Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

H. Durrande

O upotřebení determinantů v theorii momentů sil

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 5, 229--232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109401

O upotřebení determinantů v theorii momentů sil.

Sepsal

H. Durrande, přeložil K. Zahradník. *)

1. Není známo, **) zdaliž někdo spozoroval překvapující obdobnost mezi větami dobře známými, vztahujícími se k momentům sil, a mezi nejprvnějšími vlastnostmi determinantů. Mohlo by se říci, že determinanty druhého a třetího stupně jsou analytické obrazy momentů síly vzhledem k jednomu bodu a k jedné ose.

Vidíme ku příkladu bezprostředně, že stojí-li pozorovatel dle osy Z, osa X jemu jest na levo, osa pak Y na pravo, moment síly (XY) v rovině XY vzhledem ku počátku, procházející bodem (x, y) této roviny, vyjádřen jest i co do velikosti i co do znaménka determinantem druhého stupně

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

v kterém můžeme X, Y považovati za souřadnice jednoho bodu; neb tento determinant jest analytický obraz rovnoběžníku, majícího za základnici sílu a za výšku její vzdálenost od počátku, což nic jiného není než moment.

2. Béřeme-li v úvahu více sil ležících v rovině XY a sbíhajících se v bodu (x, y), obdržíme za součet jejich momentů vzhledem k počátku, pomocí známé poučky determinantní ***) následující výraz:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ X' & Y' \end{vmatrix} + \ldots = \begin{vmatrix} x & y \\ \Sigma X & \Sigma Y \end{vmatrix}.$$

Jest pak síla $(\Sigma X, \Sigma Y)$ výslednice daných sil a z toho vyvozujeme základní theorem o momentech vztahujících se

*) Uveřejněno v „Nouvelles annales de mathematiques“, sešit červnový 1873.

**) Již *Lagrange* a po něm *Moth* poukazovali k této důležitosti kombinatorických výrazů, jež nyní slují determinanty. Srovnej *A. L. Cauchy* als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literar-historische Studie von F. J. Studnička, 1876. Ostatně jsem již r. 1870 ve svých přednáškách o mechanice analytické podobným spůsobem užíval determinantů. *Std.*

***) *Studnička* „O determinantech“ pag. 25.

k témuž bodu, že totiž součet momentu složek se rovná momentu výslednice.

3. Podobně možná vyložiti, že moment síly (XYZ), vztažený na osu procházející počátkem směru (λ, μ, ν), jest i co do velikosti i co do znamení

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \end{vmatrix},$$

kde (x, y, z) značí ještě souřadnice bodu libovolného, ležícího ve směru síly.

Tento způsob vyjádření sil dosti přirozeně se nám jeví, vzpomeneme-li si, že determinant stupně druhého může se považovati za plochu obdélníka neb za dvojnásobnou trojúhelníka a determinant třetího stupně za obsah rovnoběžnostěnu neb za šestinásobný obsah tetraëdru. Jako moment síly vzhledem k bodu jednomu se rovná ploše obdélníka, tak moment vztažený k ose, procházející počátkem, rovná se šestinásobnému obsahu tetraêdru, jehož vrchol je v počátku a jehož tři strany procházejí počátkem; jednotka délek nanešena od počátku na osu momentů, dále vzdálenost počátku od bodu (x, y, z) a konečně přímka rovná a vedená počátkem rovnoběžně k síle dané.

Nepouštěje se do podrobností, jež si čtenář učiní sám podlé těchto poznámek, chci pouze na jediném upotřebení ukázati, jakou snadností jisté poučky o momentech se vyvádějí z transformac, bezprostředně provedených na determinantech, které je představují.

