. Bodem T jde také tečna bodu M' na téže rovnoběžce s AD_1. Na křivce máme tedy kvadratickou involuci dvojin M^0M'; tečny v bodech dvojiny se sbíhají v bodě T, jenž opisuje cisoidu, paprsky vedené z trojného bodu k bodům téže dvojiny jsou k sobě kolmé.

5. Volme za střed promítání libovolný bod S kužele. Pro počátek A hoví jeho souřadnice rovnicím

$$\frac{x_0}{-a \sin \varphi_0} = \frac{y_0}{a \cos \varphi_0} = \frac{z_0}{b},$$

takže, položíme-li $\alpha = \dfrac{2b}{z_0}$, jest

$$\alpha x_0 = - 2a \sin \varphi_0, \quad \alpha y_0 = 2a \cos \varphi_0,$$

kde φ_0 je parametr bodu hypopédy na hraně AS. Pro centrální průmět bodu φ máme

$$\xi = 2a \sin \varphi \, \frac{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}{1 - \alpha \sin \varphi}, \quad \eta = 2a \sin \varphi \, \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{1 - \alpha \sin \varphi}. \tag{7}$$

Pro polární souřadnice s pólem A a amplitudou $\Theta = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$ dostaneme

$$r = - \frac{4a}{\alpha} \sin (\varphi_0 - \Theta) + \frac{4a}{\alpha} \cdot \frac{\sin (\varphi_0 - \Theta)}{1 - \alpha \sin (2\Theta - \varphi_0)}. \tag{7a}$$

Jeví se tedy uvažovaná centrální projekce jako *cisoidála*[5]) kruhu o poloměru $\dfrac{2a}{\alpha} = AS_1$ a kuželosečky, která jde pólem A jako kruh a má AS_1 za normálu. Společná sečna kuželosečky a kruhu jeví se z A pod pravým úhlem; střed kruhu je tedy Frégierův bod kuželosečky odpovídající bodu A.[6])

---

[5]) Cisoidálou zoveme křivku, jež vzniká odčítáním vektorů dvou křivek. Viz na př. též Wieleitner, Spezielle eb. Kurven.

[6]) T. j. střed involuce vyťaté na kuželosečce involucí pravoúhlou.

Jedna tečna trojného bodu jest $\Theta = \varphi_0$, kolmá ku S_1A, ostatní dvě půlí úhly této tečny s Ax.

Čtyři dvojné tečny s body dotyku dostaneme snadno pomocí tečen ke kruhu (a) z S_1 (obrys válce) a tečen z S_2 k druhému průmětu hypopédy. Právě tak vidíme, že průseky s kružnicemi, jež jdou bodem A a mají středy na AS_1, se najdou přímo. Rovnice kruhu je skutečně $r = 2g \sin(\varphi_0 - \Theta)$ a z toho jde

$$(\alpha g + 2a) \sin(2\Theta - \varphi_0) = g.$$

Kruh se dotkne křivky, když poslední sinus je roven ± 1; máme tedy pro dotyčné kruhy

$$\alpha g + 2a = \pm g, \quad \text{t. j.} \quad g = \frac{2a}{\alpha \mp 1}.$$

Chceme-li získati křivost uvažované křivky v jistém bodě, můžeme užíti průsečné elipsy oskulační roviny křivky s rotačním válcem, neboť elipsa má v bodě φ tutéž křivost jako hypopéda. Oskulační rovina má rovnici (počátek O)

$$x(3\sin\varphi + \sin 3\varphi) - y(3\cos\varphi + \cos 3\varphi) + \frac{4a}{b} z = 6a \sin\varphi;$$

horizontální stopa jde bodem o polárních souřadnicích 2φ, $-3a$; naneseme tedy od M_1 na M_1O dvojnásobný průměr $4a$ a spojíme koncový bod s T. To je první stopa oskulač. roviny; druhou dostaneme pomocí bodu $(0, 0, \frac{3}{4}z)$ *na* Oz.