4. Máme-li dvě síly libovolné $\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, utvořme si součet jejich momentů vzhledem k výslednici, dvou stejných a rovnoběžných sil, vedených bodem libovolným co počátkem, t. j. vzhledem jejich výslednici postupové; za součet těchto momentů obdržíme, podotkneme-li, že cosinusy úhlů, které určují směr výslednice, jsou

$$\frac{\Sigma X}{R}, \frac{\Sigma Y}{R}, \frac{\Sigma Z}{R},$$

$$\frac{1}{R}\left\{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ X & Y & Z \\ \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ X & Y & Z \\ \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \end{vmatrix}\right\}.$$

Rozvedeme-li součet ΣX a rozložíme-li každý determinant v částečné determinanty, zbude, potlačíme-li ty, které se rovnají nulle, co výsledek redukce výraz

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x-x', & y-y', & z-z' \\ X\ , & Y\ , & Z \\ X'\ , & Y'\ , & Z' \end{vmatrix}.$$

Tento determinant nám ale vyjadřuje šestinásobný obsah tetraëdru, majícího za hrany protilehlé dané dvě síly (XYZ), $(X'Y'Z')$, z čehož jde, že

součet momentů dvou sil libovolných, vztažených k ose rovnoběžné k jejich výslednici postupové, jest nezávislý na poloze této osy a rovná se šestinásobnému obsahu tetraëdru, majícího tyto síly za hrany protilehlé, dělenému velikostí jejich výslednice.

5. Tento theorém rozšíří se pak snadno způsobem následujícím:

Máme-li skupinu n sil, působících na pevné těleso, totiž

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' & Y' & Z' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X'' & Y'' & Z'' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}, \ldots,$$

bude součet jejich momentů vzhledem k jejich výslednici postupové

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \\ \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \end{vmatrix};$$

a počítáme-li právě tak, jako při dvou silách, vyjde

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x-x', & y-y', & z-z' \\ X, & Y, & Z, \\ X', & Y', & Z' \end{vmatrix},$$

což znamená, že

součet momentů n sil působících na těleso pevné, vzhledem k ose rovnoběžné k jejich výslednici postupové, jest nezávislý na poloze této osy a rovná se šestinásobnému obsahu těch $\frac{n(n-1)}{2}$ *tetraëdrů, sestrojených ze sil po dvou vzatých*) za protilehlé strany a dělených velikostí jejich výslednice.*

*) Tetraëder jest úplně určen dvěma protilehlými stranami, danými i co do velikosti i co do polohy.

Uvážíme-li, že substituce skupení sil místo jiného skupení rovnomocného nikterak nemění součet jejich momentů, poněvadž toto vyjde na zavedení sil, jejichž momenty vzhledem k ose libovolné jsou rovné a znamení opačného, obdržíme následující větu:

Ať převádíme soustavu n sil jakkoliv na dvě výslednice, vždy bude obsah tetraëdru sestrojený z těchto posledních (výslednic), vzatých za protilehlé hrany, stálý a bude se rovnati součtu obsahu $\frac{n(n-1)}{2}$ tetraëdrů sestrojených ze sil po dvou vzatých za hrany protilehlé.

Tyto theoremy, pocházející dle mého mínění od p. Chaslesa, jsou dobře známy, ale nevím, zdaliž komu napadlo dokázati je předcházejícími úvahami tak jednoduchými.

Kterak lze neviditelné světlo slunečního vidma učiniti zjevným?

O světle zafialovém jest to známo, avšak utajené červené světlo na začátku vidma bylo, jak mi dosud povědomo, toliko svými účinky tepla pozorováno.

Z příčiny té dovoluju si zde učiniti zmínku o malém pokusu, který již lonského roku v ohledu tom jsem prováděl a tímto spůsobem ono *světlo spatřil.* Pozoroval jsem totiž, ač za jiným účelem, sluneční vidmo, promítnuté na bílou stěnu, v prostoru zatemněném skrze známý Wildův *erythroskop* a shledal při této příležitosti najisto, že červená barva vidma i na onu část jeho polohy se rozšířila, která oku neozbrojenému se neviditelnou neb *temnou* jevila. Zároveň se objevilo na místě žluté, z části i zelené barvy úplné temno, což jest důkazem, že zmíněné hledítko tyto paprsky nepropouští. Že pak světlo předčervené se stalo zřejmým, vykládám si podobně, jako zjev, že slabý zvuk úplným utišením nejbližšího okolí se stává slyšitelným. Takové utišení čili seslabení světla okolního děje se oním erythroskopem a tím se stává, že ony slabé vlnky se objeví co světlo. Že i rozšíření oční zornice v prostoru temném k tomu přispívá, netřeba tuším ani podotýkati.

V Táboře, dne 20. dubna 1876. Prof. *Hromádko.*