6. Předpokládejme, že střed promítání jest bod $S(x_0, y_0, z_0)$ na rotačním válci ($x_0 = a\cos 2\varphi_0$, $y_0 = a \sin 2\varphi_0$). Pro průmět do $z = 0$ dostaneme

$$x - x_0 = -\frac{2a\sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha\sin\varphi}\sin(\varphi + \varphi_0),$$

$$y - y_0 = \frac{2a\sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha\sin\varphi}\cos(\varphi + \varphi_0),$$

kde $\alpha = \frac{2b}{z_0}$. Učiníme-li počátkem $S_1(x_0, y_0)$, $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$, jest

$$\xi + i\eta = ire^{i(\varphi + \varphi_0)}, \text{ kde } r = \frac{2a\sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha\sin\varphi}.$$

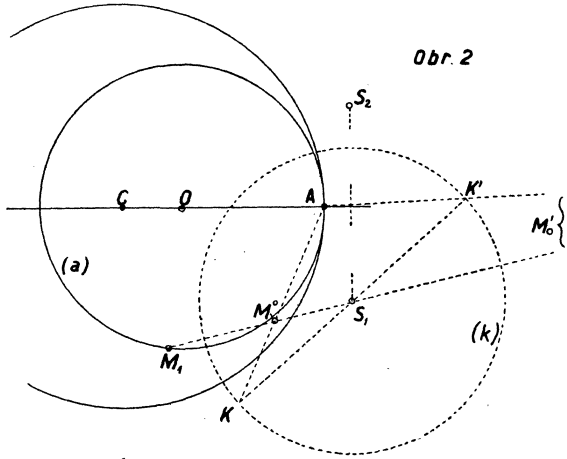
Poslední rovnice je polární rovnice průmětu k ose AS_1 a počátku S_1. Vezmeme-li tuto přímku za osu úseček v nové soustavě a položíme $x \sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0 = L$, dostaneme

$$(x^2 + y^2 + 2aL)^2 = \alpha^2 y^2 (x^2 + y^2). \tag{8}$$

Pro $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, t. j. střed na přímce $x_0 = a$, $y_0 = 0$ dostaneme *capricornu* Ponceletovu, jež se vyskytuje také v deskriptivní geometrii šroubových ploch.[7]) Změníme-li směr osy a počátek dáme do $A'(-a, 0)$, jest její rovnice

$$r = \frac{2a \cos \varphi}{1 - \alpha \sin \varphi}.$$

7. Pro skutečné narýsování středového průmětu z bodu S položeného mimo přímku Az jest nejlépe považovati křivku za průsek válce (a) s rotačním kuželem (2a). Buď pak k (v obr. 2)



Obr. 2

stopa kuželu s vrcholem S rovnoběžného s (2a), M_1 bod na kružnici (a). Je-li KK' průměr rovnoběžný s AM_1, jsou AK, AK' průměty površek kuželu, S_1M_1 průmět površky válce v rovině (M_1Az) a průsečíky M_0, M'_0 jsou dva body uvažovaného středového průmětu.

*

Remarques à la géometrie descriptive de l'hyppopède.

(Extrait de l'article précédent.)

Par l'hyppopède (1) passe un faisceau de quadriques (3) toutes de révolution, sauf une; les foyers de ces quadriques sont sur une cubique (4). La projection centrale de l'hyppopède prise d'un point de cette courbe, dans le plan $z = 0$, est une strophoide, la

[7]) Teixeira, sv. 2, str. 319, 320 a 388.

projection prise du sommet comme centre sur le plan $x = 0$, est une cubique mixte. La perspective sur le plan $z = 0$ prise d'un centre situé sur la droite Az est une conchoïde focale de conique (5). La projection oblique parallèle à une génératrice du cône est un trifolium (6). La projection centrale prise d'un point du cône est une quartique pouvant s'obtenir comme la cissoidale d'une conique et d'un cercle tangent (7). La projection d'un point du cylindre est une quartique (8) dont le cas spécial est la capricornne de Poncelet. Remarques concernant la courbure des diverses projections.